

Feuille d'exercices n°3

Corrigé

Exercice 1

1. Posons $g(t) = f(t)e^{-i\omega_0 t}$. Puisque $\hat{g}(\omega) = \hat{f}(\omega + \omega_0)$, $\hat{g}$ est à support dans $[-\pi/T; \pi/T]$. On a donc, d'après le théorème de Nyquist, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$g(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g(nT) \text{sinc}\left(\frac{\pi}{T}(t - nT)\right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(nT) e^{-i\omega_0 nT} \text{sinc}\left(\frac{\pi}{T}(t - nT)\right)$$

et donc :

$$f(t) = e^{i\omega_0 t} g(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(nT) e^{i\omega_0(t - nT)} \text{sinc}\left(\frac{\pi}{T}(t - nT)\right)$$

2. Nous allons calquer le raisonnement sur celui effectué en cours pour le cas des signaux dont la transformée de Fourier est à support dans $[-\pi/T; \pi/T]$.

Posons $f_d(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(nT) \delta_{nT}$. La transformée de Fourier de $\hat{f}_d$ vaut (c'est dans le cours) :

$$\hat{f}_d(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\omega - 2k\pi/T)$$

Vu le support de $\hat{f}$, on a :

$$\hat{f}(\omega) = T \hat{f}_d(\omega) 1_{[-(N+1)\frac{\pi}{T}; -N\frac{\pi}{T}] \cup [N\frac{\pi}{T}; (N+1)\frac{\pi}{T}]}(\omega)$$

On a donc $f = f_d \star h$ où h est la fonction telle que :

$$\hat{h}(\omega) = T 1_{[-(N+1)\frac{\pi}{T}; -N\frac{\pi}{T}] \cup [N\frac{\pi}{T}; (N+1)\frac{\pi}{T}]}(\omega)$$

On a :

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{2\pi} \int \hat{h}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{T}{2\pi} \left(\left[\frac{e^{i\omega t}}{it} \right]_{-(N+1)\frac{\pi}{T}}^{-N\frac{\pi}{T}} + \left[\frac{e^{i\omega t}}{it} \right]_{N\frac{\pi}{T}}^{(N+1)\frac{\pi}{T}} \right) \\ &= \frac{T}{2\pi it} (e^{-iN\pi t/T} - e^{-i(N+1)\pi t/T} + e^{i(N+1)\pi t/T} - e^{iN\pi t/T}) \\ &= \frac{T}{\pi t} (\sin((N+1)\pi t/T) - \sin(N\pi t/T)) \\ &= (N+1) \text{sinc}\left(\frac{(N+1)\pi t}{T}\right) - N \text{sinc}\left(\frac{N\pi t}{T}\right) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(nT) \delta_{nT} \star h(t) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(nT) h(t - nT) \end{aligned}$$

Exercice 2

1. Posons ρ la fonction qui vaut 1 sur $[0; T]$ et 0 sur $\mathbb{R} - [0; T]$.

Alors :

$$\begin{aligned} (f \star \rho)(nT) &= \int_{\mathbb{R}} f(t) \rho(nT - t) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(t) 1_{nT - t \in [0; T]} dt \\ &= \int_{(n-1)T}^{nT} f(t) dt \\ &= f[n] \end{aligned}$$

2. Puisque le support de $\hat{f}$ est inclus dans $[-\frac{\pi}{T}; \frac{\pi}{T}]$ et puisque $\widehat{f \star \rho} = \hat{f} \hat{\rho}$, le support de $\hat{f}$ est aussi inclus dans $[-\frac{\pi}{T}; \frac{\pi}{T}]$.

D'après le théorème de Nyquist :

$$\tilde{f}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{f}(nT) \text{sinc}\left(\frac{\pi}{T}(t - nT)\right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f[n] \text{sinc}\left(\frac{\pi}{T}(t - nT)\right)$$

3. La transformée de Fourier de ρ vaut :

$$\hat{\rho}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} \rho(t) e^{-i\omega t} dt = \int_0^T e^{-i\omega t} dt = i \frac{e^{-i\omega T} - 1}{\omega}$$

(en tout cas si $\omega \neq 0$; cela vaut T si $\omega = 0$)

Cette fonction ne s'annule pas sur $[-\frac{\pi}{T}; \frac{\pi}{T}]$. Soit γ une fonction continue à support compact qui est égale à $\frac{1}{\rho}$ sur $[-\frac{\pi}{T}; \frac{\pi}{T}]$.

Soit τ une fonction telle que $\hat{\tau} = \gamma$. Alors $f = \tilde{f} \star \tau$. En effet, puisque $\hat{\tau} \hat{\rho} = 1$ sur $[-\frac{\pi}{T}; \frac{\pi}{T}]$, $\hat{f} = \hat{f} \hat{\tau} \hat{\rho}$ (car $\text{Supp}(f) \subset [-\frac{\pi}{T}; \frac{\pi}{T}]$). Donc $f = (f \star \rho) \star \tau = \tilde{f} \star \tau$.

Donc :

$$\begin{aligned} f &= \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} f[n] \text{sinc}\left(\frac{\pi}{T}(\cdot - nT)\right) \right) \star \tau \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} f[n] \text{sinc}\left(\frac{\pi}{T}\cdot\right) \star \tau(t - nT) \end{aligned}$$

Puisque la transformée de Fourier de $\text{sinc}(\pi/T \cdot)$ est $T1_{[-\pi/T; \pi/T]}$, la fonction $s \stackrel{\text{def}}{=} \text{sinc}(\frac{\pi}{T} \cdot) \star \tau$ est la fonction dont la transformée de Fourier vaut :

$$\hat{s}(\omega) = -Ti \frac{\omega}{e^{-i\omega T} - 1} 1_{[-\pi/T; \pi/T]}(\omega)$$

et on a :

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f[n] s(t - nT)$$

Exercice 3

1. Puisque ρ appartient à V , on doit avoir $\rho(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \rho(nT) \rho(t - nT)$, c'est-à-dire $\rho = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n \rho(\cdot - nT)$ si on pose $\alpha_n = \rho(nT)$.

On souhaite de plus que $\{\rho(\cdot - nT)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ soit une famille libre. On doit donc avoir $\alpha_n = 1$ si $n = 0$ et $\alpha_n = 0$ sinon, c'est-à-dire $\rho(0) = 1$ et $\rho(nT) = 0$ si $n \neq 0$.

Notons $G(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\rho}(\omega + \frac{2k\pi}{T})$. C'est une fonction $2\pi/T$ -périodique.

Pour tout $l \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi/T} G(\omega) e^{iTl\omega} d\omega &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi/T} \hat{\rho}\left(\omega + \frac{2k\pi}{T}\right) e^{iTl\omega} d\omega \\ &= \int_{\mathbb{R}} \hat{\rho}(\omega) e^{iTl\omega} d\omega \\ &= 2\pi \rho(Tl) \\ &= 2\pi \delta_0(l) = \int_0^{2\pi/T} T e^{iTl\omega} d\omega \end{aligned}$$

Donc, pour tout $l \in \mathbb{Z}$, $\int_0^{2\pi/T} (G(\omega) - T) e^{iTl\omega} d\omega = 0$. Puisque $\{e^{iTl\omega}\}_{l \in \mathbb{Z}}$ forme une base de $L^2([0; 2\pi/T])$, on doit avoir $G - T = 0$ sur $[0; 2\pi/T]$, soit $G = T$ sur $[0; 2\pi/T]$ et donc $G = T$ sur tout $\mathbb{R}$ car G est $2\pi/T$ -périodique.

2. Le théorème de Nyquist traite le cas où $\hat{\rho} = T1_{[-\pi/T; \pi/T]}$ (et les fonctions V sont les fonctions à bande limitée dans $[-\pi/T; \pi/T]$).

Un autre cas simple est celui où V est l'ensemble des fonctions constantes sur les intervalles de la forme $[(n - \frac{1}{2})T; (n + \frac{1}{2})T]$, avec la fonction $\rho = 1_{[-T/2; T/2]}$.

De plus, on peut vérifier que la condition nécessaire trouvée à la question précédente ($\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\rho}(\omega + 2k\pi/T) = T$) est aussi une condition suffisante pour que la formule de reconstruction soit vraie, si on pose $V = \{\sum_k a_k \rho(\cdot - kT)\}$. Toutes les fonctions ρ telles que $\hat{\rho}$ vérifie la condition conviennent donc.

L'exemple le plus simple est $\hat{\rho} = T1_{[-\pi/T; \pi/T]}$ mais on peut en construire une infinité d'autres.

Un autre exemple simple, par exemple, est $\hat{\rho}(\omega) = \frac{T^2}{2\pi} \max(0, \frac{2\pi}{T} - \omega)$.

Pour chaque choix de ρ , $V = \{\sum_k a_k \rho(\cdot - kT)\}$ est l'ensemble des fonctions f dont la transformée de Fourier est de la forme $\hat{f}(\omega) = \hat{\rho}(\omega)S(\omega)$, pour S une fonction $2\pi/T$ -périodique quelconque.

En effet, la transformée de Fourier d'une fonction de la forme $\sum_k a_k \rho(\cdot - kT)$ vaut :

$$\hat{\rho}(\omega) \cdot \left(\sum_k a_k e^{-i\omega kT} \right)$$

et les fonctions qui peuvent s'écrire sous la forme $\left(\sum_k a_k e^{-i\omega kT} \right)$ sont exactement les fonctions $2\pi/T$ périodiques.

Exercice 4

1. Pour tout n , notons $\rho_n = \text{sinc}(\pi(\cdot - n))$. Pour tout n :

$$\hat{\rho}_n(\omega) = 1_{[-\pi; \pi]}(\omega) e^{-in\omega}$$

Les fonctions $\left\{ \frac{\hat{\rho}_n}{\sqrt{2\pi}} \right\}_{n \in \mathbb{Z}}$ forment une base de Hilbert de $L^2([-\pi; \pi])$.

De plus, pour tout n , $f(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(\omega) e^{in\omega} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \langle \hat{f}, \frac{\hat{\rho}_n}{\sqrt{2\pi}} \rangle$.

La fonction $\hat{f}_N = \sum_{|n| \leq N} \langle \hat{f}, \frac{\hat{\rho}_n}{\sqrt{2\pi}} \rangle \frac{\hat{\rho}_n}{\sqrt{2\pi}}$ est donc la projection de $\hat{f}$ sur $\text{Vect} \{ \rho_{-N}, \dots, \rho_{N-1}, \rho_N \}$.

Donc $\hat{f}_N \rightarrow \hat{f}$ dans L^2 . Puisque $\|f_N - f\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\hat{f}_N - \hat{f}\|_2$, $\|f_N - f\|_2 \rightarrow 0$.

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\|\hat{f}_N - \hat{f}\|_1 \leq \sqrt{2\pi} \|\hat{f}_N - \hat{f}\|_2$. D'après la formule d'inversion de la transformée de Fourier, $\|f_N - f\|_\infty \leq \frac{1}{2\pi} \|\hat{f}_N - \hat{f}\|_1$ donc :

$$\|f_N - f\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\hat{f}_N - \hat{f}\|_2 \rightarrow 0$$

2. a) Pour tout t , d'après Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} |f(t) - f_N(t)| &\leq \sum_{|n| > N} |f(n)| \cdot |\text{sinc}(\pi(t - n))| \\ &\leq \sum_{|n| > N} \frac{|f(n)|}{\pi(t - n)} \\ &\leq \frac{1}{\pi} \sqrt{\sum_{|n| > N} |f(n)|^2} \sqrt{\sum_{|n| > N} \frac{1}{|t - n|^2}} \end{aligned}$$

D'après le raisonnement de la question précédente, $\sqrt{\sum_{|n| > N} |f(n)|^2}$ est (à une constante multiplicative près) la norme de la projection de $\hat{f}$ sur l'orthogonal de $\text{Vect} \{ \rho_{-N}, \dots, \rho_{N-1}, \rho_N \}$. Cette norme tend vers 0 donc :

$$|f(t) - f_N(t)| = o \left(\sqrt{\sum_{|n| > N} \frac{1}{|t - n|^2}} \right)$$

Lorsque $N \rightarrow +\infty$, $\sum_{|n| > N} \frac{1}{|t - n|^2} \sim \sum_{|n| > N} \frac{1}{n^2} = O\left(\frac{1}{N}\right)$ donc $|f(t) - f_N(t)| = o(N^{-1/2})$.

b) On pose $f(t) = C \sum_{n \in \mathbb{N}^*} n^{-(1/2+\epsilon)} (-1)^n \text{sinc}(\pi(t-n))$, avec $C > 0$ une constante qui devra être choisie suffisamment grande.

C'est bien une fonction de L^2 (car les fonctions $\text{sinc}(\pi(\cdot - n))$ sont orthogonales entre elles et $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} (n^{-(1/2+\epsilon)})^2 < +\infty$) dont la transformée de Fourier est à support dans $[-\pi; \pi]$ (car les transformées de Fourier des $\text{sinc}(\pi(\cdot - n))$ ont cette propriété).

On vérifie qu'on a $f(1/2) = C \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{n^{-(1/2+\epsilon)}}{\pi(1/2-n)}$ et $f_N(1/2) = C \sum_{0 < n \leq N} \frac{n^{-(1/2+\epsilon)}}{\pi(1/2-n)}$.

On a donc $|f_N(1/2) - f(1/2)| = \frac{C}{\pi} \sum_{n > N} \frac{n^{-(1/2+\epsilon)}}{n-1/2}$.

Lorsque $N \rightarrow +\infty$, $\sum_{n > N} \frac{n^{-(1/2+\epsilon)}}{n-1/2} \sim \sum_{n > N} n^{-(3/2+\epsilon)} \sim \frac{N^{-(1/2+\epsilon)}}{1/2+\epsilon}$. Si on choisit C assez grand, on a donc :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad |f_N(1/2) - f(1/2)| \geq N^{-(1/2+\epsilon)}$$

3. On choisit $\hat{\rho}$ vérifiant les propriétés suivantes :

- $\hat{\rho}$ est $\mathcal{C}^\infty$.
- $\hat{\rho}$ est à support dans $[-\pi; \pi]$.
- $\hat{\rho}$ vaut 1 sur $[-\pi/2; \pi/2]$.

Pour toute fonction f telle que $\text{Supp}(\hat{f}) \subset [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$:

$$\hat{f} = \hat{f} \hat{\rho}$$

donc $f = f \star \rho$ et, puisque $f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) \text{sinc}(\pi(t-n))$, on a :

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) (\text{sinc}(\pi \cdot) \star \rho)(t-n)$$

La transformée de Fourier de $\text{sinc}(\pi \cdot) \star \rho$ vaut $1_{[-\pi; \pi]} \hat{\rho} = \hat{\rho}$ donc :

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) \rho(t-n)$$

Comme on l'a vu dans les questions précédentes, $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |f(n)|^2 < +\infty$ donc $(f(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ est bornée.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{N}$, $\rho(t-n) = o(|n|^{-k})$ quand $|n| \rightarrow +\infty$. En effet, $x \rightarrow \rho(x)x^{k+1}$ est une fonction bornée : sa transformée de Fourier, $i^{k+1} \rho^{(k+1)}(x)$ est continue et à support compact, donc dans L^1 . Donc $\rho(x) = o(|x|^{-k})$ quand $|x| \rightarrow +\infty$.

Donc $|f_N(t) - f(t)| \leq \max_n |f(n)| \sum_{n > N} |\rho(t-n)|$ est également un $o(N^{-k})$ lorsque $N \rightarrow +\infty$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 5

1. Soit f de classe $\mathcal{C}^1$. Pour tout n , on note g_n l'unique fonction de E_n telle que $f(k2^{-n}) = g_n(k2^{-n})$ pour tout $k \in \{0, \dots, 2^n\}$.

Pour tout $t \in [0; 1]$, il existe $k \in \{0, 2^n - 1\}$ tel que $t \in [k2^{-n}; (k+1)2^{-n}]$. Alors :

$$\begin{aligned}
|f(t) - g_n(t)| &= \left| f(k2^{-n}) - g_n(k2^{-n}) + \int_{k2^{-n}}^t f'(s) - g'_n(s) ds \right| \\
&= \left| \int_{k2^{-n}}^t f'(s) - g'_n(s) ds \right| \\
&\leq |t - k2^{-n}| \sup_{s \in [k2^{-n}; (k+1)2^{-n}]} |f'(s) - g'_n(s)| \\
&\leq 2^{-n} \sup_{s \in [k2^{-n}; (k+1)2^{-n}]} \left| f'(s) - \frac{f((k+1)2^{-n}) - f(k2^{-n})}{2^{-n}} \right|
\end{aligned}$$

D'après le théorème des accroissements finis, il existe $u \in [k2^{-n}; (k+1)2^{-n}]$ tel que :

$$\frac{f((k+1)2^{-n}) - f(k2^{-n})}{2^{-n}} = f'(u)$$

donc :

$$|f(t) - g_n(t)| \leq 2^{-n} \sup_{s, s' \in [k2^{-n}; (k+1)2^{-n}]} |f'(s) - f'(s')| \leq 2^{-n} \sup_{|s-s'| \leq 2^{-n}} |f'(s) - f'(s')|$$

Puisque f est $\mathcal{C}^1$, f' est continue. Comme son intervalle de définition, $[0; 1]$, est compact, f' est uniformément continue et $\sup_{|s-s'| \leq 2^{-n}} |f'(s) - f'(s')| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$. Puisque l'inégalité précédente est valable pour tous les t :

$$\|f - g_n\|_\infty \leq 2^{-n} \sup_{|s-s'| \leq 2^{-n}} |f'(s) - f'(s')| = o(2^{-n})$$

et comme $\epsilon_n(f) \leq \|f - g_n\|_\infty$, on a le résultat.

2. Soit un $\alpha > 1$ comme dans l'énoncé.

Il existe alors $C > 0$ tel que, pour tout n , $\epsilon_n(f) < C2^{-\alpha n}$. Pour tout n , notons $g_n \in E_n$ tel que $\|f - g_n\|_\infty \leq C2^{-\alpha n}$.

Notons $h_0 = g_0$ et $h_n = g_n - g_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout n , $h_n \in E_n$ et $\|h_n\|_\infty = \|g_n - g_{n-1}\|_\infty \leq \|g_n - f\|_\infty + \|f - g_{n-1}\|_\infty \leq C2^{-\alpha n} + C2^{-\alpha(n-1)} = C(1 + 2^\alpha)2^{-\alpha n}$.

Pour toute fonction $g \in E_n$, g admet une dérivée g' , qui vérifie :

$$\|g'\|_\infty \leq 2^{n+1} \|g\|_\infty$$

En effet, pour tout $t \in [0; 1]$, il existe $k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$ tel que $t \in [k2^{-n}; (k+1)2^{-n}]$. On a alors :

$$|g'(t)| = \left| \frac{g((k+1)2^{-n}) - g(k2^{-n})}{2^{-n}} \right| \leq 2^{n+1} \|g\|_\infty$$

Pour tout n , $g_n = h_0 + \dots + h_n$. La suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f (car $\|f - g_n\|_\infty \leq C2^{-\alpha n}$). De plus, la suite $(g'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction $H \in L^\infty$.

En effet, la série $\sum_{k \geq 0} h'_k$ est normalement convergente (car $\|h'_k\|_\infty \leq 2^{k+1} \|h_k\|_\infty \leq 2^{k+1} C(1 + 2^\alpha) 2^{-\alpha k}$ donc, comme $\alpha > 1$, on a convergence géométrique). Donc $g'_n = h'_0 + \dots + h'_n$ converge uniformément vers $H \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k \in \mathbb{N}} h'_k$.

Cela implique que f est dérivable, de dérivée H .