

## TP n°3

### 1. Génération d'un processus gaussien

Soit  $X$  un bruit blanc gaussien d'espérance nulle et de variance 1. On suppose  $a \in ]0; \pi[$  fixé. On note  $g_a$  le filtre discret tel que  $\hat{g}_a(\omega) = 1_{[-a; a]}(\omega)$ , pour tout  $\omega \in [-\pi; \pi]$ . On pose :

$$X_a = X \star g_a$$

Comme on l'a (plus ou moins) vu dans le TD 7, c'est un processus gaussien stationnaire.

a) Calculer l'autocovariance de  $X_a$ .

b) Pour simplifier l'implémentation, on va remplacer la convolution par une convolution circulaire. On approxime  $g_a$  par un filtre fini  $g_a^f$  de taille  $N$  tel que :

$$\forall n \in \left\{ \left\lceil -\frac{N}{2} \right\rceil + 1, \dots, \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor \right\}, \quad g_a^f[n] = g_a[n]$$

Que vaut approximativement  $\hat{g}_a^f[k]$  (en supposant  $N$  suffisamment grand pour négliger le reste de la série) ?

c) Créer dans un fichier séparé une fonction appelée **gauss**, qui prend en argument deux paramètres  $N$  et  $a$  et renvoie une réalisation de  $(X_a[0], \dots, X_a[N-1])$ .

Utiliser **randn** pour générer un bruit blanc gaussien centré de variance 1.

d) Afficher une réalisation pour  $a = 10^{-1}$  et  $N = 1000$ .

L'instruction **figure(n)** permet d'ouvrir une figure portant le numéro  $n$  ; l'instruction **plot(x)** affiche le tableau **x** sous la forme d'un graphe sur la figure courante.

Pour vérifier l'implémentation à ce stade, on pourra calculer la transformée de Fourier de différents  $X_a$  ( $a$  variant également) et s'assurer que leur support est bien contenu dans  $[-a, a]$ .

### 2. Filtrage de Wiener

Dans cette partie, on suppose qu'on cherche à transmettre un signal, corrompu par un bruit additif. On suppose que le signal est une réalisation de  $X_a$  et que le bruit est un bruit blanc gaussien  $Y$ , d'espérance nulle et de variance  $\sigma^2$ , indépendant du signal. Le signal bruité est donc une réalisation de :

$$D = X_a + Y$$

a) On cherche à débruiter le signal transmis en lui appliquant un filtre  $h$  :

$$\tilde{X}_a = D \star h$$

On prend pour  $h$  le filtre de Wiener adapté à la situation. Donner l'expression de  $h$  et  $\hat{h}$  en fonction de  $a$  et  $\sigma$ .

- b) Dans cette question, on prend  $a = 10^{-1}$  et  $\sigma = 10^{-1}$ .  
 Calculer une réalisation de  $(X_a[0], \dots, X_a[N-1])$  et une réalisation de  $(Y[0], \dots, Y[N-1])$ .  
 Calculer la réalisation correspondante de  $(D[0], \dots, D[N-1])$ .  
 c) Calculer  $(D \star h[0], \dots, D \star h[N-1])$  (en approximant toujours les convolutions par des convolutions circulaires).  
 d) Afficher sur la même figure  $(X_a[0], \dots, X_a[N-1])$ ,  $(D[0], \dots, D[N-1])$  et  $(D \star h[0], \dots, D \star h[N-1])$ .

L'instruction `clf` efface le contenu de la figure courante; `hold on` désactive l'effaçage automatique entre deux instructions d'affichage; `plot(x,c)` permet d'afficher le graphe de  $\mathbf{x}$  d'une autre couleur que bleu (`c='r'` donne du rouge, `c='g'` du vert ...).

### 3. Effet du filtrage de Wiener sur un processus continu par morceaux

Dans cette partie, on s'intéresse au processus stationnaire dont la loi est la suivante :

$$\begin{aligned} Z[0] &= 1 \text{ ou } -1 \text{ avec probabilité } 1/2 \\ Z[s] &= Z[0](-1)^{\epsilon_1 + \dots + \epsilon_s} \text{ si } s \geq 1 \\ Z[s] &= Z[0](-1)^{\epsilon_{-1} + \dots + \epsilon_{-s}} \text{ si } s \leq -1 \end{aligned}$$

où les  $\epsilon_k$  sont des variables aléatoires indépendantes qui valent 0 avec probabilité  $p$  et 1 avec probabilité  $1-p$ , pour un certain  $p \in [0; 1]$ .

- a) Écrire une fonction `cpm` qui prend en entrée  $N$  et  $p$  et renvoie une réalisation de  $(Z[0], \dots, Z[N-1])$ .  
 b) Tracer le graphe d'une réalisation pour  $N = 1000$  et  $p = 0.995$ .  
 Pour vérifier ses résultats à ce stade, on usera de bon sens en se demandant si les transitions de  $Z$  entre  $-1$  et  $1$  devraient être nombreuses ou non pour la valeur de  $p$  choisie.  
 c) Calculer  $\hat{R}_Z(\omega)$  (analytiquement).  
 d) Refaire la question 2. en remplaçant  $X_a$  par  $Z$ .

Que pensez-vous de la qualité du débruitage ? Vous pouvez essayer de modifier un peu la valeur de  $h$ . Vous devriez observer que, quel que soit  $h$ , soit il reste du bruit dans les parties constantes du signal, soit les discontinuités du signal sont fortement lissées. Des méthodes de débruitage plus efficaces existent pour des processus ayant le même genre de loi que  $Z$  mais elles sont non-linéaires.

### 4. Synthèse de textures

- a) Charger le fichier `texture1.mat`, disponible à l'adresse <http://www.di.ens.fr/~andreux/teaching/TP3.zip>. Cela stocke en mémoire un tableau de réels, de taille  $100 \times 100$ , représentant une texture visuelle.

Utiliser `load(filename)` pour charger le fichier.

- b) Afficher la texture.  
 c) On va essayer de générer une texture perceptuellement similaire en modélisant la texture par un processus gaussien. Sous hypothèse de stationarité, l'autocovariance empirique de la texture

$f_0$  peut être estimée par :

$$R_X^{est}[\mathbf{i}, \mathbf{j}] = \frac{1}{N^2} \sum_{\mathbf{p}} f_0[\mathbf{p} + \mathbf{i}] f_0[\mathbf{p} + \mathbf{j}]$$

avec  $N = 100$ , où les indices sont prolongés par périodicité. On voit que  $R_X^{est}$  est en fait un opérateur de convolution :

$$R_X^{est} h = s * h$$

où

$$s = \frac{1}{N^2} f_0 * \bar{f}_0$$

(avec  $\bar{f}_0[\mathbf{i}] = f_0[-\mathbf{i}]$ ).

Estimer la transformée de Fourier de l'autocovariance de la texture par :

$$\hat{R}_X^{est}[k, l] \approx \frac{|\text{FFT}_{2D}(f_0)[k, l]|^2}{N^2}$$

avec  $N = 100$ .

- d) Produire une réalisation d'un processus gaussien ayant cette autocovariance par convolution circulaire d'un bruit blanc avec un filtre bien choisi et afficher le résultat.
- e) Reproduire les questions précédentes pour le fichier `texture2.mat` et commenter.