Université de Limoges **Année universitaire 2015-2016**
Faculté des Sciences et Techniques

Master 1 Informatique et Mathématiques
Complexité et calculabilité - Feuille d'exercices n°2

Fonctions, machines, simulation

Définition 1. *Soient E et F deux ensembles et f une fonction de E dans F. On dit que f est une fonction partielle si f n'est pas définie pour certains éléments de E. Soit x un élément de E. Si f est définie en x, on note $f(x)\downarrow$ et on lit «f converge en x». Si f n'est pas définie en x, on note $f(x)\uparrow$ et on lit «f diverge en x».*

Définition 2. *Soit f et g deux fonctions partielles de E dans F. On dit que ces fonctions sont égales si, pour chaque x de E, soit elle convergent toutes les deux en x vers la même valeur, soit elles divergent toutes les deux. On note $f = g$.*

Définition 3. *Soit M une machine d'un modèle $\mathcal{M}$ sur un alphabet A. À cette machine on associe une fonction $f_M : (A^*)^m \longrightarrow (A^*)^n$, où m est le nombre de mots d'entrée, et n est le nombre de mots formant le résultat.*

Pour certaines entrées, il se peut que cette machine M ne s'arrête pas ou s'arrête dans un état rejettant, auquel cas f_M n'est pas définie sur ces entrées (en d'autres termes, f_M diverge sur ces entrées). La fonction f_M est donc en général une fonction partielle sur $(A^*)^m$.

Définition 4. *Soit $\mathcal{M}$ un modèle opérant sur l'alphabet A. Une fonction partielle $f : (A^*)^m \longrightarrow (A^*)^n$ est dite calculable dans le modèle $\mathcal{M}$ s'il existe une machine $M \in \mathcal{M}$ telle que $f = f_M$.*

Exercice 1. La fonction partielle $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ définie par $f(n) = n - 1$ si $n \geqslant 1$ et $f(0)\uparrow$ est-elle calculable dans le modèle des machines de Turing binaires ?

Définition 5. *Soit M et M' deux machines opérant sur le même alphabet A. On dira que M' simule M si $f_M = f_{M'}$.*

Définition 6. *Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ deux modèles de calcul sur l'alphabet A. On dira que $\mathcal{M}'$ simule $\mathcal{M}$ si :*

$$\forall M \in \mathcal{M}, \exists M' \in \mathcal{M}' \text{ tel que } M' \text{ simule } M.$$

Exercice 2. Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ deux modèles de calcul sur l'alphabet A tels que $\mathcal{M}'$ simule $\mathcal{M}$.

1. Soit $M \in \mathcal{M}$. La fonction f_M est-elle calculable dans le modèle $\mathcal{M}'$?

2. Soit $M' \in \mathcal{M}'$. La fonction $f_{M'}$ est-elle calculable dans le modèle $\mathcal{M}$?

Langages et machines de Turing

Exercice 3.

1. Soit A un alphabet à $k > 0$ symboles. Montrer que le nombre de machines de Turing opérant sur A est dénombrable.

2. En déduire qu'il existe des langages sur A qui ne sont acceptés par aucune machine de Turing, c'est-à-dire des langages qui ne sont dans pas RE (ensemble des langages récursivement énumérables).

3. Donner un exemple d'un tel langage (vu en cours).

Exercice 4. Soit $\mathcal{L}$ un langage sur un alphabet A. On note $\bar{\mathcal{L}} = A^* \setminus \mathcal{L}$. Montrer que si $\mathcal{L}$ est dans R (ensemble des langages récursifs, c'est-à-dire décidable par une machine de Turing) alors $\bar{\mathcal{L}}$ est aussi dans R.

Exercice 5. Soit $\mathcal{L}$ un langage de RE tel que $\bar{\mathcal{L}}$ (complémentaire de $\mathcal{L}$) soit aussi dans RE. Notons M et $\bar{M}$ des machines de Turing acceptant respectivement $\mathcal{L}$ et $\bar{\mathcal{L}}$.

1. Montrer que l'on peut construire une machine de Turing M' qui décide $\mathcal{L}$. Attention : ne pas chercher à donner la table de transition, mais donner seulement les principes de fonctionnement de la machine.

2. En déduire que $\mathcal{L}$ et $\bar{\mathcal{L}}$ sont tous deux dans R.

Calculabilité et décidabilité

Exercice 6. On suppose que les entiers sont réprésentés par des mots de $A = \{0, 1\}^*$, de sorte qu'un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ s'identifie à un langage sur A.

1. Soit f une fonction totale (une application) de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

   (a) On suppose que f est calculable dans le modèle Turing (voir définitions **??** et **??**). On note le graphe de f par :
   $$\mathcal{L} = \{(n, f(n)) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$
   Montrer que $\mathcal{L}$ est décidable.

   (b) On suppose que l'ensemble $\mathcal{L}$ ci-dessus est décidable. Montrer que f est calculable dans le modèle Turing.

2. Soit f une fonction partielle de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

   (a) On suppose que f est calculable dans le modèle Turing (Attention : il se peut que la machine M qui calcule f ne s'arrête pas pour certaines entrées). On note cette fois
   $$\mathcal{L} = \{(n, f(n)) \mid n \in \mathbb{N} \text{ et } f(n)\downarrow\}.$$
   Montrer qu'il existe une machine de Turing qui reconnaît $\mathcal{L}$.

   (b) On suppose qu'il existe une machine de Turing qui reconnaît l'ensemble $\mathcal{L}$ ci-dessus. Montrer que f est calculable dans le modèle Turing.