Université de Limoges
Faculté des Sciences et Techniques

Année universitaire 2015-2016

Master 1 Informatique et Mathématiques

Complexité et calculabilité - Feuille d'exercices n°1

Langages et dénombrabilité

Exercice 1. Soit $A = \{a, b, \ldots\}$ un alphabet. On note $\cdot$ l'opérateur de concaténation des mots. Si E_1 et E_2 sont deux ensembles de mots, on note $E_1 \cdot E_2$, l'ensemble des mots de la forme $m_1 \cdot m_2$, avec $m_i \in E_i$, (pour $i \in \{1, 2\}$). Si $n \in \mathbb{N}_{>0}$, on note $a^n = a \cdot a \cdot \cdots \cdot a$ (n occurrences de a). Par convention, a^0 est le mot vide, noté ε. On note a^* l'ensemble des mots de la forme a^n, pour $n \in \mathbb{N}$, de sorte qu'il est facile de vérifier que $a^* = \{a\}^*$. De façon plus générale, si m est un mot, $m^n = m \cdot m \cdot \cdots \cdot m$ est le mot composé de la concaténation de n copies de m.

1. Montrer que $a^* \cdot b^* \neq (ab)^*$.
2. Montrer que $\{a, b\}^* \neq (ab)^*$.
3. Montrer que $a^* \cdot b^* \subsetneq \{a, b\}^*$.

Exercice 2. Soit M un sous-ensemble de $\mathbb{N}$. Montrer que M est dénombrable.

Exercice 3. Soit f une surjection de $\mathbb{N}$ vers un ensemble A. Montrer qu'il existe une injection de A dans $\mathbb{N}$. En déduire que si A est infini, il existe une bijection entre A et $\mathbb{N}$.

Exercice 4. Soit A un alphabet. L'ensemble A^* est-il dénombrable ? L'ensemble des langages fondés sur A est-il dénombrable ?

Exercice 5.

1. On souhaite montrer que l'ensemble $\mathcal{B}$ des suites binaires infinies n'est pas dénombrable. Si l'on suppose que $\mathcal{B}$ est dénombrable, comment peut-on, par un procédé diagonal, construire une suite binaire qui n'appartient pas à $\mathcal{B}$ et engendrer ainsi une contradiction ?
2. En déduire que l'ensemble des parties d'un ensemble infini dénombrable n'est pas dénombrable.

Machines de Turing

Exercice 6. Une machine de Turing binaire est une machine de Turing sur l'alphabet $\{0, 1\}$. Soit $n \in \mathbb{N}_{>0}$ et $n = \sum_{i=1}^{k} b_i 2^i$ (avec $b_k \neq 0$) sa décomposition en base 2. On représente n sur la bande de la machine par la suite des bits $b_0, b_1, \cdots, b_k$, écrits de gauche à droite.
Par exemple $11 = 1 + 2 + 8 = 1 \times 2^0 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^3$ sera noté 1101.

1. Construire une machine de Turing binaire réalisant la multiplication par 2 d'un entier non nul. Comment traiter le cas de zéro ?
2. Construire une machine calculant le reste et le quotient de la division d'un entier n par 2. On peut supposer $n > 1$.

Exercice 7. Écrire une machine de Turing binaire à une bande permettant de dupliquer le mot d'entrée. La copie sera séparée du mot d'entrée un espace.

Exercice 8. [Examen 2012] Soit $A = \{a, b\}$ un alphabet et $\mathcal{L} = \{a^n \cdot b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ le langage des mots formés d'un nombre n de "a" suivis d'un nombre n de "b". Donner la table de transitions d'une machine de Turing à une bande qui termine dans un état acceptant si le mot d'entrée est dans $\mathcal{L}$ et dans un état rejetant sinon (on dit que cette machine *décide* le langage $\mathcal{L}$). La tête sera initialement positionnée sur le symbole le plus à gauche du mot si le mot est non vide et sur le symbole $\square$ si le mot est vide (cas $n = 0$). Indications: si $n > 0$, $a^n b^n = a(a^{n-1}b^{n-1})b$. On s'autorise à modifier le mot d'entrée.

Machines à registres

Exercice 9. Soit $m \in \mathbb{N}$, construire une machine à registres contenant m dans R_1 au début de l'exécution et retournant 0 quelque soit la valeur de m.

Exercice 10. Supposons que $m > n$ soient deux entiers positifs. Construire une machine à registres calculant $m - n$.

Exercice 11. Soient m et $n \in \mathbb{N}$. Construire une machine à registres contenant m dans R_1 et n dans R_2 au début de l'exécution et qui contient n dans R_1 et m dans R_2 à la fin de l'exécution.

Exercice 12. Proposer une machine à registres permettant de calculer le reste et le quotient de la division d'un entier n par 2.

Exercice 13. Décrire une machine à registres permettant de calculer le produit de deux entiers naturels.