

Il “mito del continuo” tra filosofia e scienza

Introduzione al convegno, Gargnano, ottobre 2006.

Rossella Fabbrichesi
Dipartimento di Filosofia
Università di Milano

<http://www.filosofia.unimi.it/infofabbrichesi>

Giuseppe Longo
LIENS, CNRS – Ecole Normale Supérieure
et CREA, Paris

<http://www.di.ens.fr/users/longo>

Genealogie del continuo

Vorremmo anzitutto spiegare perché abbiamo scelto questo tema al fine di instaurare un dialogo il più aperto possibile sui rapporti che intercorrono tra scienza e filosofia, sul senso delle operazioni teoriche che ognuna impegna verso i propri oggetti di studio. Diciamo che il tema del continuo ci è sembrato emblematico, perché è al centro di molto dibattito contemporaneo e perché la prima crisi della razionalità occidentale ruota intorno al tema degli irrazionali e ai paradossi zenoniani: si tratta, dunque, a ben vedere, di crisi centrate intorno al tema del continuo e dell'infinito.

Se vogliamo partire dal pensiero greco è perché pensiamo che le strutture matematiche siano il risultato di una “progressiva concettualizzazione”, come diceva Enriques. Meglio ancora, nella terminologia di Riemann, che non prevede progresso, esse sono una “genalogia di concetti”. La nozione di continuo, in modo particolare, rinvia ad una storia ancora aperta di una determinazione pratica e concettuale di estrema complessità, fortemente correlata alla struttura dello spazio e del tempo. Da una parte, sulla scorta del paradigma kantiano, se consideriamo lo spazio ed il tempo come forme dell'intuizione, condizioni di ogni possibile esperienza sensibile e di conoscenza, dobbiamo ascrivere ad esse anche ogni specificazione continua; dall'altra, ogni costruzione di oggettività, nei suoi passaggi cruciali, anche storici, ha portato a riorganizzazioni radicali proprio di questi complessi gnoseologici. Da Euclide ed Aristotele a Descartes e Newton, fino a Riemann e Cantor, sono proprio lo “spazio-tempo-continuo” ad essere profondamente cambiati. Oggi la geometria non-commutativa (per la Fisica Quantistica) è una ulteriore reinvenzione dello spazio dei processi fisici. In breve, la dinamica storica dello strutturarsi della nozione di continuo, e delle costruzioni di spazio-tempo che le sono fortemente debitorie, rappresenta uno degli esempi più forti di costituzione trascendentale, dove in alcun modo si dà un trascendente, un'ontologia pre-esistente, senza percorso costitutivo, ma è proprio tale percorso costitutivo a marcare una genesi ed una storia propriamente umana. E questo avviene al cuore degli *a priori* stessi, delle stesse condizioni di possibilità del sapere fisico-matematico.

Del resto, l'efficacia matematica, ragionevolissima, delle strutture di spazio-tempo-continuo è proprio dovuta alla loro *oggettività costituita*, un'oggettività, cioè, che va vista fiorire e crescere, e non si trova già stabilita, in sé. O, se si preferisce, è proprio dovuta al fatto che, più in generale e come dice Jean Luc Petit, forzando forse un po' Husserl, *ogni costituzione è contingente*. Questo contingenza della costruzione matematica è il motivo della sua efficacia, come strumento di conoscenza: la *contingenza* del suo percorso costitutivo, il suo far frizione con il mondo e la storia (intesa in senso ampio, non “sociologico”).

Ma quale costituzione? Questa è la domanda cui qui vorremmo iniziare a rispondere.

Soffermiamoci allora su alcune questioni di ordine storico-filosofico che riguardano l'origine di questo concetto e che sono rimaste, ci sembra, fondanti nella discussione sul continuo. Si potrebbe partire da un articolo di René Thom, che sosteneva esistere una “priorità

ontologica del continuo sul discreto”¹. Proposizione impegnativa, ma che forse ci accomuna tutti. Dice Thom che, logicamente parlando, un continuo può essere discreto, cioè avere qualificazioni discrete, mentre un oggetto discreto non può accettare una qualificazione continua senza cessare di essere discreto. E cita Aristotele, dalla *Fisica*² (208a): “E’ chiaro che l’illimitato (*apeiron*) è causa solo in quanto materia (*hyle*) e il suo essere è privazione, mentre il sostrato (*upokemeinon*) in sé è il continuo (*suneches*) e il sensibile” (Thom traduce ‘l’infinito ha per sostrato il continuo’, che non è forse del tutto appropriato). Dunque, dobbiamo all’autorità di Aristotele una visione che ci accomuna in fondo tutti, filosofi e uomini del senso comune: che vi sia una continuità liscia, senza salti né lacune, che è lo sfondo impercettibile su cui si stagliano gli eventi, le trasformazioni, le faglie dell’essere. Il continuo è il sostrato, il supporto, lo sfondo su cui, grazie a cui si pongono in rilievo le varie figure e forme (entelechie) di senso. Ancor più decisamente nel *De memoria* (450a) leggiamo: “non è possibile pensare nulla (*ouden*) senza riferimento al continuo”. Facciamo un salto e veniamo alla nostra epoca, per segnalare quanto sia persistente questa interpretazione. Hjelmslev, insigne linguista del ‘900 analizza così la questione della lingua: c’è un continuum semantico, la ‘massa amorfa’ dei pensieri, e un continuum fonetico, la massa dei suoni inarticolati, dette anche materia del contenuto e materia dell’espressione, sulla cui base si ritagliano gli elementi discreti che vanno a costituire, aristotelicamente, le diverse forme dell’espressione e del contenuto, che variano da lingua a lingua. L’entelechia separa, scrive infatti Aristotele.

Ora, vorremmo definire questa visione che ci accompagna persistentemente da millenni come ‘il mito del continuo’. In senso positivo, certo, perché ha permesso le superbe costruzioni della fisica e della metafisica aristotelica e, se pur con diversi intenti, della matematica cantoriana. Eppure, crediamo che questa fiducia nella priorità della continuità sulla discretezza di cui abbiamo parlato, questo privilegio ontologico del concetto di continuo potrebbe essere, per dirla wittgensteinianamente, un ‘crampo del pensiero’. Forse, la stessa impostazione della dicotomia continuo-discreto è un crampo di questo genere.

Perché allora non provare a prendere le distanze da questo mito, esercitando un po’ di sana filosofia del sospetto? Cerchiamo di andare alle radici e di domandare: quando si è iniziato a pensare in termini di differenza tra continuo e discreto? In che ambito, in seguito a quali pratiche? La parola ‘continuo’ è sempre risuonata nel modo in cui Aristotele la intende?

Per nulla. Se controlliamo sul *Thesaurus* delle citazioni letterarie greche la parola *suneches*, scopriamo che prima di Aristotele abbiamo pochissime occorrenze del termine, non più di una trentina, e l’ambito non è mai matematico, geometrico o fisico. L’ambito è sempre cosmologico, o ontologico in senso pieno. Ricordiamone alcune, le più importanti. Alcmeone (VI secolo): “l’anima è immortale e si muove in continuità col sole” (fr. A.1³); “le cose divine si muovono in continuità, con il sole, gli astri, la luna e tutto il cielo” (fr.A.12). Parmenide: “l’essere è uno e continuo” (fr.B.8). Anassagora: “l’infinito è continuo per contatto” (fr. B.45). E poi Platone, in cui la parola ricorre raramente, ma in contesti cruciali. Nel *Gorgia*: “E i sapienti dicono, o Callicle, che cielo, terra, dei e uomini sono tenuti insieme (*sunechein*) dalla comunanza, dall’amicizia, dalla temperanza e dalla giustizia; ed è proprio per tale ragione, o amico, che essi chiamano questo intero cosmo, ordine, e non invece disordine o dissolutezza” (508a⁴). Nello stesso senso si esprime il *Fedone*: “il bene e il buono sono ciò che tiene insieme l’universo” (99c); e la *Repubblica*: “la luce è il legame del cielo, la forza che tiene unita la volta celeste (*Resp* 616c). Continuo come continuare, con-tenere, tenere insieme: non sfondo

¹ R.Thom, *L’antériorité ontologique du continu sur le discret*, in *Le labyrinthe du continu*, J.M.Salanskis et H.Sinaceur eds., Colloque de Cerisy, Paris, Springer Verlag, 1992, pp.137-143.

² Le citazioni della *Fisica* sono tratte dall’edizione Laterza (2004), a cura di A.Russo.

³ Cito dai *Frammenti dei Presocratici*, a cura di G.Giannantoni, Laterza, Roma-Bari, 2002.

⁴ Chi conosce Heidegger, ritroverà qui i termini della sua Quadratura, esposta nella conferenza *La cosa*. Per quanto riguarda le citazioni di Platone, cfr. Platone, *Tutti gli scritti*, a c. di G.Reale, Milano, Bompiani, 2000.

su cui si stagliano i discreti, si badi bene, ma *forza* che lega, che vincola, che collega: la *synektike dynamis*, la potenza coesiva, relazionale, che verrà ricordata dal pensiero stoico.

E poi? Poi arriva Aristotele. Nel *corpus* aristotelico le occorrenze del termine si rincorrono e si producono in abbondanza, nelle *Categorie*, nel *De anima*, nel *De generatione e corruptione*, ma soprattutto nella *Fisica*, come sappiamo. Come introduce il problema lo Stagirita? Non vogliamo dilungarci su ciò, Panza ha da dire al riguardo sicuramente qualcosa di più circostanziato, ricordiamo solo alcuni elementi che rimarranno alla base della riflessione successiva del problema, che marcano, dunque, un approccio di pensiero persistente.

Aristotele esordisce sintetizzando probabilmente la tradizione precedente e scrive: “Se l’uno è continuo, l’uno è molti, essendo il continuo divisibile all’infinito (*eis apeiron gar diaireton to suneches*)” (185b). Qui c’è la parola *diairesis*, che proviene da Platone e che risuonerà paradigmatica nella discussione sulla continuità, e c’è ancora intreccio tra continuità e infinità: l’infinito è da intendersi come continua divisibilità (altrove dirà aggiunzione), o come divisibilità di un continuo all’infinito (*eis apeiron*). Ecco il passaggio dal *sunechein* dei presocratici, e anche di Platone, al *suneches* vero e proprio, che è un passaggio, potremmo dire, da una nozione ancora vagamente sentita come *energia relazionale* del cosmo, come *forza coesiva* tra gli eventi naturali, ad una nozione di continuo come *soggetto* di alcune precise attribuzioni. Siamo di fronte, potremmo azzardare, alla prima vera apparizione del concetto di continuo.

Il continuo si identifica dunque con il sostrato sensibile e materiale. E Aristotele pressoché contestualmente aggiunge: la sua qualità è la divisibilità infinita. Cioè - attenzione! - la possibilità di venir discretizzato, nel senso di una produzione di parti o segmenti ben separati.

La serie delle ambiguità del discorso aristotelico riguardo al continuo inizia qui e procede nei citatissimi libri E3 e Z6 della *Fisica*. In essi si parte da una semplice constatazione (che però così ovvia non è, a ben guardare): grandezza, tempo, movimento, e dunque mutamento e divenire, sono forme del continuo. In esse il continuo si esprime. Ecco allora apparire un’altra specificazione della continuità: la sua totale fisicalizzazione. Il tema del continuo non compare più in riferimento a tematiche cosmologiche o metafisiche di ampio raggio, ma propriamente fisiche: corpo, movimento del corpo, tempo, spazio, gli argomenti trattati, appunto, nella fisica. Siamo di fronte a quella che potremmo definire la seconda apparizione del continuo.

Ma facciamo un passo in più. Qual è l’esempio privilegiato da Aristotele per parlare di continuo? La linea retta, non c’è dubbio. Il tempo, anche, ma inteso come linea del tempo, un tempo spazializzato in cui l’istante equivale al punto sulla linea. Ciò è detto chiaramente nelle *Categorie* (4b22), là dove per esemplificare le quantità continue si parte proprio dalla linea e dalla superficie (mentre quantità discrete sono numero e discorso).

Eccoci condotti dunque dall’universo ordinato e tenuto insieme dalla quadratura cosmogonica di cui ancora parla Platone allo spazio della fisica aristotelica compiutamente geometrizzato, dove il continuo non è più forza – una forza naturale, cosmica e etica che compone, armonizza, mette in relazione – ma sostrato materiale e sensibile composto secondo l’esempio del continuo lineare.

Ma approdiamo alla terza apparizione del continuo: nei libri che citavamo prima (che forse hanno una composizione diversa dal libro III in cui si lega continuo e infinito), il continuo viene poi ulteriormente fisicizzato e sostantivato: esso è definito come una determinazione particolare del contiguo, il quale a sua volta lo è del consecutivo. Il modello è quello del contatto, più o meno stretto. “Il continuo (*suneches*) è una determinazione particolare del contiguo [in cui le estremità sono insieme (*ama*)]” (*Fisica* 231a20), e “io dico che c’è continuità quando i limiti (*peras*) di due cose, mediante i quali l’una e l’altra si toccano, diventano uno solo (*en*) e medesimo e, come dice la parola stessa, si tengono insieme (*sunechetai*)” (*Fisica*, 227a10).

Dunque, la continuità si determina come ciò per cui i limiti di due cose, mediante cui l’uno e l’altro si toccano, divengono *en*, un’unità. Da *ama*, insieme, *simul*, esse divengono *en*, una

cosa sola. Aristotele pone così il problema della soglia di differenza tra gli enti e della loro identità – problema teoretico inesauribile – ma, bisogna aggiungere, lo fa orientandoci su di una strada irta di difficoltà e forse di ambiguità. Come notava Olimpiodoro, questa definizione infatti è già viziata di ‘discretismo’, diciamo così: come si può definire continuo qualcosa che ha limiti comuni, quando ciò che ha un limite viene definito proprio come ‘discreto’, cioè non continuo?

L’esempio più eclatante, secondo il procedimento inverso, lo troviamo nell’ottavo libro (263a): “Se si divide il continuo in due metà, ci si serve di un solo punto come se fossero due, infatti esso segna un inizio e una fine: e a questo si addivene mediante la enumerazione e la divisione per metà. Ma se si opera questa divisione non risulteranno continui né la linea né il movimento [...] Così l’unico punto verrà sdoppiato e sarà la fine di una metà e l’inizio di un’altra”. Paradossalmente, dunque, nel ragionamento aristotelico, ciò che si evidenzia è l’impossibilità a trattare il continuo, a maneggiarlo operativamente: se lo si prova a fare, esso si dissolve, come neve al sole. Come uscire da questo impasse? Parlando della possibilità puramente *potenziale* di avere limiti comuni, cioè della suddivisione continua in infinite metà come unicamente potenziale: infatti, se queste infinite metà esistessero attualmente non avremmo una continuità, ma infinite interruzioni intermittenti del tempo e infinite stasi del corpo in movimento. La linea non può dunque mai essere divisa simultaneamente in tutti i suoi possibili punti, o il tempo nei suoi infiniti istanti. La continuità, come l’infinità, va vista come pura potenzialità, finché una discontinuità non interviene a segnalarne i margini (ricordiamo che questa sarà la soluzione scelta anche da Peirce in riferimento al tema della continuità⁵). Dunque il continuo è un concetto che si staglia in un ambito di pura *dynamis*: di esso si può parlare solo potenzialmente, e se per ipotesi la suddivisione all’infinito si attuasse veramente non saremmo più in presenza di un continuo. Ma tutto ciò è paradossale: come scrive Wieland⁶, possiamo definire il continuo solo mediante ciò che con esso *può* accadere. Ma se questo accade realmente, non abbiamo più nessun continuo.

Terminata questa prima ricognizione dei passaggi attraverso cui si delinea nella nostra tradizione il riferimento al continuo, ci rendiamo conto di quanti siano i problemi che esso pone: potremmo dire che in questo senso il continuo resta un mito, cioè una narrazione, e la possibilità di operare su di esso rimane tormentata.

Vi sono però numerosi elementi che vale la pena di proporre per un’eventuale discussione. Ricapitoliamoli: Aristotele costruisce un sistema in cui si dice che il continuo appare quando due estremi da *ama* divengono *en*, ma questo *ama* che si fa *en* non sta nell’esperienza logica. Quell’istante in cui abbiamo sia l’uno sia l’altro estremo sfugge al pensiero, all’analisi, alla definizione, che obbligatoriamente intercetta o i due estremi distinti, o l’unità risolta dell’*en*, ma mai la simultaneità del *sia* l’uno *sia* l’altro, nell’istante cruciale del transito *dall’uno all’altro*.

Vediamo meglio di che si tratta: questo momento di soglia (*semeion*), che è un nulla, di fatto, è però, nel contempo, qualcosa cui rinvia, di fatto, ogni figura determinata⁷. Esso però sfugge, abbiamo detto, al pensiero, alla definizione, alla logica razionale governata dal principio di non contraddizione. Per meglio dire: sfugge alla rappresentazione. Alla rappresentazione grafica e scritturale. Che è esattamente quella contro cui si incaglia l’analisi aristotelica in questi cruciali passaggi (e quella zenoniana, pure, succube anch’essa dell’esempio della linea e della sua infinita divisibilità).

Eppure, sul piano dell’evidenza fenomenica noi viviamo costantemente esperienze di continuità: la *pura potenzialità* del continuo, diciamo così, è per noi un’*attualità*

⁵ Cfr. su questo punto R.Fabbrichesi Leo, F.Leoni, *Continuità e variazione*, Milano, Mimesis, 2005, in partic. parte I.

⁶ W.Wieland, *La fisica di Aristotele*, Bologna, Il Mulino, 1993.

⁷ “E’ anche chiaro che, se il punto (*semeion*) del tempo che divide l’anteriore e il posteriore non viene sempre attribuito a ciò che è posteriore nell’oggetto, esso simultaneamente sarà e non sarà (*ama to autò on kai oun on*), e proprio quando sarà stato prodotto, non esisterà” (*Fisica*, 263b9-13).

pragmaticamente rilevante. Si pensi allo snodarsi del tempo, allo svolgersi dei movimenti, all'impercettibile densità di ogni trasformazione. Ma forse così già si dice troppo: questi sono esempi di esperienze già molto intellettualizzate. Peirce infatti come riferimento-principe del continuo aveva scelto quello delle gocce del mare, che si mescolano senza che sia possibile distinguerle; Leibniz pensava al trasformarsi impercettibile della vita nella morte; Bataille all'unica vera esperienza di continuità data all'essere umano, quella erotica (ma anche Aristotele fa proprio questo esempio, cfr. *Fisica* 227a). Queste sono esperienze di continuità in cui non abbiamo nessuna difficoltà a vivere il *simul*, sono esperienze in cui il sia/sia, l'uno che si sdoppia nel due, o l'insieme (*ama*) che si dà in controluce come unità, si risolvono nell'ambito della prassi senza inquietarci affatto. Di fatto, siamo vivi e un attimo dopo siamo morti. Di fatto, ci congiungiamo carnalmente, ripetendo la forma e la tracotanza dell'androgino platonico, e un attimo dopo siamo di nuovo povere metà secate.

Gli imbarazzi che provengono dalla decifrazione di queste esperienze - i crampi che patisce il pensiero razionale al riguardo - sono imbarazzi legati alla rappresentazione grafica che è stata fatta del tema del continuo. Sono impasses che si impongono con l'imporsi progressivo di certe pratiche: ad esempio la pratica di divisione o di enumerazione, *diairesis* e *prosthesis*. Molti interpreti notano come Aristotele in riferimento al continuo sia condotto ad esprimersi mediante termini che designano le operazioni originarie relate al maneggio della nozione di continuo: l'aggiungere, il detrarre, il congiungere, il tagliare, il limitare, il dividere. "Se si divide il continuo a metà...". Tutte queste pratiche di *costituzione* del continuo geometrico e fisico sono poi ampiamente discrete, o discretizzanti, come abbiamo visto. Non solo, sono pratiche relative ad atti di *scrittura*. Non tutti lo ricordano, ma in greco, quando si dice punto si dice *semeion*, quando si dice linea si dice *grammé*. E quando parliamo di limite, pensiamo alla traccia sul foglio che limita, che divide un segno dall'altro, assegnandolo al segmento precedente o seguente, e che poi può essere cancellata, componendo un segno continuo, per l'appunto. *Diairesis* e *arithmos*, come voleva Platone nel *Sofista*. Insomma, quando pensiamo alla continuità, non pensiamo forse ancora in termini aristotelici ad una linea tracciata sul foglio, o ad una figura piana, alla sua suddivisione, ai punti che la compongono (come ancora sembra fare un gigante dell'aritmetizzazione del continuo come Cantor)?

Non siamo forse ancora figli di quelle prime, fondamentali pratiche di scrittura *entro* cui si è stabilita la scansione continuo-discreta? Scrittura grafica, diagrammatica, che ha imposto una *visione* particolare, e una manipolazione particolare di segni sulla carta. Ma, se soggiacciamo a questa visione, ci risulta difficile non ricondurre il continuo a termini discreti, e le ambiguità si moltiplicano. Se ragioniamo in termini di suddivisione e contatto tra estremi, è il discreto che ci tiene in scacco, e l'esperienza del continuo si dissolve. Discreti sono il numero e il discorso, diceva Aristotele nelle *Categorie*. Non si avvedeva che il problema vero è che discreti sono le *scritture* del numero e delle lettere, e dunque anche quelli delle quantità continue - linea e superficie - e, invischiati nei problemi legati alla rappresentazione grafica, del continuo non rimane più *traccia*.

O forse rimane nell'operazione fungente, come direbbe Husserl, quell'operazione pre-categoriale che traccia con traiettoria mobile e sicura, un segno su un foglio bianco.

La memoria ed il gesto: verso il concetto e la matematica

Ben prima della storia, infatti, la pratica della traiettoria connessa e continua, meglio ancora la *memoria* della traiettoria, sembra essere una esperienza pre-umana. Memoria, che ha il predatore, di un'esperienza di inseguimento, resa indipendente dai dettagli di un vissuto, di un'esperienza astratta anche se non simbolica, perché pre-umana, ma fondante le costruzioni simboliche umane. E' astratta anche nell'animale, perché memoria di una protensione, di qualcosa che non c'è ancora: la traiettoria che percorrerà la preda. E' dunque questa azione vissuta e ricordata, una pratica primitiva di astrazione, ben prima dell'astrazione propria alla cultura simbolica che ci permette di parlarne, che la concretizza nel tratto e nella scrittura. Da

una parte, dunque, essa darà senso alla traiettoria tracciata sul foglio, contribuendo a renderla intelligibile all'altro essere umano, che condivide la vicenda della specie e del gruppo comunicante; dall'altra, potremmo pure aggiungere, è proprio la pratica umana e simbolica del segno continuo che ci farà "leggere indietro" e capire o proporre come continua la traiettoria dell'azione animale.

In breve, tutta la storia del continuo descrive una determinazione concettuale e matematica cangiante, benché ancorata su pratiche antichissime. Sempre massimamente efficace, anche in Euclide, checché ne dica la caricatura formalista che da cento anni va raccontandoci che Euclide era un hilbertiano non tanto bravo, al punto da non aver formalmente ben dimostrato il primo teorema del primo libro, poiché gli mancava una concezione del continuo fatta di punti (alla Cantor, cioè)... Ed il formalista, ottuso rispetto alla storia, dimentica poi che è semmai la determinazione formale ad essere dimostrabilmente insufficiente (incompleta): la teoria principe delle cardinalità, la Teoria formale degli Insiemi, e' dimostrabilmente incompleta nel dire qualcosa esattamente sulla cardinalità del continuo (indipendenza dell'ipotesi del continuo). Una vera *débaçle* del formalismo, se si pensa che Zermelo propose la sua formalizzazione proprio per decidere l'ipotesi del continuo (per inciso: in una lettera del 1904, Poincaré gli replicherà che una teoria che, per principio, è data indipendentemente da proprietà strutturali, ben difficilmente potrà dire qualcosa su una proprietà così eminentemente di struttura, geometrica in un certo senso, come è il continuo. I costruibili di Gödel e gli elementi generici di Cohen, decenni dopo, confermeranno la sua intuizione, con universi di costruzioni non formali).

La vicenda costitutiva del concetto di continuo è dunque un percorso che inizia dalla filogenesi, la nostra attività animale nello spazio e nel tempo, come il seguire e l'anticipare la traiettoria di una preda. (o per lo meno è un percorso che, a partire dalle nostre pratiche costruttive del continuo, noi, retrocedendo all'indietro, assegniamo a quel tempo remoto) Il contorno tracciato dai nostri antenati sulle pareti di Lescaux stabilizza poi come prima forma simbolica il continuo di un bordo. Così, la traiettoria ed il bordo, che "*non sono già lì*", divengono intelligibili e *continui* nell'intersoggettività del tratto disegnato per l'altro uomo, o per il dio. Si specificano nel linguaggio delle prime esperienze geometriche ed analitiche, dai greci agli astronomi della nuova scienza, per giungere alla costruzione del continuo alla Cantor, capolavoro a tutt'oggi insuperabile come proposta di oggettivazione dell'intuizione e della pratica del continuo.

Da Newton e Leibniz abbiamo infatti costruito una nuova oggettività fisico-matematica grazie al continuo. Con Poincaré, il continuo delle dinamiche classiche ha permesso di distinguere fra una determinazione *globale* (le equazioni di un sistema) ed una *locale* (la sensibilità del sistema a fluttuazioni al di sotto della misura possibile). E' il continuo, anche solo quello di Aristotele, che ci permette di concepire attività (fluttuazioni, perturbazioni...) al di sotto di ogni intervallo di misura. Infatti, una organizzazione del mondo con la matematica del discreto, imporrebbe una taglia minima, una distanza fra i punti, senza permettere di concepire *nulla*, matematicamente, fra essi; un assoluto, quello della topologia discreta e della griglia soggiacente al mondo, limite della misura perfetta. Invece, con la geometria dei sistemi dinamici siamo arrivati a dare centralità a fenomeni possibilmente al di sotto dell'intervallo della misura fisica: una variazione, fluttuazione non misurabile, un *non-nulla* al di sotto della misura, può determinare l'evoluzione di una dinamica. Solo il continuo, non ponendo limiti inferiori alla misura (classica) ha consentito di sviluppare queste analisi, che, a partire da Poincaré hanno rivoluzionato la meccanica classica.

Specifichiamo in che modo la teoria classica permette di passare concettualmente al limite della misura. Sappiamo bene che la misura fisica è per principio approssimata: essa è cioè un intervallo. Tuttavia, e proprio per questo, la teoria dei sistemi dinamici è data nel continuo cantoriano, dove si può concepire il punto euclideo, senza dimensioni, punto di partenza o di passaggio di traiettorie-linee senza spessore. Ovviamente, tale punto e linea non hanno senso

fisico, ma sono una costruzione concettuale portante per concepire proprio l'assenza di limite inferiore ed *universale a priori* per la misura (essa dipende dal processo fisico considerato). Ed è così che si può anche concepire la determinazione completa, fornita dalle equazioni, nel continuo. Ovvero, se, da una parte, la misura fisica è un intervallo e mai un corpo fisico può essere associato ad un punto - neppure il suo baricentro, ad esempio, poiché la sua misura lo porrà sempre in un intervallo - dall'altra lo "sfondo" matematico inteso, di punti e linee nel continuo, permette di costruire un quadro di determinazione globale, *limite concepibile* delle evoluzioni fisiche. In questo senso del limite, la fisica classica è tutta deterministica: *al limite*, la determinazione globale (il sistema di equazioni, la funzione di evoluzione) descrive perfettamente la dinamica, matematicamente data nel continuo. E l'aleatorio, in quanto imprevedibilità, resta epistemico: esso è nel rapporto fra lo strumento di conoscenza e di determinazione, la matematica, da una parte, e, dall'altra, il processo fisico, che classicamente, si suppongono indipendenti.

E' questa pretesa indipendenza che non ha luogo in fisica quantistica, dove l'oggetto e l'oggettività stessa sono *il risultato della pratica di conoscenza e di misura*, nonché della preparazione dell'esperienza e della sua matematizzazione. Ovvero, in fisica classica si suppone un mondo indipendente dal soggetto conoscente, descritto su uno sfondo continuo di determinazione perfetta, salvo poi introdurre, per via dell'approssimazione della misura, l'aleatorio, l'incertezza delle dinamiche non-lineari. Le probabilità classiche sono una alternativa all'impossibilità di descrivere traiettorie esatte: il baricentro ed un punto sul bordo di una moneta, concettualmente, percorrono traiettorie ben determinate dalle forze in gioco, l'approssimazione della misura iniziale è però sufficiente a rendere imprevedibile questa dinamica classica e più conveniente analizzarla in termini probabilistici (le simmetrie della moneta fanno stimare le probabilità dei valori alla fine del processo). Contrariamente al continuo classico, ben separato, punto per punto, alla Cantor, l'intricazione quantistica cambia l'aleatorio. Classicamente, due monete lanciate in aria che si toccano e poi si separano, sono analizzate con probabilità indipendenti. Due quanta invece, che abbiano interagito, danno misure intricate di probabilità, non più indipendenti, come nel caso classico⁸. Nelle soluzioni matematiche proposte, dunque, la struttura dell'oggetto o dello spazio-tempo cambiano radicalmente.

In conclusione, la determinazione classica, che non ha senso pratico/ sperimentale ma solo di quadro concettuale, è possibile proprio in virtù del "mito di un continuo" soggiacente, spazio matematico e non fisico, schema di indagine di straordinaria fertilità storica, ma forse anche un crampo del pensiero, come dicevamo, che ci costringe a credere in una determinazione (classica) sempre possibile, anche quando essa è senza senso empirico (come nel caso della moneta lanciata in aria). Pensate a come tutto ciò ha spinto alcuni a cercare variabili nascoste anche in fisica quantistica, variabili che dovrebbero riempire i buchi concettuali della determinazione, per riportarla al quadro classico, in particolare alla località (puntualità) delle variabili spazio temporali, come nel continuo cantoriano delle dinamiche classiche e relativistiche.

Siamo allora in grado di raccogliere la poderosa eredità concettuale del continuo, dai greci a Cantor, e superare il crampo della determinazione classica, senza cadere nella trappola del discreto sconnesso dell'aritmetica? Cosa ci può insegnare e cosa pretende a riguardo la fisica quantistica? Di certo, la discussione, nel convegno ci dirà qualcosa al riguardo.

Ma passiamo ad un altro tema, altrettanto cogente quando ci si riferisce a tematiche relative alla continuità: che dire in una prospettiva scientifica del continuo temporale del vivente? Questo 'presente esteso' che da Sant'Agostino a Weyl, Husserl e Varela si propone come strumento per comprendere la coscienza, come pure le attività pre-coscienti?

⁸ Cfr. F. Bailly, G. Longo. "Randomness and Determination in the interplay between the Continuum and the Discrete". (In stampa, v. in <http://www.di.ens.fr/users/longo/>)

Nelle analisi di questi pensatori ci troviamo di fronte ai fenomeni cosiddetti di protensione e ritenzione, memoria ed aspettativa, che si sovrappongono in intervalli di lunghezza variabile (il presente esteso), con tempi caratteristici poco esplorati, eppure inerenti ad ogni attività biologica; intervalli non giustapposti, certo non dati da salti discreti in un tempo aritmetico, ma neppure contigui, cioè solo accostati nel punto di sovrapposizione di cui parla Aristotele. In riferimento a questo continuo fatto di presenti estesi (parzialmente sovrapposti: questo connetterebbe il tempo, gli darebbe continuità), malgrado le tante belle intuizioni filosofiche, i tentativi analitici, direi matematici, sono inesistenti.

Al riguardo, e facendo riferimento alle ricerche di alcuni di noi⁹, crediamo che sia necessario rovesciare radicalmente la correlazione spazio-tempo ereditata dalla fisica classica.

Per Newton ed Einstein, il tempo, con la sua continuità, è un epifenomeno del movimento (in fisica quantistica la situazione è più complessa). A nostro avviso invece, il continuo fenomenale dello spazio è innanzitutto suggerito dalla percezione del movimento e va pensato come un epifenomeno della continuità temporale di cui parlavamo: il sovrapporsi degli intervalli successivi, ma non disgiunti, della ritenzione-protensione, intesi come fenomeni cognitivi. Ovvero, e qui accenniamo solo una tesi complessa, noi intuivamo e diciamo continua una traiettoria (un bordo...) perchè 'incolliamo' la traiettoria ritenuta e quella protesa. Quindi, e solo dopo (si pensi che Euclide non ha una *teoria dello spazio*, ma solo una teoria di figure), si forza, si costruisce, letteralmente, un continuo sottostante, spaziale, che è in realtà il risultato ultimo di una prassi del gesto e dell'inseguimento visivo. Ovvero, Euclide costruisce figure, con riga e compasso (e gesti continui: traslazioni e rotazioni). Non si impegna su, non descrive uno spazio "sottostante". E' Descartes, fondandosi certo sulle pratiche geometriche ed astronomiche di tanti altri, ad inventare uno spazio vuoto, un continuo "sottostante" le figure ed i fenomeni e da questi indipendente, perchè organizzato non dalle figure che si costruiscono in esso, ma da coordinate cartesiane assolute, il futuro spazio assoluto di Newton.

Insomma, osiamo proporre qui che il continuo spaziale è il continuo del moto: come pratica e concetto, segue, non precede, il continuo del gesto e dell'azione, delle figure tracciate con riga e compasso. Ed è, quindi, un epifenomeno del continuo temporale, del tempo del vivente, di quel vivente che siamo, contingente, con la nostra fovea, con il nostro particolarissimo cervello e le nostre particolarissime pratiche di conoscenza. Ovvero, noi imponiamo il continuo al mondo in base ad una continuità elaborata a livello cognitivo, descrivibile in termini di intervalli estesi del presente, come sovrapposizioni parziali di ritenzione e protensione: è la protensione del presente esteso che si sovrappone parzialmente con la ritenzione del presente esteso successivo. Per questo intuivamo e, poi, definiamo continua la traiettoria: la ricostruiamo come tale per ritenzione e protensione, ricordo del percorso che si sovrappone localmente all'attesa, alla traiettoria estrapolata per continuità nel tempo, del percorso futuro. Quindi, immergiamo, per pratiche concettuali forse solo simboliche, queste traiettorie in un "espace de plongement", fino allo splendore del continuo cantoriano in coordinate cartesiane, invenzioni somme e ben posteriori alla costruzione pratica, per continuità temporale, del continuo del movimento.

Il problema del continuo, a nostro avviso, deriva da, od addirittura coincide con, il problema del continuo temporale, inteso come "costruzione prima" dei nostri processi cognitivi. Per questo, nel campo delle scienze della vita, in un articolo recente¹⁰ si propone che l'analisi teorica del vivente inizi dal problema del tempo (come "operatore": il vivente organizza il tempo, con i suoi ritmi, la sua autonomia, che di converso, 'opera' attivamente nella sua costituzione, filogenetica, ontogenetica). E qui si può tornare a ricordare, del tutto in generale, che la questione del continuo temporale e della sua complessa correlazione a quello

⁹ Cfr. F. Bailly, G. Longo, *Mathématiques et sciences de la nature. La singularité physique du vivant*, Hermann, Paris, 2006 (introduzione in francese ed inglese in <http://www.di.ens.fr/users/longo/>)

¹⁰ Cfr. F. Bailly, G. Longo. "Schèmes géométriques pour le temps biologique". (In stampa, v. in <http://www.di.ens.fr/users/longo/>)

spaziale, è un tema che ha interessato pensatori di diversi orientamenti ed epoche. Lo stesso Kant, sempre attento a differenziarsi da Leibniz, riprende, nell'*Opus Postumum*, una concezione eminentemente leibniziana, proprio sul tema del tempo del vivente, tempo interno all'oggetto fisico e biologico. Pensiamo che anche su questo il convegno apporterà elementi di discussione e riflessioni interessanti.

Intervista a Giuseppe Longo

Dépt. d'Informatique
CNRS, École Normale Supérieure,
et CREA, École Polytechnique, Paris
<http://www.di.ens.fr/users/longo>

1) *Professor Longo, il tema del continuo ha attraversato tutte le fasi di sviluppo del pensiero occidentale, dall'epoca dell'antica Grecia fino ai giorni nostri. Appare però chiaro che tra '800 e '900 si è compiuta una profonda rivoluzione del nostro modo di pensare e di concepire matematicamente il problema della continuità. Potrebbe spiegarci meglio quali sono stati i passaggi fondamentali di questo processo?*

La svolta va senz'altro attribuita a Cantor, il grande logico-matematico del XIX secolo e della costruzione del continuo matematico moderno, in termini di punti ed a partire dei numeri interi, in un quadro di teoria degli insiemi. Non staro' qui a fare la solita apologia e storiella del continuo cantoriano e della associata teoria degli insiemi, allora innovativa, oggi insufficiente alla riflessione fondazionale; inizio tuttavia con il dire che, grazie al suo lavoro, abbiamo ottenuto una forte e robusta caratterizzazione del continuo, una "roccia" sulla quale finalmente si è potuto costruire in modo matematicamente rigoroso. Anche se oggi essa appare tutt'altro che definitivo e se, da un punto di vista strettamente tecnico, molte cose possono essere ricostruite anche nel discreto, non c'è dubbio che il lavoro di Cantor abbia avuto una determinante influenza per tutte le successive riflessioni matematiche, geometriche e fisiche.

Non è un caso che due degli aspetti della geometrizzazione della fisica che hanno cambiato prima la fisica teorica e poi la conoscenza scientifica, la relatività e la geometria dei sistemi dinamici, siano strettamente ancorate al continuo ed utilizzino massicciamente un continuo di tipo cantoriano.

Concepire, come ha fatto Riemann, il ruolo della curvatura dello spazio attraverso l'etere sarebbe stato impossibile senza avere una solida intuizione matematica del continuo, ma è grazie a Cantor che la pratica riemanniana del continuo si inquadra con rigore. E' chiaro infatti che il continuo è essenziale al concepire spazi curvi, deformazioni continue di piani e sfere; una pratica concettuale del continuo esisteva anche prima, ovviamente, perchè anche la geometria euclidea era costruita nel continuo, ma è solo grazie alla costruzione logico-matematica di Cantor che il continuo entra nel nostro quadro concettuale in maniera ineliminabile: da un lato la fonda in modo solidissimo, dall'altro ristruttura la stessa intuizione matematica.

E' poi fondamentale notare che è proprio nella geometria riemanniana, ed in maniera essenziale anche nella relatività einsteiniana, che la questione della dimensione, e cioè della dimensione cartesiana intesa in senso fisico, diventa di grande rilievo. La dimensione è un'invariante topologico: più precisamente, essa è ben definita in strutture in cui si dà una topologia pertinente al continuo, grosso modo la topologia degli intervalli. Trattare la questione della dimensione nel continuo non solo ci consente di coglierne il suo ruolo di invariante topologico, ma in più ci permette di evidenziare qual'è il vero problema: la distinzione riemanniana fra struttura globale dello spazio (topologica e dimensionale) e struttura locale (metrica). Le variazioni locali della metrica, correlate alla curvatura dello spazio, permetteranno ad Einstein di unificare gravitazione ed inerzia, l'idea base della relatività. Tutto ciò non ha senso in strutture discrete, dove cioè la topologia discreta è "naturale" ed in cui la dimensione cartesiana non ha semplicemente luogo (non è un invariante della teoria, non vi è caratterizzato).

Passiamo ora alle teorie dei sistemi dinamici: sebbene sia possibile ricostruirne molti risultati nel discreto, le nozioni esplicite grazie ai teoremi di Poincaré, e che hanno avuto il merito di

aver dato un ruolo centrale alla misura, hanno senso eminentemente nel continuo. Il fatto che la misura fisica sia un intervallo, non fissato a priori (dipende dal fenomeno analizzato), ma sempre presente, si tratta infatti bene nella matematica del continuo cantoriano: essa ci permette di cogliere la rilevanza della fluttuazione, della variazione, della perturbazione nell'intervallo della misura fisica, senza lunghezza inferiore prefissata; tutte nozioni la cui trattazione naturale avviene, di nuovo, nel continuo e non nel discreto, che propone una scala fissa, minimale di misura, la discretizzazione appunto.

Vi è infine l'emblematico caso della fisica quantistica dove, nonostante vi sia il discreto dello spettro dell'energia (il punto di partenza sperimentale della disciplina), lo spazio-tempo è continuo; inoltre, l'equazione di Schrodinger è l'equazione dell'evoluzione di un'onda nel continuo e gli spazi di Hilbert, spazio degli stati quantistici, hanno sì una dimensione discreta, ma descrivono sempre evoluzioni continue. In fisica quantistica esiste quindi un forte gioco discreto-continuo ma, di nuovo, dietro a questa sorpresa del discreto in uno spazio ortogonale, che è quello dell'energia nel tempo (l'azione, la dimensione della h di Planck), vi è sempre una massiccia presenza del continuo, intuitivo e matematico.

Questi sono in breve i passaggi teorici e sperimentali che, a partire dalla svolta cantoriana, hanno consentito un enorme chiarimento del ruolo e del rapporto tra continuo e discreto in ambito sia matematico sia filosofico. In breve, il rigore matematico, insiemistico, del continuo cantoriano ha dato grande impulso a due quadri fondamentali del rapporto fra matematica e fisica, la geometria riemanniana e quella dei sistemi dinamici; ha permesso di porre con chiarezza il difficile gioco fra continuo e discreto in cui si dibatte, non senza difficoltà interpretative, la fisica quantistica.

2) *Ripartendo proprio da questo ultimo punto, e da un termine che lei ha precedentemente citato, quello di variazione, sembra che nella storia del pensiero vi sia stata una sorta di opposizione tra due diverse concezioni di continuità. Da una parte vi è una concezione di tipo più cantoriano nella quale il continuo viene ricostruito a partire da elementi discreti, mentre dall'altra vi è una concezione, comune in qualche misura a Leibniz, Kant, Goethe, Peirce, Weyl ed anche a Wittgenstein, che tende invece a considerare la vera continuità come irriducibile ad una somma di elementi discreti. Secondo lei esiste davvero una opposizione tra queste due visioni o esse sono invece due aspetti necessariamente complementari?*

Io direi che c'è una complementarità. Per me, non c'è dubbio che una linea continua sia una *gestalt* piuttosto che un insieme di punti. Ciò non toglie che la ricostruzione di Cantor per punti è di straordinaria efficacia ed è quella che permette la trattazione matematica *per ora* più ricca ed efficace. Per molti aspetti, innanzitutto cognitivi, ritengo però che l'intuire ed il fondare il continuo spaziale su *gestalt* cui partecipano esperienze del tempo sia un passo necessario per riuscire davvero a capire ed a concettualizzare il continuo. Non c'è dunque tanto un'opposizione, ma ritengo piuttosto che la proposta di Cantor vada vista come una ricostruzione a posteriori molto specifica del continuo spazio-temporale, che è poi il continuo del movimento, e cioè di un continuo che noi imponiamo al movimento grazie ad una attività protensiva-ritensiva. Mi spiego.

A mio avviso vi è infatti prima un sostrato di tipo cognitivo-temporale che *impone* il continuo al movimento (ce lo presenta come continuo) e poi, solo dopo, "dietro" il movimento, noi costruiamo per via concettuale una struttura spazio-temporale sottostante, che ambienta, a posteriori, la pratica dell'azione e del movimento. Ovvero, noi cogliamo come continua una traiettoria, quella della preda inseguita con saccadi continue, alternate a saccadi discrete, poiché' incolliamo la protensione (il precedere la preda con lo sguardo, una rapida saccade in avanti) con la ritenzione della traiettoria già percorsa. Ma protensione e ritenzione non sono solo attività muscolari/oculari,

bensi' coinvolgono ampie azioni cognitive, coscienti e preconsce, che meritano una autonoma trattazione del tempo del vivente, come Bailly ed io accenniamo in un recente articolo.

E' quindi indubbio che le nozioni gestaltistiche siano da un punto di vista generale le più adeguate, poiché appunto il segmento continuo è una gestalt che imponiamo al mondo con le pratiche cognitive che dicevo. Tuttavia dal punto di vista matematico esse devono venire completate dalla costruzione cantoriana, la quale è ancora oggi la migliore che abbiamo.

Ci sono stati altri tentativi, come ad esempio quello di Veronese, che hanno provato ad evitare una costruzione per punti sostituendoli, ad esempio, con degli intervalli di tipo infinitesimale. Tuttavia, la matematica del continuo diventa così più difficile, od al più è una traduzione alla quale non siamo abituati e, soprattutto, che non porta, per ora, a risultati nuovi. Si possono infatti tradurre cose che già si fanno da un sistema all'altro, alcune magari possono esprimersi meglio, ma con tali approcci non si ottiene comunque nessuna svolta matematica, nessun nuovo grande teorema sul continuo. In questo includo l'analisi non standard, che riprende, dicono i sostenitori, il concetto di infinitesimale di Leibniz, ma che non sembra permettere applicazioni veramente nuove. Forse gli infinitesimali sono meglio colti dall'approccio alla Lawvere-Bell, originato da idee sui topos (particolari categorie inventate da Grothendiek): alcuni colleghi stanno proponendo loro applicazioni originali e, forse, interessanti, alla teoria delle corde in fisica quantistica, tipico luogo del non-discreto, non-continuo cantoriano.

Sono quindi d'accordo che, in linea di principio, un continuo gestaltico debba in qualche modo precedere la specifica ricostruzione matematica e che i suoi "fondamenti" (per quel che questa parola vuol dire) siano di tipo cognitivo.

- 3) *Nel Pacididius Philateti, Leibniz introduce due interessanti esempi per spiegare la propria posizione sui temi del movimento, del cambiamento e del continuo. In uno di essi si considera il passaggio dallo stato di moto a quello di quiete di una sfera assoluta posta sopra una tavola perfettamente piana, mentre nell'altro si considera il passaggio tra lo stato di vita ed lo di morte. Il problema in entrambi i casi è quello dello stato di passaggio, del punto di congiunzione. Se si ammette tale punto come intermedio si ha uno stato contemporaneamente di moto/quiete o di vita/morte. Si ha una comprensione molto intuitiva del fenomeno ma sembra così perdersi la precisione. Se invece non si ammette tale punto, e dunque si propende per un passaggio nel quale ad uno stato di moto/vita segue immediatamente uno stato di quiete/moto, sembra che si guadagni in precisione ma si perda l'intuitività del passaggio graduale. Cosa possiamo dire oggi di questi esempi grazie agli strumenti fisici e matematici di cui possiamo disporre?*

Farei due osservazioni a riguardo. In primo luogo che questa "imprecisione" risulta del tutto adeguata alla fisica. Il continuo è infatti quello che ci permette di cogliere meglio la variazione o la fluttuazione cui è soggetta la misura fisica che, come abbiamo detto, è un intervallo. Questa imprecisione, aperta, non prestabilita (dipende dal fenomeno e dagli strumenti di misura in questione) è dunque pertinente alla fisica e questo è proprio uno dei "meriti" del continuo.

D'altra parte, la congiunzione liscia, sia o no cioè a cui fa riferimento Leibniz, è propria anche al continuo alla Cantor, il quale non va proprio visto come un processo di discretizzazione. Al contrario, esso è una *ricostruzione* del continuo fenomenale, costruzione che, certo, parte dal discreto, ma, attraverso una infinità non numerabile di passaggi al limite, permette di uscire completamente dal discreto per passare appunto al continuo. Inoltre al vantaggio di ben rappresentare l'intervallo fisico della misura, aggiunge quello della *tendenziale* precisione perfetta: questo deriva anche dalla costruzione del mito del "punto", "mito" perchè il punto cantoriano-euclideo non ha evidentemente alcun senso propriamente fisico. Esso è solo una costruzione concettuale, una costruzione limite, la quale permette molte conseguenze: ad esempio, usare le variabili matematiche

in modo “locale” (fanno riferimento al massimo della località: il punto). Di nuovo: la costruzione del punto non è inerente al mondo, è un limite concettuale, non è forse essenziale ad un buon continuo matematico, ma rimane comunque per ora la più potente che abbiamo.

Passiamo a quello che lei evocava tramite l'esempio della palla o del passaggio dalla vita alla morte. Se la palla, il suo baricentro, la si va a misurare in senso fisico non si ottiene un punto ma, appunto, un intervallo. Per quanto riguarda invece la transizione tra uno stato di vita ed uno di morte, essa è da considerarsi, forse, più come una transizioni di fase. La si può trattare usando punti sopra un continuo, ma essa non ha comunque le caratteristiche del discreto perchè quello che conta è ciò che avviene poco prima e poco dopo tale passaggio, in un intervallo infinitesimale che descriviamo abbastanza bene con il continuo alla Cantor. Nelle transizioni di fase, non è possibile isolare fisicamente un punto preciso di transizione, ma si può matematicamente: l'analisi fisica viene fatta su quello che succede poco prima e poco dopo. Solo al limite di questo poco prima / poco dopo, si dà il punto di transizione, astrazione matematica necessaria a capire: in essa alcuni valori divergono, vanno all'infinito e questo caratterizza matematicamente la transizione fisica.

Questo caso è molto diverso da quel che avviene in una base di dati digitali dove si può invece avere un accesso esatto ai dati (l'ecosistema del conto digitale) e dove quello che conta è un valore che può essere trovato in un preciso punto *isolato*. In una transizione di fase, come nel caso della transizione dal ghiaccio all'acqua o dal vapore ad un fiocco di neve, è invece tutto l'intervallo della transizione che davvero conta. Poi, l'analisi propone un punto di transizione, su cui centrare l'attenzione matematica (tecniche di rinormalizzazione, in teorie della criticità). Insomma, i punti di transizione sono limiti cantoriani, il cui interesse fisico è in tutto un intervallo fisico (dato dalla approssimazione/intervallo della misura, ad esempio); essi non hanno nulla a che vedere con il discreto delle basi di dati digitali, punti isolati della topologia discreta che è loro inerente, ove tutto è esatto.

Confondendo le due cose si rischia di ripetere lo stesso errore che viene commesso da chi analizza il cervello solo con degli 0 e 1, sulla base del fatto che sappiamo che ci sono gli *spikes*. Gli *spikes* sono invece delle transizioni di fase, processi di immensa complessità, dove quello che conta è l'intervallo, per di più sempre diverso, in cui avviene questo passaggio, la scarica elettrostatica, tutte le sue complesse caratteristiche.

In generale, in una transizione di fase, a piccole oscillazioni della variabile di controllo corrispondono grandissime variazioni degli osservabili. La matematica che la caratterizza associa a questi osservabili dei valori che vanno all'infinito e solo così si capisce questo aspetto cruciale della recente fisica dei processi critici. Questi sono processi da descrivere nel continuo, in cui un punto può essere rilevante ma che in alcun modo il discreto tratta bene: è per questo che in una base di dati discreta una nozione di transizione di fase ha poco od un altro senso (esistono interessanti analisi a riguardo); la si può descrivere e rendere in modo approssimato, la si può imitare, ma se ne perde il senso fisico-matematico. Una descrizione matematica adeguata di questi processi deve avvenire prima nel continuo; poi, si possono anche fare delle approssimazioni per renderla sopra uno schermo di computer (e si hanno imitazioni computazionali ed immagini bellissime), ma si deve sempre sapere che l'esattezza che vi è dietro la misura sul discreto non fa cogliere il ruolo della fluttuazione e della variazione nell'intervallo della transizione di fase, che può essere inferiore a quello della discretizzazione. Il ruolo essenziale dell'infinito e del continuo nella recente fisica della criticità è a lungo discusso nel libro con Bailly.

- 4) *Che contributo può dare alla biologia, ed allo studio degli esseri viventi, una costruzione di una conoscenza del continuo che prenda spunto dal fatto che l'azione, e l'atto che costituisce la continuità dello spazio, è anteriore all'oggettività stessa ed alla rappresentazione oggettiva di quello spazio?*

Partiamo da alcune considerazioni circa l'attività celebrale. Il sistema nervoso è indubbiamente un sistema nato per coordinare movimenti, prima ancora di essere un sistema capace di creare e trasmettere informazioni. Bisogna mettere da parte la visione finalistica: lo *spike* non è lo scopo dell'attività metabolica neuronale *fatto per* trasmettere informazioni, è invece parte inerente del metabolismo di una cellula che, stimolata nell'intorno da altre cellule con cascate di proteine, ioni ecc. attraverso le sinapsi, reagisce stimolando una propria attività metabolica globale. Cellula lunghissima, la variazione elettrostatica, del resto presente in tutte le cellule in forma minore, fa parte di tale attività come integrazione metabolica di proprie parti lontane. L'idea del cervello elaboratore finalizzato a, appunto, elaborare informazioni va quindi sostituita con quella di un cervello azione/reazione rispetto ad attività motorie; in esso vengono utilizzate modalità proprie di cellule che percorrono tutto l'organismo e lo integrano grazie una attività metabolica, anche distale, che implica massicce attività elettrostatiche: ne segue il coordinamento globale.

La prima questione è dunque, come dicevamo prima, l'errore di vedere gli spikes come 0 e 1, invece che come transizioni di fase, il che è tutta un'altra cosa. Queste ultime infatti sono molto più complesse: non si trovano mai nello stesso intervallo identico e mai un neurone ha spikes identici; questo perchè è, appunto, solo una parte di un fenomeno metabolico in realtà molto più complesso. L'altra questione è quella del radicamento del continuo anche in attività così profonde come le attività celebrale. Io penso che, a questo riguardo, un approccio interessante sia quello proposto da Jean Petitot, il quale va appunto nel senso che dicevo prima: noi imponiamo una struttura di continuità dai contorni alle traiettorie, tramite attività celebrale, anche "di base". La corteccia primaria è la prima sede di queste attività, alla quale si aggiunge, ad esempio, l'attività di inseguimento di una traiettoria, con i fenomeni di ritensione-protensione molto complessi cui mi riferivo, relativi al prolungamento di un contorno, l'estensione di una traiettoria. Ci sono inoltre la ritensione e la protensione vestibolare, le saccadi che precedono la traiettoria; vi sono insomma molti livelli dell'attività celebrale che danno continuità al movimento, come dicevo, correlati al tempo soggettivo. La continuità che noi attribuiamo allo spazio tempo fisico è una conseguenza di queste attività cognitive.

Quindi vi è in questa visione anche un aspetto anti-rappresentazionalistico in senso enattivo?

Non ci stiamo di certo rappresentando cose che "ci sono"! Noi imponiamo, dicevo, che la traiettoria di un oggetto sia continua. Chiediamoci allora: dove sono i punti alla Cantor, nel mondo? La risposta non può che essere che questi punti non ci sono proprio. Dietro, a ben vedere, vi è anche un problema di tipo quantistico: noi sappiamo ad esempio che le particelle elementari non percorrono alcuna "traiettoria", nello spazio-tempo. Considerando il movimento di un oggetto macroscopico, e tenuto conto che in esso ci sono movimenti a livello di microfisica, dire che tale corpo od il suo movimento è continuo alla Cantor è assolutamente assurdo; siamo noi che proponiamo una ricostruzione di un continuo fenomenale, una costruzione che parte appunto da una pratica cognitiva ed arriva allo splendore matematico del continuo di Cantor. Inoltre, sempre concettualizzando, mettiamo la traiettoria, il bordo continuo dentro lo spazio, altra nostra costruzione, che, per altro, non faceva nemmeno Euclide. Euclide infatti non concepiva uno spazio continuo, soggiacente ai movimenti o gli oggetti: la sua era "solo" una geometria di figure, continue certo. La costruzione concettuale e matematica di un sostrato continuo, forse accennata in Aristotele, non saprei, avverrà solo molto dopo, in maniera compiuta non prima di Descartes. L'enazione consiste in questa co-costituzione, di tipo fenomenologico, di una concettualizzazione, ancorata su una pratica attiva dello spazio e del suo far "frizione con", canalizzare, le nostre attività, da cognitive fino a concettuali e matematiche.

5) Cosa può dirci del rapporto tra il concetto di continuità e quello di simmetria?

Le simmetrie hanno la grande ricchezza di essere sia invarianti sia trasformazioni e questo conferisce loro una particolare centralità. Le simmetrie sono un concetto difficilmente formalizzabile anche perchè precedono ogni formalizzazione: sono, diciamo, collocate allo stesso livello delle nostre esperienze cognitive più profonde.

Le simmetrie sono sia simmetrie discrete, le quali vengono trattate dai gruppi, sia simmetrie continue le quali includono, tra le altre cose, la trattazione della chiralità (l'avvitarsi di una vite, un cavatappi, a destra od a sinistra, azioni non interscambiabili).

La chiralità è un esempio interessante perchè non si può definirla per mezzo di stringe discrete di 0 e 1, ovvero in maniera puramente linguistico-formale, ma bisogna in qualche modo riuscire a "far vedere" una vite che si avvita nello spazio. Se noi dovessimo comunicare con un pianeta lontanissimo tramite segnali binari avremmo moltissime difficoltà a comunicare l'informazione "la posizione chirale "mano destra" o "mano sinistra" senza far vedere l'oggetto, il gesto, all'alieno. Quello che potremmo semmai fare è descrivergli a parole il tipo di esperienza di un particolare atomo, il quale ha un'emissione radiattiva che, insieme al suo *spin*, da una chiralità. Saremmo quindi costretti a descrivergli delle esperienze, che dovrebbe fare, per vedere: la comunicazione linguistica non basterebbe.

La logica è arrivata molto tardi a confrontarsi con questi problemi, soprattutto perchè Frege ed Hilbert avevano escluso a priori, programmaticamente, ogni riferimento delle strutture logico-matematiche allo spazio e al tempo e quindi, di riflesso, anche alle simmetrie.

Anche se per certi versi è stata una via fruttifera, ci sono infatti oggi moltissime macchine aritmetiche che trascurano tutti questi elementi, ora la logica sta ritornando ad affacciarsi a queste tematiche. Già nel lavoro di Genzen è ad esempio possibile cogliere un gusto nascosto per le simmetrie. Sono infatti sempre di più le questioni nelle quali le simmetrie diventano centrali: dalla teoria delle categorie, per quel che la si può far afferire alla logica, ai lavori di J.Y. Girard. Con questi ultimi e recentissimi, finalmente la logica si sta aprendo alla fisica, anche se in un modo molto complesso ed indiretto.

D'altra parte questo è un passaggio assolutamente necessario: senza tale movimento la logica matematica come noi l'abbiamo conosciuta, ispirata da Frege ed Hilbert, è destinata ad avere un ruolo sempre minore, probabilmente, se non ravvivando l'aggancio, di straordinario rilievo, con l'Informatica. Il suo ruolo inventivo e propulsivo per la costruzione di macchine aritmetiche e linguaggi formali, iniziato negli anni 30, sta giungendo a termine, se rimane classico: prevalgono infatti in Informatica, ormai, i problemi delle reti, del calcolo distribuito e concorrente, in cui lo spazio tempo fisico fanno la loro imponente apparizione matematica, quello spazio e tempo cui il riferimento significativo era stato vietato, sia pure in modo diverso, da Frege ed Hilbert. O la logica si rinnova (e Girard ha indicato alcune piste, ma altre si intravedono) o diverrà branca matematica o filosofica minore. Le simmetrie (si veda la logica lineare di Girard) ed il continuo (forse ora grazie ai suoi lavori sul fattore iperfinito e la geometria non-commutativa) stanno arricchendo l'analisi della prova in modo originale e, forse, lontanissimo dai progetti originari della proof theory.

- 6) *Da una lettura del volume "Alan Turing: l'uomo, la macchina, l'enigma" emerge chiaramente come il paradigma alfabetico-algoritmico sia insufficiente a "ridurre" la mente umana in tutti i suoi aspetti cognitivi. La pratica simbolica frequentata dalle culture orientali dimostra infatti come vi siano altri paradigmi possibili, largamente indipendenti dalla scrittura e dalla concettualizzazione algoritmica. Si evidenzia dunque uno scarto tra la natura cognitiva della mente e gli strumenti formali di cui fino ad oggi ci siamo avvalsi per cercare di comprenderne, e poi replicarne, il funzionamento. Sembra quindi che dopo aver sfruttato la potenza della pratica algoritmica, la sua spinta propulsiva, ora il confine della ricerca si sia invece spostato verso un nuovo limite, operando un passaggio da un campo concettuale esclusivamente discreto verso uno decisamente più continuo. Cosa può*

dirci a riguardo Lei, che per molti anni si è occupato di ricerca nel campo dell'informatica?

Le strutture del discreto hanno ancora moltissimo da dirci; queste macchine che stanno cambiando il mondo, le macchine digitali, hanno ancora bisogno di molta matematica discreta e possono implicare ancora ulteriori sviluppi e dunque ricadute. E torno a dire che lo straordinario ruolo della macchina aritmetica non va assolutamente sottovalutato. Ciò nonostante, i problemi che si pongono oggi nelle reti, i sistemi concorrenti, sono problemi di immersione nello spazio-tempo, come dicevo; problemi, questi, che, per ora, capiamo e trattiamo meglio nel continuo (l'uso della teoria geometrica dell'omotopia, in concorrenza, ne è un esempio molto interessante).

Oggi si osserva infatti un intreccio crescente tra continuo e discreto nell'informatica matematica o teorica, ed è per questo che la logica tradizionale vi sta giocando un ruolo sempre minore. La teoria dei tipi, sulla quale ad esempio ho lavorato a lungo, può dire ancora molto sulla macchina "locale", ma oggi deve però essere arricchita da una forte interazione con la matematica della concorrenza e, forse, del continuo. Tra informatica e logica stanno infatti avendo un ruolo crescente i sistemi ibridi, che usano strutture discrete e strutture continue. Non penso che bisogna avere un a-priori filosofico verso il continuo, quello che dico è che la filosofia della natura che è derivata dalla aritmetizzazione ad oltranza dei fondamenti, con esplicita esclusione e programmatica da parte di Frege e di Hilbert del rapporto *significante* con lo spazio-tempo, rischia di portarci completamente fuori strada. Un esempio di questo possono essere le argomentazioni di quelli che raccontano che il mondo "calcola" in senso aritmetico. Cosa non ha colto chi sostiene queste posizioni? Non ha colto la questione cruciale nella nascita della fisica teorica all'inizio del XX secolo: la questione della misura, che del resto è apparsa mille volte in questa nostra chiaccherata.

La svolta che si ha con Poincarè e poi con la fisica quantistica è che la *misura* è una immensa sfida *teorica* in fisica. La variazione o la fluttuazione *al di sotto* della misura è all'origine dell'impredittibilità alla Poincarè, quindi della geometria (e dell'analisi qualitativa) dei sistemi dinamici. La misura inoltre è *il problema* della fisica quantistica, dell'indeterminazione, l'"h" di Plank. Se si dice di un processo fisico, di una cascata o di un fulmine o di questa tavola, che essa "calcola", non ci si accorge che per calcolare è necessario associare un numero al processo, alla struttura fisica. E per associare un numero bisogna prima fare una misura; e questo, grazie a Poincarè e Plank, sappiamo essere una sfida difficilissima. Nessun processo fisico naturale "calcola". *Noi* abbiamo inventato il calcolatore, una struttura artificiale che ha la straordinaria proprietà, realizzata grazie ad un percorso difficilissimo, di essere una macchina a stati discreti. E' questa la questione centrale perchè, come giustamente sottolineava lo stesso Turing dopo il '48, per il fatto di essere "a stati discreti", nel calcolatore la misura è esatta ed è perciò immediato associare a questi stati discreti le stringhe di 0 e 1 che poi compaiono sullo schermo (in quegli anni Turing torna ad occuparsi di fisica e chiama "discrete state machine", in riferimento alla sua proprietà fisica che conta, la sua macchina, che prima denominava "logical computing machine").

Questa cultura aritmetica, ancora dominante in logica ed in informatica, non ha capito nulla della svolta che ha cambiato la fisica (dinamiche non predittibili e quanta); ma ha, ciò nonostante, permesso di costruire una macchina, in fondo un processo fisico, ma totalmente artificiale, lontana cioè dal mondo concettuale della fisica, che, cosa rarissima in natura, è a stati discreti e permette un accesso al proprio universo dove la misura non è un problema, perchè è esatta. È una qualità rarissima, ma non è l'unico esempio: la teoria della chimica in vitro, per esempio, è un calcolo ampiamente discreto, un sistema di riscrittura (purtroppo alcuni pensano che anche in vivo, nella turbolenza citoplasmatica, si possa parlare in termini di riscrittura formale... del DNA come di un programma!). Ci sono quindi dei processi naturali la cui trattazione teorica può evitare il problema della misura; noi, a partire degli anni 30, ma certo con dei precedenti storici, ne abbiamo inventati di formidabili: le macchine aritmetiche, ovvero a stati discreti.

Non sono dunque i risultati positivi della visione aritmetizzante dei fondamenti della matematica (e della conoscenza), le macchine discrete, a dover essere eliminate, quanto piuttosto quella deleteria filosofia della natura che si è prodotta di conseguenza: il vedere il mondo come un calcolo discreto, digitale, dagli spikes nel cervello, al DNA, ad altri processi fisici. Inoltre, oggi uno dei principali problemi è proprio quello di inventare macchine nuove, come la macchina quantistica o le macchine analogiche, forse anche di ispirazione biologica. Così come una volta abbiamo superato gli orologi, è forse tempo, ora, di pensare alla prossima macchina. Probabilmente l'alternativa più vicina sarà quella del calcolatore quantistico il quale, però, ha come problema centrale, per la sua realizzazione, proprio quello della misura e di una ardua correlazione fra continuo e discreto.

7) *Che rapporto esiste tra la teoria della continuità ed il fenomeno della randomness?*

Nell'ambito classico il discreto può essere sempre visto come un determinismo di tipo caotico, e questo riporta il discorso sull'aleatorio sotto il cappello unificante, da Poincaré in poi, della determinazione. La svolta quantistica è doppia: in primo luogo, la misura stessa è una misura di probabilità; in secondo luogo si dà il fenomeno dell'*entanglement*. Mentre due monete classiche lanciate per aria, che interagiscono e poi si separano, assumono valori di testa o croce che possono essere analizzati indipendentemente; due quantoni che interagiscono, risultano poi "intricati", ad ogni misura successiva. Ovvero, i loro *spin up* e *spin down* vengono analizzati in termini di intricazione, con i valori di probabilità correlati in modo non classico. La misura, alla Planck e l'intricazione, cambiano totalmente, in fisica quantistica, la struttura della determinazione ed il concetto di aleatorio.

Il determinismo classico (e relativistico, ovviamente) è correlato al continuo, ovvero è basato sul mito, e dico mito in senso greco, forte e positivo, che dietro al fenomeno c'è sempre un "sostrato" continuo, grazie al quale si può sempre concepire una traiettoria "filiforme" (la linea di Euclide e Cantor) che parte da un punto, sempre alla Euclide-Cantor. Quindi il continuo ha un ruolo essenziale nel dire che il mondo classico è deterministico, anche se ovviamente un processo determinista può essere caotico e generare infinite traiettorie a partire da un intervallo più piccolo della miglior misura possibile. Invece, il mondo quantistico non consente assolutamente di vedere o immaginare qualcosa come un sostrato continuo, soggiacente alla misura: lo vieta la teoria. L'equazione d'onda di Schrodinger è per esempio data nel continuo degli spazi di Hilbert, ma appena si va a fare la misura, si ottiene un valore di probabilità. Esso è un valore nel discreto, se si vuole. E questo è il problema, il vero e proprio gioco del continuo e del discreto in fisica quantistica: la misura di un processo, descritto matematicamente nel continuo, la funzione d'onda, produce dei valori che hanno a che fare con l'energia: ad emergere è allora lo spettro discreto dell'energia misurata. Anche questi problemi sono a più riprese trattati nel libro con Bailly.

8) *Il grande matematico Renè Thom ha sostenuto in più punti della sua opera che al continuo deve essere assegnata una priorità di tipo ontologico. Tuttavia, in base a ciò che abbiamo fino ad ora visto, ci sembra di poter affermare che Lei propenda invece per una priorità complementare di tipo cognitivo piuttosto che ontologico, è d'accordo?*

Non condivido infatti la visione ontologica di Thom, anche se Thom è uno dei grandi ispiratori di ciò che ho detto finora. Ritengo infatti che non bisogna fare dell'ontologia in matematica, il mondo è quello che è, continuo, discreto, non ho idea, né la matematica "precede" il mondo: questa nostra costruzione concettuale è radicata in pratiche cognitive che organizzano il mondo proponendo una struttura ed una determinazione, non arbitrarie perché, appunto, radicate sulla nostra frizione cognitiva con il mondo.

Certo, il rilievo che viene dato alle singolarità, alla Thom, e l'intendere il discreto in un ambito continuo, proprio come nel caso delle transizioni di fase di cui parlavo, ha permesso di apprezzare

meglio l'importanza delle strutture continue e di ottenere grandi risultati. Thom, con la sua teoria delle singolarità, è stato un maestro in questo: l'errore semmai è quello di assolutizzare tali risultati. D'altra parte sarei ancora più in disaccordo con una posizione che ipotizzi una priorità ontologica del discreto, al quale, io penso, non pertiene nemmeno una priorità di tipo cognitivo, non certo quella dell'azione, che è al cuore del nostro essere viventi, animali in primis.

Continuo e discreto sono due proposte di intellegibilità diverse che ci forniscono strutture causali differenti, diverse rotture di simmetrie, non dico complementari ma certo ortogonali. Una nuova filosofia della natura deve saper passare da una all'altra cogliendo l'arricchimento di intellegibilità che è proprio di entrambi (le macchine a stati discreti sono indispensabili a far scienza oggi). Quello che ho cercato di dire è che la biforcazione/frattura che si è prodotta tra, da una parte, le analisi dei fondamenti di Frege ed Hilbert, centrate, sia pure in modo diverso, sull'aritmetica, e, dall'altra, le rivoluzioni che sono avvenute in fisica, deve ora essere ricomposta tramite una filosofia della natura capace di coniugare entrambi i termini. Una volta operata questa frattura è però difficile ricomporla in maniera indolore ed i guai, in senso epistemologico, si vedono ancora oggi. D'altra parte questo è per noi un passaggio assolutamente necessario sia per darci un continuo forse più adeguato di quello di Cantor (in microfisica almeno), sia per inventare macchine nuove.

Considerazioni sui temi accennati si trovano nei seguenti testi:

(downloadabile da : <http://www.di.ens.fr/users/longo/>)

Longo G. "The mathematical continuum, from intuition to logic" in **Naturalizing Phenomenology: issues in contemporary Phenomenology and Cognitive Sciences**, (J. Petitot et al., eds) Stanford U.P., 1999.

Francis Bailly et Giuseppe Longo, **Mathématiques et sciences de la nature. La singularité physique du vivant**, Hermann, Paris, 2006 (introduzione in francese ed inglese, scaricabile).

Mathieu Hoyrup, Arda Kolcak, Giuseppe Longo. "Computability and the Morphological Complexity of some dynamics on Continuous Domains". Invited survey **TCS**, to appear.

Francis Bailly, Giuseppe Longo. "Randomness and Determination in the interplay between the Continuum and the Discrete". **MSCS**, to appear.

Francis Bailly, Giuseppe Longo. "Schèmes géométriques pour le temps biologique". Exposé thématique, Ecole **Logique et Interaction: vers une géométrie du cognitif**, Cerisy-la-salle, septembre 2006, à paraître.

Giuseppe Longo. "Critica della Ragion Informatica in Scienze della Natura". Lezione Galileana, Pisa, Ottobre 2006 (di prossima pubblicazione).

Longo, G. , Tendero, P.E. "The causal incompleteness of Programming Theory in Molecular Biology". A french version will appear as Conférence invitée, aux actes du colloque "**Logique, informatique et biologie**", Nice, 9-10 décembre, 2005, DeBoeck, Paris, 2007.