

Feuille d'exercices n°4

Corrigé

Exercice 1

1. Formule d'inversion pour un signal discret : la fonction $\hat{f}$ est 2π -périodique. Puisque, par définition, $\hat{f}(r) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(-k)e^{ikr}$, les $(f(-k))_{k \in \mathbb{Z}}$ sont les coefficients de f dans la décomposition en série de Fourier. On a donc :

$$f(-k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(r)e^{-ikr} dr$$

et, en remplaçant k par $-k$:

$$f(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(r)e^{ikr} dr$$

Multiplication par t (ici k) pour un signal discret :

$$\begin{aligned} \widehat{kf(k)}(r) &= \sum_k kf(k)e^{-ikr} = i \sum_k f(k)(-ik)e^{-ikr} \\ &= i \sum_k f(k) (e^{-ikr})' = i \left(\sum_k f(k)e^{-ikr} \right)' \\ &= if'(r) \end{aligned}$$

(Il faut bien sûr supposer que $(f(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ décroît suffisamment rapidement lorsque $|k| \rightarrow +\infty$, de façon à ce que les sommes convergent.)

Condition pour que le signal soit réel pour un signal discret : si f est réel, on a pour tout r

$$\begin{aligned} \hat{f}(r) &= \sum_k f(k)e^{-ikr} = \sum_k \overline{f(k)}e^{-ikr} \\ &= \overline{\sum_k f(k)e^{ikr}} = \overline{\hat{f}(-r)} \end{aligned}$$

Si f est à images réelles, on doit donc avoir $\hat{f}(r) = \overline{\hat{f}(-r)}$. Réciproquement, si $\hat{f}(r) = \overline{\hat{f}(-r)}$, le signal f est réel car, pour tout k :

$$\begin{aligned} \overline{f(k)} &= \overline{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(r)e^{ikr} dr} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{\hat{f}(r)}e^{-ikr} dr \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(-r)e^{-ikr} dr \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(r)e^{ikr} dr = f(k) \end{aligned}$$

Condition pour que le signal soit réel pour un signal fini : si f est réel, on a pour tout $n \in \{1, \dots, N-1\}$

$$\begin{aligned}\hat{f}(n) &= \sum_k \overline{f(k)} e^{-\frac{2\pi i n k}{N}} \\ &= \overline{\sum_k f(k) e^{\frac{2\pi i n k}{N}}} \\ &= \overline{\sum_k f(k) e^{-\frac{2\pi i (N-n)k}{N}}} \\ &= \overline{\hat{f}(N-n)}\end{aligned}$$

Pour $n = 0$, on a $\hat{f}(0) = \overline{\hat{f}(0)}$.

Si le signal est réel, on a donc $\hat{f}(0) = \overline{\hat{f}(0)}$ (c'est-à-dire $f(0) \in \mathbb{R}$), $\hat{f}(1) = \overline{\hat{f}(N-1)}$, $\hat{f}(2) = \overline{\hat{f}(N-2)}$, ...

Cette condition suffit à ce que le signal soit réel. En effet, si elle est vérifiée, on a, pour tout k :

$$\begin{aligned}\overline{f(k)} &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \overline{\hat{f}(n)} e^{-\frac{2\pi i n k}{N}} \\ &= \frac{1}{N} \hat{f}(0) + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-1} \hat{f}(N-n) e^{\frac{2\pi i (N-n)k}{N}} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{f}(n) e^{\frac{2\pi i n k}{N}} = f(k)\end{aligned}$$

2. On définit d'abord un signal bidimensionnel $(g[k, m])_{0 \leq k < N, 0 \leq m < M}$ par :

$$g[k, m] = \sum_{l=0}^{M-1} f[k, l] e^{-2\pi i \frac{lm}{M}}$$

(c'est-à-dire que, pour tout k , $g[k, \cdot]$ est la transformée de Fourier de $f[k, \cdot]$)

Alors, pour tous n, m :

$$\hat{f}[n, m] = \sum_{k=0}^{N-1} g[k, m] e^{-2\pi i \frac{kn}{N}}$$

(c'est-à-dire que, pour tout m , $\hat{f}[\cdot, m]$ est la transformée de Fourier de $g[\cdot, m]$)

D'après la formule d'inversion dans le cas à une dimension, on a, pour tout m et pour tout k :

$$g[k, m] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{f}[n, m] e^{2\pi i \frac{kn}{N}}$$

Également d'après la formule d'inversion en dimension 1, on a, pour tous k, l :

$$f[k, l] = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} g[k, m] e^{2\pi i \frac{ml}{M}}$$

et donc en remplaçant g par sa valeur en fonction de $\hat{f}$:

$$f[k, l] = \frac{1}{MN} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \hat{f}[n, m] e^{2\pi i \left(\frac{kn}{N} + \frac{ml}{M} \right)}$$

Exercice 2

1. Montrons que $\hat{f}_2(r) = \frac{1}{2} (\hat{f}(r) + \hat{f}(r + \pi))$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\hat{f}(r) + \hat{f}(r + \pi)) &= \frac{1}{2} \left(\sum_n f[n] e^{-inr} + \sum_n f[n] e^{-in(r+\pi)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_n f[n] e^{-inr} (1 + (-1)^n) \\ &= \sum_{n \text{ pair}} f[n] e^{-inr} \\ &= \sum_n f_2[n] e^{-inr} = \hat{f}_2(r) \end{aligned}$$

2. Si $\hat{f}$ vaut 0 sur $[-\pi; \pi] - [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, on a (puisque $\hat{f}$ est 2π -périodique) :

$$\hat{f}_2(r) = \frac{1}{2} \hat{f}(r) \text{ si } r \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

On a donc, pour tout r :

$$\hat{f}(r) = 2\hat{f}_2(r) 1_{[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \bmod 2\pi}(r)$$

et donc $f = 2f_2 \star h$ où h est le signal discret tel que :

$$\hat{h}(r) = 1_{[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \bmod 2\pi}(r)$$

c'est-à-dire, d'après la question 1. de l'exercice 1 :

$$\begin{aligned} h[k] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{h}(r) e^{ikr} dr \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{ikr}}{ik} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= \frac{1}{\pi k} \sin(k\pi/2) \end{aligned}$$

(sauf pour $k = 0$ où on a $h[0] = \frac{1}{2}$)

De manière plus concise, $2h[k] = \text{sinc}(k\pi/2)$.

On a donc, pour tout n :

$$f[n] = 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_2[k] h[n - k] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f[2k] \text{sinc}((n - 2k)\pi/2)$$

Exercice 3

1. a) $\hat{h}(r) = \sum_n g(n) e^{-inr} = \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_n g(n) \delta_n(x) \right) e^{-irx} dx$

La transformée de Fourier discrète $\hat{h}$ est donc égale à la transformée de Fourier continue de $\left(\sum_n g(n) \delta_n(x) \right)$. D'après le cours, elle vaut donc :

$$\hat{h}(r) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{g}(r - 2k\pi)$$

b) Il faut que le support de $\hat{g}$ soit inclus dans $[-\pi; \pi]$. Ainsi, les fonctions de transfert des filtres discrets et continus coïncident sur $[-\pi; \pi]$.

2. a) De même qu'à la question 1.a), $\hat{h}$ est la transformée de Fourier continue de la fonction $\sum_n g(n) w(n) \delta_n = g \cdot \left(\sum_n w(n) \delta_n \right)$.

On a donc $\hat{h} = \frac{1}{2\pi} \hat{g} \star \left(\sum_n w(n) \delta_n \right)$. De plus, la transformée de Fourier continue $\left(\sum_n w(n) \delta_n \right)$ est exactement égale à la transformée de Fourier discrète $\hat{w}$.

On a donc $\hat{h} = \frac{1}{2\pi} \hat{g} \star \hat{w}$.

b) Lorsque w est identiquement égale à 1 (et n'est donc pas à support fini), $\frac{1}{2\pi} \hat{w}$ est le peigne de diracs $\sum_k \delta_{2\pi k}$. On retrouve bien le résultat de la question 1.a) : $\hat{h}$ est la version 2π -périodisée de $\hat{g}$.

On voudrait choisir w à support fini de sorte que $\hat{w}$ est la plus proche possible d'un peigne de diracs parfait.

Le plus simple est de choisir pour w la version discrétisée d'un signal W continu à support compact (c'est-à-dire $w[n] = W(n)$, avec $W(t)$ une fonction à support compact). Avec ce choix, $\hat{w}$ est la 2π -périodisée de $\hat{W}$. Pour que $\hat{w}$ soit « proche » d'un peigne de diracs, il suffit donc que $\hat{W}$ soit « proche » d'un dirac en 0.

Choisir une fonction W bien lisse (c'est-à-dire infiniment dérivable) est un choix sûr car cela garantit que $\hat{W}$ décroît rapidement.

3. a) On écrit $N(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_c X^c$ et $D(X) = b_0 + b_1 X + \dots + b_d X^d$.

L'équation différentielle est $b_0 f_s + b_1 \frac{df_s}{dt} + \dots + b_d \frac{d^d f_s}{dt^d} = a_0 f_e + a_1 \frac{df_e}{dt} + \dots + a_c \frac{d^c f_e}{dt^c}$, où f_e est le signal d'entrée et f_s le signal de sortie.

b) L'équation devient :

$$b_0 f_s + b_1 D f_s + \dots + b_d D^d f_s = a_0 f_e + a_1 D f_e + \dots + a_c D^c f_e \quad (1)$$

Pour une fonction f donnée, calculons $\widehat{Df}$ en fonction de $\hat{f}$:

$$\begin{aligned} Df(r) &= \sum_n (f[n] - f[n-1]) e^{-inr} \\ &= \sum_n f[n] e^{-inr} - e^{-ir} \sum_n f[n-1] e^{-i(n-1)r} \\ &= (1 - e^{-ir}) \hat{f}(r) \end{aligned}$$

D'après l'équation 1, on a donc :

$$\hat{f}_s(b_0 + (1 - e^{-ir})b_1 + \dots + (1 - e^{-ir})^d b_d) = \hat{f}_e(a_0 + (1 - e^{-ir})a_1 + \dots + (1 - e^{-ir})^c a_c)$$

La fonction de transfert est donc $H(r) = \frac{a_0 + (1 - e^{-ir})a_1 + \dots + (1 - e^{-ir})^c a_c}{b_0 + (1 - e^{-ir})b_1 + \dots + (1 - e^{-ir})^d b_d} = \frac{N(1 - e^{-ir})}{D(1 - e^{-ir})}$.

c) Le cours dit qu'un filtre discret correspondant à une fonction de transfert de la forme $P(e^{-ir})/Q(e^{-ir})$ est stable et causal si et seulement si tous les pôles z_0 de $z \rightarrow P(z^{-1})/Q(z^{-1})$ vérifient $|z_0| < 1$. Cherchons donc si cette propriété est vérifiée ici.

Un complexe z_0 est un pôle de $N(1 - z^{-1})/D(1 - z^{-1})$ si et seulement si $1 - z_0^{-1}$ est un pôle de N/D . Puisque N/D correspond à un filtre stable et causal, cette fraction rationnelle n'a que des pôles de partie réelle strictement négative (voir le TD 1/2) donc, si z_0 est un pôle de $N(1 - z^{-1})/D(1 - z^{-1})$, on doit avoir $\Re(1 - z_0^{-1}) < 0$.

Donc $z_0 = \frac{1}{1 - (1 - z_0^{-1})}$. Comme $|1 - (1 - z_0^{-1})| \geq \Re(1 - (1 - z_0^{-1})) = 1 - \Re(1 - z_0^{-1}) > 1$, $|z_0| < 1$.

Donc la propriété voulue est vérifiée.

Le filtre est stable et causal.

d) On a $\frac{N(1 - e^{-ir})}{D(1 - e^{-ir})} \approx \frac{N(ir)}{D(ir)}$ lorsque $|r| \ll 1$. Les deux fonctions de transfert sont donc similaires au voisinage de 0 (mais pas nécessairement ailleurs).

Exercice 4

$$1. f \star h[n] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h[k]f[n - k] = \sum_{k=0}^{M-1} h[k]f[n - k].$$

Pour que cette somme soit non-nulle, il faut qu'il existe $k \in \{0, \dots, M - 1\}$ tel que $f[n - k] \neq 0$. Il doit donc exister $k \in \{0, \dots, M - 1\}$ tel que $n - k = l$, avec $l \in \{0, \dots, L - 1\}$.

Alors $n = k + l$ et puisque k est compris entre 0 et $M - 1$ et l entre 0 et $L - 1$, on a $0 \leq n \leq M + L - 2$.

2. Il faut calculer chacun des $h[k]f[l]$ pour $0 \leq k < M$ et $0 \leq l < L$. Ensuite, chaque $f \star h[n]$ s'écrit comme une somme de ces éléments, chaque $h[k]f[l]$ n'étant utilisé qu'une seule fois (pour $n = l + k$). Il y a donc ML produits et à peu près ML additions à effectuer. La complexité est $O(ML)$.

3. Le cours explique pourquoi, avec la transformée de Fourier rapide, la convolution de deux signaux discrets dont le support est inclus dans $\{0, \dots, L - 1\}$ peut se calculer en temps $O(L \log(L))$. Puisque h et f ont tous deux leurs supports inclus dans $\{0, \dots, L - 1\}$, cet algorithme est applicable ici et donne un nombre d'opérations en $O(L \log(L))$.

4. Pour tout $s = 0, \dots, L/M - 1$, on définit le signal f_s par :

$$\begin{aligned} f_s[k] &= f[k] \text{ si } sM \leq k < (s + 1)M \\ &= 0 \text{ sinon} \end{aligned}$$

Pour tout s , le support de f_s est de taille M donc, d'après la question précédente, on peut calculer $f_s \star h$ en temps $O(M \log(M))$.

De plus, de même qu'à la question 1., le support de $f_s \star h$ est inclus dans $\{sM, sM + 1, \dots, (s + 2)M - 2\}$.

Pour tout n , $f \star h[n] = f_0 \star h[n] + f_1 \star h[n] + \dots + f_{L/M-1} \star h[n]$ mais, vu les supports de ces fonctions, seuls deux termes de la somme au plus sont non-nuls (pour n fixé). Pour tout n , on peut donc calculer $f \star h[n]$ en une seule addition à partir des $f_s \star h[n]$.

Le temps de calcul est donc la somme des temps de calcul des $f_s \star h$ et des $M + L - 1$ additions finales. Ce temps est donc $\frac{L}{M}O(M \log(M)) + M + L - 1 = O(L \log(M))$.

Exercice 5

1. a) Pour tout $s = 0, \dots, n - 1$:

$$\begin{aligned}
 g \star h[s] &= \sum_{k=0}^{n-1} g[k] h[(s - k) \bmod n] \\
 &= g'[0] h'[s] + \sum_{k=1}^{n-1} g'[k + m - n] h[(s - k) \bmod n] \\
 &= g'[0] h'[s] + \sum_{k=1}^{n-1} g'[k + m - n] h'[n + s - k] \\
 &= g'[0] h'[s] + \sum_{k=m-n+1}^{m-1} g'[k] h'[m + s - k] \\
 &= \sum_{k=0}^{m-1} g'[k] h'[(m + s - k) \bmod m] \\
 &= \sum_{k=0}^{m-1} g'[k] h'[(s - k) \bmod m] \\
 &= g' \star h'[s]
 \end{aligned}$$

b) Définissons m comme la plus petite puissance de 2 supérieure ou égale à $2n - 1$. Alors $2n - 1 \leq m < 2(2n - 1)$; en particulier, $m \leq 4n$.

Calculer g' et h' en fonction de g et h se fait en $O(m) = O(n)$ opérations. Puisque g' et h' ont pour longueur une puissance de 2, leur convolution se calcule (au moyen de la transformée de Fourier rapide) en $O(m \log(m)) = O(n \log(n))$ opérations.

Comme on a vu que $g \star h$ était égale aux n premiers coefficients de $g' \star h'$, $g \star h$ se calcule en $O(n \log(n))$ opérations.

2. a)

$$\begin{aligned}
f[0] + (\tilde{f} \star g)[k] &= f[0] + \sum_{s=0}^{p-2} \tilde{f}[s]g[k-s] \\
&= f[0] + \sum_{s=0}^{p-2} f[a^s]e^{-\frac{2\pi i}{p}a^{p-1-k+s}} \\
&= f[0] + \sum_{s=0}^{p-2} f[a^s]e^{-\frac{2\pi i}{p}a^{p-1-k}}a^s \\
&= f[0] + \sum_{r=1}^{p-1} f[r]e^{-\frac{2\pi i}{p}a^{p-1-k}r} \\
&= \sum_{r=0}^{p-1} f[r]e^{-\frac{2\pi i}{p}a^{p-1-k}r} = \hat{f}[a^{p-1-k}]
\end{aligned}$$

b) Les signaux $\tilde{f}$ et g se calculent en $O(p)$ opérations, si a est connu. D'après la question 1., $\tilde{f} \star g$ se calcule en $O(p \log(p))$ opérations donc $(\hat{f}[a^{p-1-k}])_{0 \leq k \leq p-1}$ se calcule en $O(p \log(p))$ opérations. Puisque $\hat{f}$ se déduit de ce signal en $O(p)$ opérations, $\hat{f}$ se calcule également en $O(p \log(p))$ opérations.