Mémoire et objectivité en mathématiques

Giuseppe Longo
LIENS (CNRS) et Dept. de Mathématiques et Informatique
École Normale Supérieure
45, Rue d'Ulm, 75005 Paris
http://www.di.ens.fr/users/longo e-mail: longo@dmi.ens.fr

Les mathématiques sont à la fois langage et géométrie ; plus précisément, c'est une pratique extrêmement raffinée du langage et de la reconstruction de l'espace qui, si elle est unique dans sa généralité et son objectivité, n'est qu'une partie de notre effort pour rendre intelligible le monde. L'étude de cette forme spécifique de savoir est liée à celle des processus cognitifs généraux, et peut aider à les comprendre par la simplicité et la profondeur de beaucoup de ses méthodes et de ses concepts. Nous n'examinerons ici que certains aspects des rapports entre mathématiques et mémoire, car la construction de l'objectivité mathématique est un enjeu très vaste qui implique dans son entièreté notre présence d'êtres vivant dans le monde et dans l'histoire[1].

I. Mémoire historique

La mathématique est une discipline en perpétuelle reconstruction. Les mathématiciens ne voient pourtant qu'un instantané de l'état de leur art au moment où ils travaillent, et progressent dans un mouvement où la mémoire historique du processus d'acquisition scientifique se perd à chaque génération. Malgré le travail des nombreux historiens des mathématiques, les praticiens de la mathématique ne perçoivent jamais que les théories dans leur état actuel : avec le temps, les lemmes sont purifiés, les théories redéfinies et profondément révisées, dans une généralisation et une unification croissantes. Souvent, des théorèmes profonds et difficiles du siècle précédent sont expédiés en quelques lignes, car leurs anciennes méthodes de preuves ont pu ouvrir des champs radicalement nouveaux, suggéré des théories nouvelles où des axiomes plus généraux et des propriétés structurales clefs intègrent les théorèmes initiaux dans des cadres plus puissants, beaucoup plus commodes pour la déduction et la compréhension. Ainsi, la mémoire historique des difficultés et des résultats précédents est absente de presque toutes les présentations des mathématiques. Un mathématicien, lorsqu'il n'est pas historien professionnel,

---

[1] Conférence invitée, Colloque **Le réel en mathématiques**, Cérisy, Septembre 1999, actes à paraître (P. Cartier, N. Charraud eds). Une version préliminaire de cet article, en anglais, a paru dans la **Revue de l'Association H. Poincaré**, vol. 2, 1995. Traduit de l'anglais par G. Chatenay.

ne peut souvent même pas lire les démonstrations des résultats principaux de son propre champ d'intérêt telles qu'elles ont été écrites quelques décennies plus tôt, notamment parce que les notations sont continuellement redéfinies et réinventées. Les avantages techniques de cette pratique sont immenses. Mais son rôle trompeur est à la mesure de ceux-ci, sur la question des fondements du savoir mathématique.

Federico Enriques est l'un des rares mathématiciens qui essaya de combler cette lacune et fit de nombreuses références à l'histoire mouvante des mathématiques. Dans son œuvre philosophique, il souligne le rôle de l'acquisition historique des résultats (leur "conceptualisation progressive") comme clef de la question des fondements des théories mathématiques et du développement de nouvelles directions de recherches[2]. La compréhension des mathématiques comme partie du savoir humain et historique, et non comme discipline isolée en vase clos, devrait inviter à accorder une plus grande attention à la mémoire historique.

II. La mémoire individuelle : formes, idées, constructions

Formes et idées

Le manque de mémoire historique correspond aux pratiques dominantes dans les mathématiques comme aux approches "intemporelles" du problème des fondements, que les entités mathématiques soient considérées en tant que "purs jeux de signes" (formels) ou comme une "réalité absolue" (platonicienne). Les deux écoles fondationnelles plus importantes en mathématiques, l'école formaliste et l'école platonicienne, ne donnent actuellement aucun rôle à la mémoire historique ou individuelle. Les formalistes font référence à des "laboratoires" parfaits de symboles sans signification dont la nature cristalline, intemporelle, défie toute dynamique, en particulier celle d'un quelconque passé mémorisé. De même, la réalité objective d'entités mathématiques absolues, dans la compréhension "réaliste" ou platonicienne prédominante des mathématiques, n'a rien à faire de la construction dynamique, historique ou psychologique de la mémoire humaine, qui n'est habituellement jamais mentionnée.

La mémoire joue pourtant un rôle crucial dans une description classique de la perspective platonicienne en mathématiques, les écrits de Saint Augustin sur la mémoire. Pour Saint Augustin, les nombres et les lignes existent dans notre esprit (*anima*) indépendamment du langage et des dessins, par la vertu de la mémoire que Dieu nous a donnée :

> "Les océans, les montagnes, les rivières n'entrent pas en moi par la vue, seules leurs images (…) sont préservées dans ma mémoire". Il en est différemment pour les connaissances scientifiques, car "je ne me souviens pas de leurs images, mais du savoir lui-même"[3]. (...) "La mémoire renferme aussi les rapports, les lois

[2] *Cf.* Enriques [1909] et Enriques [1958].
[3] Saint Augustin [401], livre X, VIII-IX.

innombrables des nombres et des mesures. Rien de tout cela n'a été imprimé en nous par les sens corporels, car ces notions ne sont ni colorées, ni sonores, ni odorantes, ni sapides, ni tangibles. J'ai entendu les sons des mots par lesquels les nombres sont signifiés (…) mais les sons sont d'une autre nature que les choses (…), les choses elles-mêmes ne sont ni du grec ni du latin"[4]. (…)

"J'ai vu des lignes tracées par des architectes, aussi déliées qu'un fil d'araignée. Mais les lignes mathématiques ne sont nullement l'image de celles que m'a fait connaître mon œil charnel. Chacun les reconnaît en lui-même, (…) où elles ont une existence absolue (*valde sunt*). (…) Toi aussi, mon Dieu, Tu habites dans ma mémoire (*Tu habitas certe in ea [memoria]*), (…) puisque je te trouve en elle, dans mon souvenir"[5].

Intuition et mémoire

Descartes donne à la mémoire un rôle différent et plus constructif. Le savoir mathématique s'acquiert par deux différentes "actions de l'esprit (…), l'intuition et la déduction. Par intuition, j'entends (…) la conception d'un esprit pur et attentif, conception si facile et si distincte qu'aucun doute ne reste sur ce que nous comprenons. Ainsi chacun peut voir par intuition (*animo potest intuire*) qu'il existe, qu'il pense (*cogitare*), que le triangle est défini par trois lignes seulement, la sphère par une seule surface, et des choses de ce genre (…). À l'intuition, j'ajoute une autre forme de connaissance, basée sur la déduction (…). [Celle-ci nous donne] des vérités (…) bien qu'elles ne soient pas elles-mêmes évidentes, pourvu seulement qu'elles soient déduites à partir de principes vrais et connus, par un mouvement continu et ininterrompu de la pensée, qui est une intuition claire de chaque pas individuel (*singula*). De cette façon, nous savons que le dernier anneau d'une longue chaîne est relié au premier, même si nous n'embrassons pas d'un seul et même coup d'œil tous les intermédiaires dont dépend ce lien, pourvu que nous ayons parcouru ceux-ci successivement (*successive*), et que nous nous souvenions que du premier au dernier chacun tient à ceux qui lui sont proches. La déduction certaine se base donc sur un mouvement ou une succession (…) et elle reçoit sa certitude de la

---

[4] Saint Augustin, [401], livre XII.

[5] Saint Augustin, [401], livre XII, XXIV-XXV. Traduction établie à partir du texte italien comparé au texte latin. Voici le texte français de l'édition de la Pléïade : "Ces montagnes, ces fleuves, ces astres (que j'ai vus), cet Océan (à l'existence duquel je crois) (…), en les voyant, je ne les ai pas absorbés ; ce ne sont pas eux qui sont en moi [dans ma mémoire] tels quels, mais seulement leurs images " [Livre X, VII, p. 990]. Et de même, pour les connaissances scientifiques, bien que "je ne me souviens pas de leurs images, mais du savoir lui-même" [Livre X, VIII-IX] . "La mémoire renferme aussi les rapports et les lois innombrables des nombres et des mesures. Rien de cela n'a été imprimé en nous par les sens corporels : là, aucune couleur, ni sonorité, ni odeur, ni saveur, ni impression tactile. Quand on parle, j'entends bien le son des mots qui les désignent ; mais autres sont les sons, autres sont ces notions. Les mots ont des sons différents en grec et en latin ; mais les notions, elles, n'appartiennent ni au grec, ni au latin, ni à quelque autre langue" ... "J'ai vu des lignes, tracées par des ciseleurs, d'une finesse extrême, tels des fils d'araignée. Mais rien à voir avec les notions de lignes, qui, elles, ne sont pas des images des lignes transmises par mes yeux. Ces notions, tout homme les connaît, qui les reconnaît en lui, sans avoir à penser à un objet réel quelconque." [XII, p. 994] "[Et] je n'ai rien trouvé de toi, [Seigneur,] qui ne fût dans mon souvenir, du jour où je te connus,(…) tu demeures dans ma mémoire" [XXIV, p. 1005].

mémoire."[6] Les déductions mathématiques pas à pas reposent donc sur la mémoire, sur le souvenir de la correction de chaque pas intuitif.

Au début de notre siècle, l'un des pères fondateurs de la logique mathématique, E. J. Brouwer, fait à nouveau référence à la mémoire comme lieu des constructions mentales en mathématiques. Son travail a établi les bases du constructivisme actuel, largement représenté par l'école intuitionniste dans ses différentes branches.

Brouwer donne à la mémoire une part dans l'acte par lequel nous produisons des mathématiques. Par ce biais, chez Brouwer, la mémoire joue un rôle clef dans l'approche du problème des fondements des mathématiques. Selon Brouwer, les mathématiques sont "une construction mentale, essentiellement indépendante du langage (…). Les constructions non langagières [des mathématiques] sont exactes et correctes, du fait seul de leur présence dans la mémoire". Toutefois, le besoin de communiquer nous force à gâcher la perfection de l'intuition mathématique par l'usage de notations symboliques et par leur mémorisation, qui sont nécessairement incomplètes et imparfaites : "la puissance de la mémoire humaine (…) qui doit vérifier ces constructions, même quand elle fait appel à l'assistance de signes linguistiques, est de par nature limitée et faillible. Pour un esprit humain doté d'une mémoire illimitée, une pure mathématique, pratiquée dans la solitude et sans faire usage de signes linguistiques, serait exacte"[7]. C'est pourquoi, pour atteindre des "vérités inébranlables"[8] on doit poser la mémoire du mathématicien comme parfaite et illimitée.

Ce faisant, Brouwer, bien que par des chemins différents, arrive à une conclusion essentiellement identique à celle de la majorité formaliste ou platonicienne : la recherche d'une certitude mathématique absolue ou complète comme *non-humaine*. Les formalistes font référence à des déductions mécaniques, ou même à des appareils extérieurs à l'être humain, comme les machines de Turing. Les platoniciens font appel à des ontologies indépendantes. Brouwer imagine des mémoires sans limites : la mathématique n'est exacte que comme limite (externe) de l'humanité. Dans tous les cas, la rationalité humaine, à laquelle les constructions mathématiques appartiennent, ne serait parfaite que si elle était extérieure à l'homme.

III. Temps et processus

Le temps comme mémoire

Dans les *Confessions*, encore, Saint Augustin donne une très belle explication de la façon dont le temps trouve sa mesure dans la mémoire. La compréhension du temps ne peut se déduire de celle du mouvement, comme l'affirmait Aristote[9], car, "quand un corps se meut,

[6] Descartes [1619-1664], règle III.
[7] Brouwer [1948], voir aussi van Dalen [1991].
[8] Brouwer [1923], *in* van Heijenoort [1967].
[9] Duhem [1913].

c'est par le temps que je mesure la durée de ce mouvement"[10]. Le temps et l'univers sont créés par Dieu, mais indépendamment l'un de l'autre[11].

Et, plus loin, un passage fondamental : "Il y a dans l'âme trois modalités du temps, et je ne les trouve pas ailleurs. Le présent du passé, c'est la mémoire ; le présent du présent, c'est la vision directe ; le présent du futur, c'est l'attente"[12]. Le passé, donc, est (dans) notre mémoire ; de plus, "C'est en toi, mon esprit, [dans ma mémoire], que je mesure les temps." En fait, Dieu, les mathématiques et le temps (ou leur connaissance) se trouvent dans la mémoire : "[En prononçant les syllabes d'un vers], j'annonce leur durée. (…) Pour autant qu'une sensation est évidente, je mesure une longue d'après une brève. (…) Qu'est-ce donc que je mesure ? Où est la brève, mon critère de mesure ? Où est la longue, mon objet de mesure ? Toutes les deux ont résonné, se sont envolées, sont passées, elles ne sont plus.(…) Ce ne sont pas elles-mêmes, elles qui ne sont plus, que je mesure, mais c'est quelque chose dans ma mémoire, qui y demeure ancré."[13]

En termes modernes, avec Saint Augustin le temps est "phénoménologiquement" pris en compte : le temps se situe dans l'interaction entre nous et le monde, entre la mémoire subjective et les sons que nous recevons. Puisque la mémoire est une commune expérience humaine, construite aussi dans l'intersubjectivité, le temps est une construction phénoménologique, qui dérive son objectivité par le biais de notre présence active dans le monde, dans une communauté communicante..

En revenant à Brouwer, l'intuition du temps psychologique est aussi au cœur de sa proposition fondationnelle, où le temps est défini comme une séquence discrète de moments. Le temps est "la division d'un moment de la vie en deux choses distinctes, l'une cédant la place à l'autre, mais restant en mémoire"[14]. L'intuition mathématicienne de la suite des nombres entiers repose sur la désintégration subjective et discrète du temps, et nous pourrions dire du temps phénoménal, si Brouwer n'était pas enfermé dans la solitude de son solipsisme.

Hadamard[15] esquisse une image similaire, où cependant la référence à la mémoire n'est qu'implicite. Comme nous l'avons déjà dit, ces points de vue furent à l'origine du constructivisme contemporain en mathématiques : ainsi les constructions pas à pas des mathématiques reposent-elles sur cette perception discrète du temps, où la mémoire du moment passé parcourt son propre déroulement.

Les processus dans les ordinateurs

La perception constructiviste du temps est au cœur de la combinaison entre les développements formalistes et intuitionnistes sur laquelle se fonde la conception moderne de calcul, telle qu'elle fut avancée par Herbrand, Gödel, Turing, Church et Heyting. Cette

[10] Saint Augustin, La Pléiade [1991], Livre XI, XXIV, page 1049.
[11] Saint Augustin, La Pléiade [1991], Livre XI.
[12] Saint Augustin, La Pléiade [1991], Livre XI, XX, pp. 1045-1046.
[13] Saint Augustin, La Pléiade [1991], Livre XI, XXVII, 35, pp. 1052-1053.
[14] Brouwer [1948].
[15] Hadamard [1945].

articulation repose sur la description de systèmes formels pour les mathématiques comme pour les calculs. Ces systèmes formels sont conçus comme des configurations finies de symboles (par exemple des propositions formelles, des machines abstraites et des données), sur lesquelles opèrent l'analyse métamathématique comme les programmes informatiques d'aujourd'hui. Ainsi les théoriciens de l'informatique appréhendent-ils le calcul comme le déroulement d'un processus dans une temporalité discrète (dans le sens de Brouwer), et ils conçoivent la mémoire calculatoire comme des ingénieurs, en termes de configurations finies de bits actualisées dans des "évènements" électroniques survenant dans des circuits. Dès lors, le temps, mesuré par des horloges "objectives" et une mémoire digitale parfaite, n'a plus rien à voir avec la mémoire humaine.

Temps et continu

Deux des plus grands mathématiciens de notre siècle, Federico Enriques et Hermann Weyl, soutiennent une conception très différente de la mémoire. Enriques[16] distingue la perception psychologique du temps, défini comme flux discret, du temps physique, considéré comme continu.

En tant que disciple de Husserl, Weyl adhère à une compréhension phénoménologique du temps comme processus mental, "comme la forme de la conscience pure"[17]. La perception phénoménologique de l'écoulement du temps physique est irréductible, pour Weyl, à la description analytique du continu des nombres réels en mathématiques, puisque l'intuition du passé, du présent et du futur comme continu est radicalement indifférente aux principes de la logique ou à une quelconque formalisation en termes d'ensembles et de points. "Le continu de notre intuition et les constructions conceptuelles des mathématiques appartiennent à des mondes si différents que l'on doit abandonner tout espoir de les faire coïncider. Toutefois, les schémas mathématiques abstraits sont nécessaires pour rendre possible une science exacte des domaines d'objets où la notion de continu intervient"[18]. Différemment de Brouwer, Weyl suggère qu'il y a (au moins) deux différentes acceptions de ce qu'on appelle fonction, toutes deux valables, et qui répondent à des objectifs différents : d'une part les fonctions qui expriment une dépendance au temps, un continu, et d'autre part celles qui s'originent d'opérations arithmétiques, c'est-à-dire de processus effectifs[19]. Ici est sous-entendue une conception plus riche de la mémoire. Les déroulements discret et continu du temps reposent tous deux sur une trace psychologique du passé, une trace essentiellement différente dans les deux cas. Le premier cas fait référence aux moments qui passent comme une succession discrète d'évènements (la "désintégration d'un moment de la vie en deux choses distinctes" de Brouwer) ; la seconde repose sur la trace continue du passé dans la mémoire. Il faut noter de plus que la continuité du temps, pour Weyl, est différente de celle de l'espace, car nous ne pouvons séparer par des moyens analytiques,

---

[16] Enriques [1958]
[17] Weyl [1918] et [1949]
[18] Weyl [1918], II, 6, où il est aussi fait référence à Bergson.
[19] Weyl [1918], I, 8.

comme nous le faisons pour les points dans l'espace, la perception du passé, du présent et du futur. Dans notre interprétation, le temps phénoménal possède une unité, locale, globale, il est organisé dans le phénomène : une mélodie n'est pas une suite de notes, mais la mémoire des notes écoulées mesure la note qui suit et lui donne un sens musical.

Ceci nous évoque la très belle description des trois formes du temps chez Saint Augustin; de plus, comme Saint Augustin, Weyl met en évidence deux différentes expériences phénoménologiques du continu, le temps et l'espace. Le continu analytique des mathématiques, fait de points, peut fournir un "schème abstrait" convenable pour une description de l'espace, mais ne peut rendre compte de la coexistence de l'expérience du passé, du présent et du futur dans le temps phénoménologique, où l'on ne peut isoler des points[20]. Une liaison mathématique possible entre ces deux formes du continu peut se trouver dans la nature "imprédicative" des nombres réels à la Cantor-Dedekind[21].

IV. Du nombre à la preuve

Nombre et signification

À l'âge d'un an et demi, ma fille reçu en cadeau deux petits cochons. Elle déclara immédiatement qu'il en manquait un. Elle ne faisait là aucune soustraction abstraite, mais sa profonde familiarité avec "Les trois petits cochons" lui avait donné une connaissance concrète du nombre trois. Mais, au-delà ou en deçà, cette "connaissance" du deux et du trois est peut-être enracinée dans une mémoire phylogénétique et précède toute expérience active. Dans certaines expériences récentes de neuropsychologie[22], on constate que le rat, le singe et le bébé (de quatre mois et demi!) mettent en place des réactions similaires en présence de deux (ou trois) sons, deux (ou trois) flashes, deux (ou trois) points sur un écran. Deux ou trois objets sont reconnus en tant qu'ils sont deux ou trois, même s'ils bougent, se déforment ou se transforment. L'évolution paraît avoir construit des neurones qui réagissent face au *nombre* d'événements dans l'environnement, indépendamment de leur nature, pourvu qu'ils soient peu nombreux : deux, trois ou quatre[23]. Pour survivre, il faut reconnaître et comparer au moins les petites quantités de nourriture, d'objets ou de points de repère utiles, même en présence de changements "secondaires" : l'appréciation de ces "petits nombres" ne dépend pas de leur présentation et paraît se baser, selon ces neuropsychologues, sur une mémoire phylogénétique (en tant que propre à l'espèce). Quoiqu'il en soit, ontogenèse ou phylogenèse, voilà un embryon de *l'invariance mathématique*, ce qui pourrait être "derrière" l'invariance propre au concept de nombre, un difficile acquis de l'histoire. Les sumériens, par exemple, il y a trois

---

[20] Weyl [1918].
[21] voir Longo [1999].
[22] voir Dehaene [1997], Butterworth [1999].
[23] voir Dehaene [1997] p. 37 ; voir en particulier les nombreuses expériences de R. Thompson décrites dans le livre.

mille ans ou plus, utilisaient des notations numériques qui dépendaient de l'ensemble dénombré, au-delà de trois. Ainsi, ils écrivaient "6" différemment suivant qu'il s'agissait de six vaches ou de six arbres. Dans ces premières notations mathématiques, le concept général de nombre comme invariant n'existe pas encore, ou n'est pas encore séparé de la sémantique. Le parcours est bien long pour que le langage et l'écriture permettent la suite numérique dans sa généralité, itération sans fin, et sa clôture à l'horizon, infini en acte des mathématiques modernes.

Et il semble qu'en fait la signification (la sémantique) n'est *jamais* complètement disjointe des notations numériques dans notre mémoire. Dans une expérience clinique récente, un patient qui avait subi de profondes destructions du cerveau et avait perdu la capacité formelle de reconnaissance des chiffres pouvait néanmoins reconnaître, et en fait lire un nombre s'il pouvait y associer une signification. Ainsi, il ne pouvait lire 1914 qu'après avoir murmuré "ah oui, le début de la première guerre mondiale". Il reconnaissait 75, le code postal de Paris, mais 2364 restait illisible, tout comme 1914+75 [24]. Cette personne avait perdu, avec une partie de sa mémoire, la capacité de lire et de manipuler des nombres "indépendamment du sens", qui est un préalable à l'usage du formalisme mathématique abstrait. Tout se passe comme si des liens mnémoniques et sémantiques opèrent à différents niveaux, la manipulation formelle (la "sémantique opérationnelle" des langages informatiques) étant l'un de ceux-ci, et l'interprétation dans d'autres formes de langages, un autre. Chez l'être humain, et à la différence des ordinateurs, ces niveaux coexistent. Une mémoire non pathologique est le lieu où les configurations, les formes, et les significations possibles peuvent être recomposées. Un fondement solide du savoir mathématique devrait reposer sur une recomposition similaire, en rupture avec la tradition formaliste. Mais le "sens" n'est pas seulement une articulation technique entre syntaxe et structures sémantiques, que ce soit en mathématiques ou dans le savoir en général. Le sens apparaît avec la reconstruction des itinéraires mentaux, où interviennent les contextes historiques et les motivations.

Géométrie

Il semble que nous mémorisions les lignes verticales et horizontales dans les premières semaines de notre vie (quelques neurones réagissent à elles). Nous semblons aussi acquérir des aptitudes précoces à opérer des interpolations, c'est-à-dire une capacité (apparemment spécifique à l'homme) de former une image plane ou spatiale à partir d'un ensemble de points[25].

Pour Poincaré, notre expérience du mouvement tient une part dans notre compréhension de l'espace euclidien[26]. L'économie de la mémoire est-elle la clef de la compréhension des généralisations, et en particulier de la géométrie ? Des expériences différentes sont

---

[24] voir Dehaene [1997], qui donne aussi d'autres exemples.
[25] Ninio [1991].
[26] Poincaré [1905], voir Berthoz [1997] et Longo [1997] pour des réflexions sur ce thème, à partir de Poincaré.

semblablement connectées et stockées. Mélanges ("*mushing*") et séparations pourraient être les procédures de base de cette économie, mais sûrement de différentes façons. En fait, nous mémorisons les images dans de nombreuses localisations cérébrales (jusqu'à 20, suivant les différentes perspectives, couleurs etc.), et leur reconstruction semble suivre les schémas des hologrammes[27]. Ainsi, la localisation, dans le cerveau, va de pair avec des traces partielles et diffuses. Ceci permet un accès à des informations (géométriques) suivant de nombreux chemins différents, chacun pouvant livrer une intuition nouvelle. Ces chemins pourraient être basés sur des indices, puisque la généralisation mnémonique ne se fait pas sans référence à des faits particuliers.

Les constructions mathématiques supposent un pas de plus : nous extrayons des propriétés communes à différentes représentations mentales pour les affiner dans des notations (apparemment) sans signification. Ce processus est particulièrement évident dans le lien unique entre langage et géométrie que l'on nomme géométrie algébrique. Dans cette discipline, avec des signes linguistiques, nous généralisons des propriétés de notre relation avec l'espace extérieur à un degré qui semble n'avoir plus aucun rapport avec notre compréhension originelle du monde. Toutefois, le mathématicien vérifie tous les jours le poids d'une illustration par un dessin informel sur le tableau noir, même quand il s'agit *d'espaces fibrés* dans un *topos* de Grothendieck (une structure qui a très lointainement à voir avec l'espace, *via* les notions de *voisinage*, de *structure* préservant les transformations, de *foncteurs* sur celles-ci, etc.). Plus encore : en gribouillant un faisceau sur un espace topologique, nous donnons un nouveau sens à la variation, même si nous ne pensons faire qu'une métaphore. Nos dessins nous font revenir des abstractions algébriques à notre espace familier, mais, de plus, ils établissent parfois une connexion mentale inédite avec d'autres expériences, dans une représentation qui peut être indépendante de la généralisation initiale — celle qui avait mené au résultat mathématique dont nous nous occupons. La possibilité de ces nouveaux liens tient à la richesse de l'enchevêtrement de notre mouvement de généralisation avec la combinaison de nos différentes expériences du monde, qui est au cœur des processus mnémoniques comme de la mathématisation. Nous opérons des connexions par généralisations et indices, puis de nouveaux liens révèlent des propriétés (ou suggèrent des déductions) à l'intérieur du cadre général, ou modifient nos généralisations mentales elles-mêmes.

Règles et preuves

La structuration dynamique de la mémoire présente des analogies avec le paradigme fondamental de la partie la plus ordonnée du raisonnement humain, la déduction mathématique. On pourrait décrire celle-ci selon trois niveaux, en une approximation grossière du continuum indistinct de nos processus mentaux.

À un premier niveau de la construction de la mémoire, des généralisations incomplètes fonctionnent comme des descriptions d'expériences concrètes. À ce niveau, des paradigmes

[27] Edelman [1992].

généraux sont mélangés avec des règles spécifiques (voir notre cinquième partie). Ces paradigmes engendrent des attentes qui sont confrontées à la réalité, puis ils sont modifiés ou étendus. À ce niveau, il n'y a pas de règles vraiment générales, ni de rigidité, la généralisation n'implique aucune formalisation, même dans un langage ordinaire. Les images, les sensations, les odeurs, etc., en font partie. Nous devons à Freud la mise en valeur du caractère dynamique de ce processus, où des expériences ultérieures reconstruisent continuellement les souvenirs, en les déplaçant, en les modifiant, en les insérant dans de nouveaux contextes. L'" oubli " est l'un des traits fondamentaux de la mémoire humaine : nous oublions ce qui n'est pas pertinent pour ce que nous visons, les détails "inutiles" sont abandonnés. L'oubli est un processus intentionnel, mais qui peut aussi s'effectuer à un niveau préconscient ou inconscient. Il permet de sélectionner, de synthétiser, d'établir des corrélations en fonction d'expériences vécues ou d'un but (implicite).

Le raisonnement scientifique, comme celui de tous les jours, constituent un autre niveau. Le langage et les dessins les supportent, et aident à établir des méthodologies de déduction, qui cependant restent dynamiques. "Une règle est abandonnée si elle produit une inférence que nous ne voulons pas accepter, une inférence est rejetée si elle viole une règle que nous ne voulons pas amender", dit Goodman[28]. Le cercle de Goodman est en fait vertueux, il décrit la dynamique de la formation du savoir, dans le cadre d'une mémoire intentionnelle et dynamique.

Finalement, la théorisation mathématique utilise des paradigmes similaires, seulement elle le fait d'une façon plus stable. Elle le fait d'une façon si stable que beaucoup croient en l'absolu du savoir mathématique, que ce soit comme théorie formelle ou comme mettant en jeu des objets idéaux. Pourtant, l'histoire des mathématiques est elle aussi très dynamique : Lakatos[29] en donne un exposé classique. En vérité, dans sa pratique de tous les jours, le mathématicien fait continuellement usage de cadres logiques changeants : les preuves sont énoncées dans un mélange de langages différents et de systèmes semi-formels, avec la rigueur informelle qui est si typique des bonnes mathématiques. La complète formalisation n'est qu'un rêve déchu de la tradition positiviste qui a imprégné les écoles fondationnelles et l'intelligence artificielle.

V. La mémoire des actes d'expérience et la construction mathématique

Lorsque nous travaillons sur les nombres, les structures géométriques ou les preuves, nous faisons l'épreuve d'une tension permanente entre une compréhension qui repose sur des instances, des indices et des significations spécifiques, et l'exigence d'universalité et d'indépendance de la pure formule et du pur dessin. À propos de ce chemin vers la généralité, revenons sur quelques remarques, et essayons d'aller un peu plus loin, pour examiner plus précisément l'hypothèse selon laquelle l'interaction entre la mémoire des "actes d'expérience"

[28] Goodman [1983].
[29] Lakatos [1976]

(la mémoire procédurale) et la mémoire déclarative pourrait constituer un paradigme de la théorisation mathématique, et inversement.

En neurologie comme en psychologie, beaucoup font une distinction commode entre la mémoire procédurale (principalement préconsciente) et la mémoire déclarative ou propositionnelle (largement consciente)[30]. Prenons-la comme hypothèse. Dans cette orientation, nous utiliserons le terme de "préconscient" pour désigner les expériences antéprédicatives ou prélinguistiques, qu'il faut distinguer et corréler au domaine de l'inconscient humain. En accord partiel avec l'usage freudien en psychanalyse, nous nous référons aux activités préconscientes comme indistinctes des processus inconscients, d'un point de vue descriptif[31], bien qu'elles soient fondamentalement différentes en ce qu'elles, contrairement à l'inconscient, ne sont pas refoulées (ni n'appartiennent nécessairement au domaine des pulsions)[32]. De ce point de vue, il n'y a pas de frontière marquée entre préconscient et inconscient, qui s'entremêlent : les activités préconscientes devraient s'ajouter à l'inconscient humain au sens large, pour former l'ensemble, malgré leurs différences, de ce qui est "avant" le langage, "en deçà" du langage, sous tendant le langage, ou même formé "après" le (ou "à cause" du) langage et toute autre explicitation consciente. Dans cet ensemble, le préconscient précède en général le langage, tandis que l'inconscient freudien est donné surtout après et à cause du langage ; les deux contribuent au sens. D'autre part, si le refoulement, qui est un élément constitutif de l'inconscient, peut se penser comme une forme d'oubli, et si l'oubli quant à lui contient des aspects du refoulement ; ces deux phénomènes essentiels de la mémoire humaine sont toutefois loin de coïncider.

Les mémoires préconscientes, qui nous intéressent le plus ici, sont à la fois phylogénétiques et ontogénétiques, en tant que parties du savoir implicite ; elles peuvent donc se constituer bien avant le langage. Elles contribuent directement au sens, en établissant un lien entre le langage et les expériences de la vie (parmi lesquelles les actions du sujet) ; elles sont "sous" le savoir, et lui sont directement accessibles. Ce qui n'est pas le cas de l'inconscient freudien, qui, s'il est encore plus dynamique, reste largement inaccessible à la conscience, du fait du refoulement. Et même si les "souvenirs" qui participent de l'inconscient peuvent émerger et influencer la signification et l'acte conscient, ils parviennent déformés à la conscience, marqués par la nature chaque fois spécifique du refoulement.

Dans le cadre de cette distinction, c'est surtout la mémoire procédurale (préconsciente), donc, qui nous aide dans nos comportements de la vie de tous les jours. Elle n'est pas basée sur des automatismes triviaux, puisque nous pouvons adapter nos façons de procéder à des circonstances toujours changeantes, sur la base d'une réorganisation de nos expériences antérieures : en un certain sens, la mémoire procédurale est la permanente réorganisation préconsciente et inconsciente de notre espace d'action. Les "bases cognitives" des

---

[30] voir Shank [1982] et Nicolas [1993].
[31] Laplanche et Pontalis [1967].
[32] Freud [1932].

généralisations conscientes, y compris celles des mathématiques, pourraient être inhérentes à la construction de la mémoire procédurale. Sa nature et ses bases matérielles sont en fait au cœur de l'évolution humaine.

L'économie de l'espace de la mémoire, corrélé à l'oubli, pourrait être orientée par, d'une part, le besoin "physiologique" de réorganisation et de "généralisation", en tant que stockage de ce qui est "essentiel", des expériences enregistrées ; et, d'autre part, par la motivation psychologique qui éprouve la nécessité de mettre à distance ou de cacher des détails déplaisants ou "inutiles". Cette mémoire est une mémoire des "actes d'expérience", de notre vécu dans le monde, avant toute explicitation langagière : elle s'enracine sur nos gestes, nos mouvements et leur organisation élémentaire.

Considérons un exemple, qui reprend une idée exposée ailleurs[33], et qui se base sur des analyses neurophysiologiques[34]. Nous *précédons* la proie ou l'objet que nous voulons suivre ou saisir par des saccades oculaires. Les saccades nous indiquent même le parcours à suivre : la courbe de poursuite est tracée à l'avance par nos yeux. On ne regarde pas où l'on va, mais on va où l'on regarde[35] : cet acte de "précéder par le regard" est un geste crucial pour l'animal qui est en nous. Ces gestes, par leur pluralité et leur variété, forment une présence "abstraite" dans notre mémoire : la trajectoire prévue n'est pas concrète, elle n'est pas là, ce n'est pas une ligne dessinée par l'architecte ou sa mémoire, comme dirait Saint Augustin. Elle est sans épaisseur, unidimensionnelle, car seule compte sa direction. Elle est une expérience préconsciente de ce que sera notre ligne mathématique. Elle est même, pourrait-on dire, l'embryon préhumain de l'abstraction géométrique humaine, elle permet et donne sens à la construction mathématique, en tant qu'origine cognitive de ces lignes que nous savons concevoir sans épaisseur, ces courbes parfaitement lisses et optimales, pures directions, car elles sont de pures trajectoires. En fait, elles sont le souvenir de ces trajectoires en tant que prévision du mouvement. La constitution active de ces lignes et leur souvenir, même préconscients, sont abstraits, en tant qu'elles sont lointaines de tout objet concret ; elles demandent notre présence active, on les construit exactement dans l'interface entre nous et le monde, aucun objet ne leur correspond dans le monde, aucun fil de toile d'araignée.

Au faîte de ces processus, la généralisation préconsciente peut être conçue comme un processus intentionnel d'isolation de la structure commune de différentes expériences. Seuls restent les indices qui comptent, à l'aide de l'oubli intentionnel non-conscient : ils sont les clefs de voûte préconceptuelles de l'architecture du concept. Dans l'exemple précédent, ils permettent de *constituer* et de *donner sens* au concept très difficile de ligne unidimensionnelle, de ligne mathématique. Mais, bien évidemment, c'est dans le langage et dans la construction intersubjective de l'objectivité mathématique, par le partage explicite des expériences (mentales), que le "concept" de ligne unidimensionnel devient possible. Le parcours préconscient décrit

[33] Longo [1997].
[34] voir Berthoz [1997].
[35] voir Berthoz [1997], p. 201.

n'est qu'un segment initial de ce parcours, il est *derrière* la constitution du sens, en tant que composante originaire de la signification des mots.

En fait, à côté de ces expériences actives, quoique implicites, la généralisation explicite est la base de la construction théorique mathématique, et l'économie intentionnelle, consciente, sous-tend souvent les généralisations mathématiques. De plus, dans les mathématiques, comme dans les processus mnémoniques, apercevoir les similarités est l'essence même de la généralisation. Dans la mémoire procédurale, un paradigme est affiné à partir des similarités de nombreuses situations différentes. Le sujet doit apprendre comment se comporter dans un monde changeant, il doit reconnaître des invariants dans l'environnement, donner une unité et une stabilité aux objets, indépendamment de la perspective, de la distance, des changements de couleur, etc… En d'autres termes, la mémoire procédurale de base est au cœur des premières étapes de notre intelligence animale, bien avant que la mémoire propositionnelle consciente ne soit établie. Mais la recherche de similarités et de stabilités est aussi ce qui oriente le travail du mathématicien lorsqu'il isole des invariants mathématiques — et l'identification de ces invariants est la méthode clef de la mise en relation ou de l'unification des structures comme de la spécification de résultats généraux.

L'idée est de considérer les mathématiques comme un lien cognitif, l'un des plus pertinents des liens cognitifs entre la mémoire déclarative ou propositionnelle et la mémoire procédurale. Et ceci depuis les pratiques les plus élémentaires de comptage et d'itération, que nous partageons avec les animaux ou les jeunes enfants[36], jusqu'aux expériences phénoménologiques du continu et leurs descriptions mathématiques[37]. Dans cette perspective, une preuve des propriétés structurales des nombres et du continu, par exemple, correspondrait à une reconstruction ou une extension logique ou propositionnelle, et non à la "révélation" d'une réalité existante, comme dans la philosophie platonicienne des mathématiques (de Saint Augustin à Gödel et Thom)[38]. Ou plutôt, la preuve explicite et développe dans le langage conscient un *insight* sur les structures (implicites) de la mémoire. Ce regard fait advenir à la conscience des invariants construits par notre (largement préconsciente) capacité d'agir, de généraliser et d'unifier, selon les chemins de la mémoire procédurale : nous "voyons" ces lignes sans épaisseur, mémoire active de trajectoires prévues. Par le langage et la logique, nous déployons, souvent très au-delà de ses limites, l'*insight* originel. Mais cet *insight* reste en filigrane des constructions conscientes, leur donne sens, oriente les conjectures, sous-tend cette habilité à "voir" qui est au centre de la pratique mathématique.

Ces paradigmes orientent sans doute les premiers stades de notre expérience mathématique (nombres, images géométriques de base), comme le travail mathématique de pointe. La notion générale de nombre unifie les souvenirs des expériences phylogénétiques, et, de plus, elle se

---

[36] voir la partie IV.
[37] Longo [1999].
[38] Gödel [1944] ; Thom [1990].

réfère à l'itération, soit une procédure décrite dans le langage. Les différentes expériences pratiques conduisent l'une après l'autre au concept abstrait. L'écriture, en particulier, ajoute à la stabilité et amplifie le processus de généralisation en apportant l'expérience d'une pluralité de notations : élément constitutif de l'indépendance de toute notation du concept de nombre (voir le texte de Saint Augustin, cité en II). Le dénombrement abstrait peut ensuite s'étendre aux limites et notre exigence de continuité (nous détestons les lacunes et les sauts) remplit les vides entre nombres réels, comme nous le faisons dans l'interpolation (un arc vient compléter un cercle inachevé, une arête une figure irrégulière). D'autres structures géométriques élémentaires viennent récapituler les invariants et les symétries que nous rencontrons dans le monde, et peuvent ensuite être développées dans les mathématiques générales[39]. Notre faculté de nous concentrer sur certaines propriétés communes, certaines régularités du monde, certains objets stables (en négligeant les autres) s'acquiert d'abord au niveau préconscient et inconscient de la (re)construction en acte de stabilités, de régularités, etc. dans un monde *a priori* indistinct.

Lorsque des constructions et propositions linguistiques explicites interviennent, les généralisations algébriques peuvent prendre le relais et mener, par exemple, jusqu'à la théorie analytique des nombres, ou la théorie des catégories. Mais, même dans ces domaines avancés, la pratique, à travers schémas et indices, repose sur des allers et retours entre propositions pleinement conscientes et *insights* originaux dans les structures continuellement mises à jour de la mémoire. L'“ intuition ” du mathématicien est loin d'être stable et "pure" : elle croît avec l'expérience et se forme en elle, dans un travail intense. Le jeu entre préconscient, inconscient et conscient où elle se constitue infiltre et revivifie en permanence les mathématiques. Les activités primaires préconscientes, partagées par tous les humains (et sans doute certains animaux) ne sont que les briques de base sur lesquelles s'édifie la cathédrale des mathématiciens, avec ses passages secrets vers les profondeurs, pour la plupart ignorés par la conscience.

Wittgenstein avait déjà laissé entrevoir une analogie entre la scène primitive freudienne et la "vision" du mathématicien, entre le déchiffrage psychanalytique d'une mémoire confuse et isolée et le déroulement irrésistible d'une preuve mathématique[40]. Dans notre perspective, le mode linguistique et formel d'exposition des propositions mathématiques serait une reconstruction *a posteriori,* sur un mode déclaratif et essentiellement déductif, d'une interaction originelle entre des généralisations conscientes et préconscientes d'allures procédurales. Cette reconstruction serait analogue à notre propre déchiffrage des *insights* sur les structures de notre mémoire procédurale.

Dans ces divers sens, les constructions mathématiques trouvent leur assise dans la mémoire. La mémoire est le lieu où les premiers invariants sont (re)construits et les analogies deviennent possibles. Elle permet l'interaction entre le savoir explicite, propositionnel, et les procédures préconscientes. De plus, et cela est un autre lien, très important, la nature *normative* des mathématiques semble correspondre aux procédures comme normes comportementales : la

---

[39] Weyl [1952].
[40] Wittgenstein [1980], Voltolini [1985].

mémoire procédurale sélectionne et mobilise certaines normes en vue de l'action, et ce fonctionnement pourrait être paradigmatique de celui des règles en mathématiques. Bien sûr, tout cela n'est possible que parce que la mémoire humaine n'a rien à voir avec les mémoires digitales bit par bit et leur fonctionnement parfait, sans faille et sans oubli, totalement passif. Comme nous le disions, l'oubli intentionnel, par lequel s'opère une sélection largement préconsciente et inconsciente *des* actes *dans* l'acte vécu, est au cœur de la mémoire humaine. Et il est donc au cœur de la constitution de l'objet mathématique, en tant qu'invariant conceptuel, et de la preuve mathématique, en tant que normative.

En plus des analyses logico-mathématiques, qui restent essentielles pour assurer la cohérence des structures relationnelles explicitées dans le langage, l'analyse des fondements des mathématiques doit donc s'enrichir des approches cognitives concernant la constitution des concepts et des normes, que nous essayons d'esquisser ici.

VI. Intuition et signification

L'intuition comme reconstruction de la mémoire

Concernant la tentative hilbertienne de fondement formaliste des mathématiques, il faut reconnaître que, selon les termes de Hermann Weyl, "l'audacieuse entreprise de Hilbert peut revendiquer un mérite : elle nous a révélé la structure extrêmement complexe et délicate des mathématiques, son labyrinthe de connections rétrogrades (*back connections*) qui se résument en propositions circulaires qu'elle ne peut réduire, même lorsque à première vue celles-ci ne se devraient pas conduire à une contradiction flagrante… Mais quel est son fondement cognitif, si l'on pense, comme il est admis, que les formules n'ont aucune signification par laquelle elles pourraient exprimer une vérité intuitive ?"[41].

Attirons l'attention sur la "structure délicate des mathématiques, son labyrinthe de connections rétrogrades", pour souligner son analogie avec la formation de la mémoire. De ce point de vue, la reconstruction de la mémoire peut être considérée comme un moment crucial de l'intuition mathématique. Le labyrinthe des structures linguistiques et géométriques est soudainement traversé d'une voie lumineuse qui jette des ponts inattendus, établit des liens originaux. C'est ce que nous appelions, avec d'autres, dont par exemple Weyl, un "*insight*". Nous "voyons" les invariants mathématiques, comme les structures mathématiques : nous voyons la ligne mathématique sans épaisseur, mémoire réifiée d'une prévision du mouvement dont nous parlions; mémoire qui se spécifie ultérieurement dans le langage, en particulier grâce à la comparaison avec les expériences d'autrui.

Mais ce n'est pas une vision passive : à nouveau, c'est aussi une (re)construction qui procède par interpolations, institutions de liens, constructions de ponts conceptuels et analogies,

[41] Weyl [1949].

et qui se déploie sur et grâce à la mémoire. *L'insight mathématique est un regard actif, qui (re)construit.*

Nulle magie ici : comme nous le suggérions, il ne s'agit que du fonctionnement de l'intelligence humaine, qui est, par définition, la rationalité même. La question des fondements des mathématiques requiert son analyse : la démonstration formaliste de l'absence de contradiction (de la cohérence des cadres formels) est nécessaire, comme le dit Weyl, mais nous devons aussi donner les raisons des constructions mathématiques, nous devons analyser leur signification aussi bien que les chemins cognitifs qui y mènent (leur "comment").

Un long travail sera peut-être nécessaire avant que ne viennent à la lumière d'une compréhension élargie mais claire de la rationalité les processus de fond à l'œuvre dans le savoir mathématique. Il y faudra une large recherche interdisciplinaire, bien au-delà des tentatives de réduction du raisonnement (mathématique) à des automates finis ou à des ordinateurs, qui sont des machines plutôt irrationnelles et limitées. Un point clef, auquel nous avons fait allusion, en est l'analyse de la relation entre le travail mathématique effectif et les systématisations incomplètes *a posteriori*. Sur ces bases, la compréhension ne réside pas dans une déductibilité logico-formelle, qui réorganise le discours après coup, mais relève d'une contiguïté "mentale", une proximité des signifiants dans le langage, ou peut-être même d'une topologie du cerveau, et/ou de transformations dans une aire déjà structurée de la mémoire — c'est-à-dire de réorganisations de celle-ci (voir Thom, lorsqu'il qualifie de "délire" les explications purement logico-formelles, et propose une "géométrie de la signification", en faisant principalement référence au langage[42]). Ainsi, le résultat de la compréhension est la création d'un nouveau haut niveau de structures mentales et mathématiques, où les similarités essentielles et les transformations entre différentes aires sont enregistrées dans un processus dynamique et interactif[43].

Formes stabilisées et calculs

Les mérites des approches formelles sont toutefois immenses. La méthode axiomatique, où des règles de déduction viennent s'ajouter à des axiomes simples, a donné aux mathématiciens de ce siècle une notion bien définie de la rigueur et ouvert la voie à la construction de systèmes formels, et, plus tard, de systèmes de programmation. Frege et Hilbert ont proposé un paradigme de l'idéal de la logique et du formalisme, par lequel les preuves peuvent toujours être vérifiées, même si la formalisation n'est jamais complète. Or, les ordinateurs exigent des langages formalisés, et celles-ci, jusqu'à maintenant, sont largement basés sur le paradigme formaliste.

Un exemple de ce mélange de propositions théoriques et de pertinence pratique peut être mis en avant. La pratique de généralisation mathématique a une contrepartie formelle précise dans la combinaison des règles "d'introduction" et "d'élimination des implications", dans la déduction

[42] Thom [1990].
[43] voir Shank [1982].

naturelle de Gentzen-Prawitz. Étant donnée une déduction, si une flèche (une implication) est introduite, puis éliminée, on obtient une preuve équivalente. Par ce moyen, on décrit formellement la formation de lemmes généraux dont des théorèmes spécifiques sont dérivés comme des cas particuliers (cette opération s'appelle "élimination des coupures"[44]). La possibilité de reconstruire de façon cohérente les preuves par élimination des coupures assure la consistance de cette procédure et décrit une méthode typiquement mathématique par laquelle on affine des connaissances en un lemme général qui peut être enregistrée en mémoire pour des usages ultérieurs (puis on élimine ce lemme de la démonstration). Cette généralisation paradigmatique est au cœur de l'affectation des types, de la déduction automatisée, et de beaucoup d'autres outils et applications utiles en informatique (en particulier en programmation fonctionnelle).

La signification comme mémoire d'ordinateur

Weyl, dans notre citation du début de ce chapitre, critique l'accent totalisant mis par Hilbert sur la démonstration de consistance, car elle est indifférente à la signification des théories formelles et à la question de leur pertinence. Il ne croit pas à une analyse fondationnelle qui réduirait les mathématiques à un jeu abstrait de symboles formels. En fait, dans le vaste champ de recherches (qui a été longtemps le mien) appelé "sémantique dénotationnelle", les langages formels sont solidement ancrés à la signification. Dans cette sémantique, on doit associer les prédicats et les symboles de constantes à des ensembles et des structures. Les variables sont des valeurs qui parcourent des ensembles ou des objets dans des univers structurés. Cette approche a permis une rencontre fructueuse entre les points de vue formalistes et platoniciens, et a indiqué comment définir une notion générale de la signification qui s'applique à toutes les formules d'un système donné. Ainsi, le sens est donné par la traduction de systèmes formels (qui peuvent être inédits) dans une structure mathématique (qui peut être inédite). Les notions et les techniques de la structure sémantique sont parfois d'autant plus riches d'informations qu'elles sont éloignées des systèmes sur lesquels elles interviennent : le sens qu'elles apportent est d'autant plus intéressant que les ponts et les liens qu'elles révèlent (et construisent) sont inattendus.

Sur ces bases, les travaux de D. S. Scott et d'autres ont jeté les bases des développements contemporains dans la sémantique des langages de programmation. Toutefois, une différence cruciale apparaît dans la sémantique actuelle des programmes, dans laquelle la mémoire de l'ordinateur joue un rôle. La sémantique dénotationnelle réfère les signes à des structures externes, essentiellement les objets idéaux de l'approche naïve des mathématiques. Dans la sémantique "concrète" des langages informatiques, on associe les variables à des localisations en mémoire, dans un ordinateur abstrait. Ainsi fonctions et prédicats deviennent-ils des procédures et des types de programmes, et les variables, des adresses d'informations

[44] voir Girard, Lafont, Taylor [1990] (et Asperti et Longo [1991] pour les liens avec les structures mathématiques (catégories)).

enregistrées. C'est un fructueux modèle de l'organisation de la mémoire électronique et de sa formalisation mathématique, mais, bien sûr, cela n'a rien à voir avec la mémoire humaine.

VII. Objectivité

Les possibles connections des constructions mathématiques avec le chemin de la mémoire vers les invariants, les procédures et le savoir explicite, donnent quelques éléments pour un fondement cognitif de l'objectivité et de l'efficacité mathématiques. Les mathématiques ont un contenu objectif et sont efficaces précisément parce qu'elles trouvent leurs racines dans nos relations les plus profondes avec le monde : c'est pour cela qu'elles disent quelque chose sur le monde et peuvent être partagées (elles sont une expérience *inter*subjective) — c'est leur “ objectivité ” — ; et c'est pourquoi elles le disent avec succès — c'est leur “ efficacité ”. Nous construisons les mathématiques dans une interface entre nous et le monde, en commençant par les régularités du monde — au moins les régularités que nous voulons bien voir. Dans un mouvement d'enrichissement de nos connaissances, nous disons quelque chose sur le monde en lui donnant sens et en construisant en même temps notre propre moi, individuel et historique. Et nous le faisons aussi, et largement, par des mathématiques, en tant qu'elles intègrent nos relations primitives avec l'espace et le temps, les dénombrements, les contours géométriques.

Les mathématiques sont remarquablement objectives et efficaces, précisément parce qu'elles ne sont pas isolées dans un vide formaliste ou platonicien, indépendant du sens ou de l'homme[45]. Elles sont bien au contraires liées aux autres formes de savoir, celles d'êtres vivants dotés d'une histoire, elles partagent avec ceux-ci certaines racines cognitives.

Un point ne devrait pas nous égarer : par mémoire, dans cet article, nous entendons aussi l'expérience commune, historique. En mathématiques (au moins), la mémoire "individuelle", au cœur de notre analyse, n'aurait aucun sens sans l'intersubjectivité. Premièrement, comme nous le disions, nous paraissons posséder une mémoire phylogénétique, donc commune, des petites quantités, des petits nombres, ainsi que le soutiennent de nombreux neurophysiologues[46]. Deuxièmement, les mathématiques sont une expérience partagée à l'intérieur de la communauté humaine. L'invariance et la stabilité de ses concepts et méthodes peut être attribuée en partie aux processus subjectifs que nous essayons d'esquisser, en nous fondant sur la mémoire, et en partie à la comparaison avec les (et au partage des) invariants expérimentés par d'autres. Et ces formations de significations interagissent continuellement. Le langage et les dessins donnent les outils qui nous permettent de révéler des structures actualisées dans des expériences individuelles distinctes, d'en expliciter l'invariance dans l'intersubjectivité : l'écriture accroît la stabilisation des concepts, elle leur ajoute un niveau plus élevé de reconnaissance de l'invariance.

---

[45] voir aussi Longo [2000].
[46] Dehaene [1997], Butterworth [1999].

Considérons par exemple les nombreuses notations différentes des nombres. Chacune, après les premières tentatives (*cf.* les notations sumériennes), stabilisait le "concept" de nombre comme indépendant des objets dénombrés. La conscience historique de la possibilité de nombreuses notations différentes est au cœur de la conception la plus avancée de l'indépendance, celle de la théorie des nombres : les *notions* et les *théorèmes* de la théorie des nombres ne dépendent pas de la notation choisie pour les nombres, comme le disait Saint Augustin. Pour lui, ils ont une existence absolue, dans la mémoire. Pour nous aussi, la mémoire (individuelle et collective) participe à la conception des nombres, mais en tant que lieu essentiel d'un processus constitutif.

Lors de leur construction subjective et intersubjective, les mathématiques s'appuient sur d'autres formes de savoir, ou, pour mieux dire, sur les mêmes phénomènes cognitifs que celles-ci, avec lesquelles elles partagent des racines communes. Mais elles s'en distinguent par l'attention particulière qu'elles portent à l'invariance et à la stabilité. Et leur extrême indépendance par rapport à la signification et aux contextes les fait apparaître comme la forme la plus objective du savoir.

Les mathématiques sont pourtant riches de signification, et articulées à des contextes. L'espace, le temps, les formes des objets, le monde structuré qui nous entoure ne précèdent pas plus nos constructions que leur interprétation mathématique : nous les dessinons en vivant et en agissant dans le monde, en faisant émerger par une sélection active des régularités de base, parfois à l'aide des mathématiques. Nous les construisons en formant notre moi dans un mouvement de structuration du monde. La plus simple des perceptions sensorielles est loin d'être passive, nous la sélectionnons et l'interprétons activement[47]. Et aucune de ces expériences phénoménologiques de l'espace, du temps, des formes, etc., ne serait possible sans leur mémorisation *dynamique*. Les structures du savoir (mathématique) conscient ne sont que la partie émergente d'un iceberg de processus accumulés largement préconscients, où nous actualisons des invariants et des stabilités suivant des orientations intentionnelles, dans une mémoire individuelle et collective.

Conclusion

Dans cet article, nous avons mis l'accent sur l'intuition comme reconstruction de la mémoire, et sur la généralisation et l'abstraction comme construites aussi par une pratique préconsciente de l'" économie " des indices en mémoire et comme processus d'isolement des invariants et des similarités, sur le modèle de la mémoire procédurale active. Le rôle du préconscient et de l'inconscient est immense, et a été maintes fois exploré, depuis le début du siècle[48]. Malheureusement, les puissantes (et techniquement efficaces) écoles formaliste et platonicienne qualifièrent ces études de psychologisme inutile, et découragèrent leur poursuite. En fait,

[47] Voir Berthoz [1997] et Ninio [1991] pour des exemples récents en physiologie et neuropsychologie.
[48] voir Poincaré [1902], Hadamard [1945].

l'introspection, leur seul outil d'analyse à l'époque, n'avait pas un statut scientifique comparable à la mathématisation des fondements que proposaient ces écoles (les formalistes, en particulier). Cette mathématisation a elle-même su montrer ses limites, ses incomplétudes essentielles[49] : tout en la poursuivant, car elle est extrêmement informative et techniquement profonde, il faut l'enrichir par une analyse de la pratique des mathématiques dans le cadre de la cognition humaine.

Il doit être clair que l'orientation constructiviste, enrichie de la philosophie d'Enriques et de Hermann Weyl, influence le point de vue esquissé dans cet article, sûrement et aussi à cause d'une longue expérience d'utilisation technique des théories mathématiques "intuitionnistes" de la part de l'auteur. En fait, malgré les positions difficilement acceptables de Brouwer sur la subjectivité, le langage et la mémoire (son solipsisme), et malgré l'incomplétude des intuitions de Poincaré, leurs points de vues sur les fondements des mathématiques peuvent être réactualisés, en ce qu'ils nous orientent vers la question de "l'enracinement des mathématiques dans nos efforts pour vivre et savoir", pour le dire avec Weyl, et ils renouent avec le sens de l'histoire, propre à Enriques. Leurs réflexions peuvent être considéré comme préliminaires à une analyse fondationnelle élargie de ce que maintenant nous appellerions la connaissance mathématique (une analyse des fondements de la *connaissance* mathématique, plutôt que des mathématiques), car elles prennent en considération la "construction conceptuelle" des mathématiques et proposent un questionnement sur le "processus de connaissance", le "comment" de la constitution des concepts et de la preuve.

Cette influence du constructivisme doit donc s'entendre comme celle de son orientation philosophique générale, plutôt que comme celle du cadre limité (et limitatif) des mathématiques intuitionnistes, qui conviennent surtout aux mathématiques de l'informatique. Dans cette visée, il nous faut en premier lieu dépasser l'introspection, pour nous articuler aux "sciences du mental" déjà largement élaborées, et oser rechercher des connections avec les récentes avancées dans la compréhension scientifique des processus mentaux, où la mémoire, en particulier, joue un rôle fondamental.

Bibliographie

(Des versions préliminaires ou revues des articles de Longo sont "downloadable" de http ://www.di.ens.fr/users/longo).

Asperti A., Longo G. **Categories, Types and Structures**, M.I.T. Press, 1991.

St. Augustin **Confessiones**, 401.

St. Augustin **Les Confessions, Œuvres I,** Bibliothèque de La Pléiade, Gallimard, Paris, 1991, Traduction : P. Cambronne.

Berthoz A. **Le sens du mouvement**, O. Jacob, 1997.

[49] voir Longo [2000a] pour une analyse en termes contemporains.

Brouwer L. [1923]. "On the significance of principle of excluded middle in mathematics, especialy in function theory." *in* van Heijenoort [1967], pp. 302-334.

Brouwer L. "Consciousness, Philosophy and Mathematics", 1948, *in* **Collected Works** vol. 1 (Heyting ed.), North Holland, 1975

de Bruijn N. "Can people think ?", **IEEE Symposium on Logic in Computer Science**, 1991.

Butterworth B. **The mathematical brain**, MacMillan, 1999.

van Dalen D. "Brouwer's dogma of languageless mathematics and its role in his writings", **Significs, Mathematics and Semiotics** (Heijerman ed.), Amsterdam, 1991.

Dehaene S., **La bosse des Maths**, Odile Jacob, 1997.

Descartes R. **Regulae ad directionem ingenii**, 1619 - 1664.

Duhem P. **Les Systèmes du Monde**, tome I, 1913.

Edelman G. **The matter of Mind**, 1992.

Enriques F. **Problemi della Scienza**, 1909.

Enriques F. **Natura, Ragione e Storia**, Antologia di scritti, Einaudi, 1958.

Freud S. **Introduzione alla psicoanalisi**, Boringhieri, 1972 (textes orig.: Vorl. zur Eifuh. Psycho.; Neue Folge Vorl. zur Eifuh. Psycho., de 1915 -17 et 1932).

Girard J.Y., Lafont Y., Taylor P. **Proofs and Types**, Cambridge U. Press, 1990.

Gödel K. "Russell's mathematical logic", **The philosophy of B. Russell,** (Schlipp ed.), 1944.

Goldfarb W. "Poincaré Against the Logicists", **Essays in the History and Philosophy of Mathematics**, (W. Aspray and P. Kitcher eds), Minn. Studies in the Phil. of Science, 1986.

Goodman N. **Fact, Fiction and Forecast,** Harvard U.P., 1983.

Hadamard J. **The psychology of invention in the mathematical field**, Princeton U.P., 1945.

van Heijenoort J. **From Frege to Gödel**, Harvard U. Press, 1967.

Lakatos I. **Proofs and Refutations**, Cambridge U. Press, 1976.

Laplanche J., Pontalis J.-B. **Vocabulaire de la psychanalyse**, PUF, 1967.

Longo G. "Géométrie, Mouvement, Espace : Cognition et Mathématiques", **Intellectica**, 2, n. 25, 1997.

Longo G. "The mathematical continuum, from intuition to logic", **Naturalizing Phenomenology : issues in comtemporary Phenomenology and Cognitive Sciences**, (J. Petitot et al., eds) Stanford U.P., 1999.

Longo G. "The Constructed Objectivity of Mathematics and the Cognitive Subject", **Epistemology of Physics and Mathematics** (M. Mugur-Schachter ed.), Kluwer, 2000 (à paraître).

Longo G. "Mathematical intelligence, infinity and machines: beyond the Gödelitis", à paraître, 2000a (version préliminaire : "L'intelligence mathématique, l'infini et les machines", **Revue de Synthèse**, n. 1, 1999.)

Nicod J. **La Géométrie dans le monde sensible,** PUF, Paris, 1962.

Nicolas S. "Mémoire explicite, mémoire implicite", **Rapports de Psychiatrie**, tome 3, 1993.

Ninio J. **L'empreinte des sens**, Seuil, Paris, 1991

Poincaré H. **La Science et l'hypothèse**, Flammarion, Paris, 1902.

Poincaré H. **La valeur de la science**, Flammarion, Paris, 1905.

Shacter D. "Memory", **Foundations of Cognitive Sciences,** (Posner ed.), M.I.T. Press, 1989.

Sambin G. "Per una dinamica dei fondamenti", **Nuovi problemi della Logica e della Filosofia della Scienza**, Corsi, Sambin eds., Viareggio, 1990.

Shank R. **Dynamic Memory**, Cambridge U. Press, 1982.

Shank R., Abelson R. **Scripts, plans, goals and understanding**, 1977.

Thom R. **Apologie du Logos**, 1990.

Tieszen R. **Mathematical Intuition**, Kluwer Academic P., 1989.

Troelstra A.S. "Remarks on Intuitionism and the Philosophy of Mathematics", **Nuovi problemi della Logica e della Filosofia della Scienza**, Corsi, Sambin eds., Viareggio, 1990.

Voltolini P. "Wittgenstein : analisi come terapia ed analisi come mitologia", **Rivista di Filosofia**, n.3, Dic. 1985.

Weyl H. **Das Kontinuum**, 1918.

Weyl H. **Philosophy of Mathematics and of Natural Sciences**, Princeton University Press, 1949.

Weyl H. **Symmetry**, Princeton University Press, 1952.

Wittgenstein L. **Lectures on the foundation of Mathematics,** Diamond ed., 1976.

Wittgenstein L. **Remarks on the foundation of psychology**, Anscombe ed., 1980.