Feuille d'exercices n°10

Exercice 1

Montrer que la famille des sinus discrets :

$$s_k[n] = \lambda_k \sqrt{\frac{2}{N}} \sin\left(\frac{k\pi}{N}(n+1/2)\right) \qquad (k = 1, ..., N,\ n = 0, ..., N-1)$$

avec $\lambda_k = 1$ si $k < N$ et $1/\sqrt{2}$ si $k = N$, est une base orthonormale de $\mathbb{R}^N$.

Exercice 2

On suppose que $(g_m)_{0\leq m<N}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^N$ et qu'on dispose d'un algorithme rapide pour calculer la décomposition dans cette base de tout signal fini $x[n], 0 \leq n < N$. On désigne par $C(N)$ le temps de calcul de cet algorithme et on suppose que $C(N) \ll N^2$.

1. À partir de $(g_m)_{0\leq m<N}$, déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}^{N\times N}$ et un algorithme rapide calculant la décomposition d'un signal sur cette base. Exprimer la complexité de cet algorithme en fonction de C.

2. Donner un exemple qui rentre dans ce cadre, que vous avez vu en cours.

Exercice 3 : choix de la base du codage par transformée

On code un signal X en le décomposant sur une base orthonormale $(g_n)_{1\leq n\leq N}$:

$$X = \sum_n \langle X, g_n\rangle g_n$$

On pose $A_n = \langle X, g_n\rangle$ et on quantifie puis on encode chaque A_n.
Dans cet exercice, on s'intéresse à la façon de choisir les g_n.

1. En utilisant les résultats du cours, montrer que pour minimiser le nombre de bits nécessaires pour le codage à taux de distorsion fixée, il faut minimiser l'entropie différentielle moyenne :

$$\overline{H}_d = \frac{1}{N}\left(H_d(A_1) + ... + H_d(A_N)\right)$$

2. On étudie le cas des processus gaussiens : on suppose que $X = (X_1, ..., X_N)$ est un vecteur gaussien de moyenne nulle dont on note K la matrice de covariance.
a) On admet que l'entropie différentielle d'une variable aléatoire gaussienne centrée de variance 1 est $\log_2\sqrt{2\pi e}$. Calculer l'entropie d'une variable aléatoire gaussienne de variance σ^2.
b) Pour tout n, on note σ_n^2 la variance de A_n. Exprimer $\overline{H}_d$ en fonction des σ_n.
c) Montrer que $(g_n)_{n\leq N}$ minimise l'entropie différentielle moyenne si et seulement si c'est une base de vecteurs propres de K.
[Indication : Vérifier que $\sigma_n^2 = \langle g_n, Kg_n\rangle$ puis utiliser la question 3.]

3. Montrer que si ϕ est une fonction strictement concave et si $(g_n)_{1\leq n\leq N}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^N$, alors $\sum_{n\leq N}\phi(\langle g_n, Kg_n\rangle)$ est minimale si et seulement si les (g_n) forment une base de vecteurs propres de K.

Exercice 4 : quantification non-linéaire

Soit X une variable aléatoire réelle de densité $p(x)$.
Soit $(y_k)_{0\le k\le K}$ une subdivision non-uniforme de $]-\infty;+\infty[$, avec $y_0=-\infty$ et $y_K=+\infty$. Soit Q le quantificateur associé, avec :

$$Q_{|[y_{k-1},y_k[} = \frac{y_{k-1}+y_k}{2} \stackrel{\text{def}}{=} a_k \qquad (\forall k = 2,...,K-1)$$

Soit $(\tilde{y}_k)_{0\le k\le K}$ une subdivision uniforme : $\tilde{y}_0=-\infty, \tilde{y}_K=+\infty$ et

$$\tilde{y}_2-\tilde{y}_1=\tilde{y}_3-\tilde{y}_2=...=\tilde{y}_{K-1}-\tilde{y}_{K-2}$$

Soit $\tilde{Q}$ le quantificateur associé à cette subdivision, avec $\tilde{Q}_{|[\tilde{y}_{k-1},\tilde{y}_k[} = \frac{\tilde{y}_{k-1}+\tilde{y}_k}{2} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{a}_k$ pour tout $k=2,...,K-1$.
On suppose que Q et $\tilde{Q}$ sont des quantificateurs haute résolution.

1. Montrer que l'on peut définir Q par une formule du type $Q=G^{-1}\circ\tilde{Q}\circ G$, avec G croissante et affine par morceaux sur chaque $[y_{k-1};y_k]$. Calculer $G'(a_k)$ pour $2\le k\le K-1$.

2. Calculer la distorsion $D=E(|X-Q(X)|^2)$, en fonction de $\tilde{y}_1, \tilde{y}_{K-1}, K$, des $G'(a_k)$ et $p(a_k)$.

3. Donner une expression intégrale approchée de D pour K grand.

4. a) Calculer la distorsion minimale, pour le meilleur choix de G possible.
[Indication : utiliser l'inégalité de Hölder.]
b) Comparer avec la distorsion de $\tilde{Q}$.

Exercice 5

Soit X une variable aléatoire de loi $p(x)$.

1. On considère le quantificateur Q non-uniforme sur K niveaux qui produit la distorsion minimale. On admettra ici que, dans l'approximation haute résolution, la distorsion associée est :

$$D \sim \frac{1}{12K^2}\left(\int p(x)^{1/3}dx\right)^3$$

[La démonstration fait l'objet de l'exercice précédent.]
a) On suppose que X est gaussienne, centrée, de variance σ^2, et qu'on a $K=2^R$ (et on code chaque valeur quantifiée de X sur R bits). Montrer que la distorsion du quantificateur Q est à peu près :

$$D \sim C\sigma^2 2^{-2R}$$

où C est une constante qu'on calculera.
b) Montrer que, pour ce choix de quantification, on ne peut pas obtenir un codage de longueur moyenne significativement meilleure que R bits.
c) Comparer cette approche avec un quantificateur uniforme suivi d'un codage entropique (c'est-à-dire pour lequel le nombre de bits moyen est égal à l'entropie).

2. On code maintenant un vecteur aléatoire $(A[1],...,A[N])$ gaussien. On note σ_i^2 la variance de $A[i]$. On quantifie chaque coordonnée $A[i]$ séparément et on envoie le code de chaque composante quantifiée. Pour chaque i, on note R_i le nombre moyen de bits nécessaire pour le codage, après quantification.
a) On suppose que le nombre moyen de bits $\overline{R}=(R_1+...+R_N)/N$ est fixé. Trouver la répartition qui minimise la distorsion globale $D=D_1+...+D_N$.
b) Comparer au cas où le nombre de bits est constant : $R_1=...=R_N$.