DE LA COGNITION A LA GÉOMÉTRIE

Giuseppe Longo
LIENS (CNRS) et Dépt. de Mathématiques et Informatique
ECOLE NORMALE SUPERIEURE
45, Rue d'Ulm, 75005 Paris
longo@dmi.ens.fr
http://www.dmi.ens.fr/users/longo

Introduction: Est-ce que les calamars font de la géométrie?[1]

Compte rendu du livre:
LES ANATOMIES DE LA PENSEE
par Alain Prochiantz
Odile Jacob, 1997.

"Un calamar rencontre un prédateur: mouvement de recul, agitation des tentacules, jet d'encre, mise à profit des quelques secondes ainsi données par l'aveuglement de l'attaquant pour une fuite éperdue et la recherche d'une cache." Est-ce que le calamar pense au cours de cette action? Cette question, posée explicitement au chapitre 11, motive, par son sous-titre même, le livre de A.P.. C'est drôle, mais très peu d'humains se posent cette question: ils se sentent tellement supérieurs, seuls dépositaires de la Pensée et de la Conscience, assis à la droite de Dieu et contemplants les Vérités Éternelles de La Mathématique. Dans son mouvement de recherche d'une cache, la plus proche possible, mais de grandeur et orientation adéquate, le calamar farait-il un 'raisonnement' géométrique?

Pour (poser les bases en vue d') une réponse à cette question, A.P. nous conduit tout d'abord par la main à travers les nouveautés de la génétique animale et, en particulier, de la génétique du système nerveux. La première partie du livre est construite de manière équilibrée entre vulgarisation et introduction technique: il faut toutefois un peu de patience au lecteur, pour pénétrer les mystères des organes *homologues* et de leur génétique. Il comprendra alors comment sont possibles ces changements évolutifs, qui transforment une nageoire pectorale en une main. Il apprendra également comment certains manipulations génétiques, encore plus surprenantes, transforment, chez la mouche drosophile (omniprésente dans le livre et dans les labos de génétique), une antenne en patte, au titre d'organes homologues. L'homologie, cette notion si importante en génétique, n'a rien à voir avec *l'analogie*: celle-ci ne dénote qu'une similitude de *fonction* (voila un exemple typique de chaîne d'analogies fonctionnelles: mon Ordinateur faisant les opérations logiques et arithmétiques comme moi - ce qui est absolument faux - fonctionne donc comme moi; et, puisque le raisonnement, en tant qu'extension des calculs logico-arithmétique, est une *fonction* indépendante de son support physique - encore plus faux - il pense comme moi; le cerveau, ou les horloges de Vaucanson, de Babbage ou Turing, ne seraient alors que des lieux *fonctionnels*, interchangeables, de la

---

[1] A paraître dans **Les Archives de Philosophie**.

pensée). Pour comprendre le vivant, souligne A.P., il faut aller bien plus loin des analogies fonctionnelles; l'homologie, par exemple, est un concept biologique complexe même chez ... la blatte, car le développement embryonaire de cet animal, à partir de la formation des organes homologues, introduit une dimension temporelle: les segments de son corps se spécifient dans un ordre temporel et spatial, chaque segment bourgeonneant à partir de l'autre, en acquérant son identité au moment de sa formation.

Temps et espace, voilà deux éléments clé dans la formations des embryons: A.P. nous donne maints exemples où l'information de position contribue à l'individuation et à la fonctionnalité des cellules de l'organisme. Au point que, par des expériences faites sur la souris, on sait que le cortex visuel déplacé dans une zone du cortex moteur se transformera en cortex moteur. Mais le rôle de la localisation se vérifie tout aussi facilement chez l'homme: l'analyse de l'information faite par le cortex cérébral utilise également un code spatial. A titre d'exemple, les neurones récepteurs d'une certaine odeur sont dispersés dans la mucose, mais leurs connexions convergent vers un seul glomérule: l'information qualitative concernant l'odeur est transformée en information spatiale. Plus généralement, c'est notre cerveau tout entier qui se forme selon des paramètres spatio-temporels, spécifiant la structure et la fonctionnalité des différentes parties. C'est ainsi que notre "intelligence du monde" dépend fortement du "codage", de la représentation spécifique qui en est faite dans le cerveau, car la géométrie du système nerveux et sa dynamique structurelle en sont au coeur.

Cerveau qui se forme, fonctionnalités neuronales qui se spécifient dans le temps: la plasticité cérébrale, voila l'autre grand enjeu. A.P. avance l'idée d'une protocarte de la structure cérébrale, sorte d' 'a posteriori' de la phylogenèse, qui serait un 'a priori' de l'ontogenèse. L'ontogenèse spécifierait le reste: une partie ou les détails des connexions, le chimisme neuronal, la forme des neurones changent dans le temps, y compris chez l'adulte. En fait, la protocarte également peut se modifier, pour peu qu'on sache l'identifier, au moins chez l'embryon, ou même dans la petite enfance: le raton qui joue possède un cerveau dont la structure fine est différente de celui du raton sans jouets.

Voilà alors l'hypothèse cruciale d'A.P.: l'individuation, qui se fait grâce à la plasticité cérébrale, est un élément de l'évolution des espèces. Les nématodes sont tous pratiquement identiques entre eux, car leurs deux cents ou trois cents neurones ont des connexions, un volume et un chimisme qui sont essentiellement fixés génétiquement. Quoique dotés d'un système nerveux central, ils ne peuvent réagir aux aléas de la vie qu'en se reproduisant, par milliers, et en espérant en des variants génétiques qui soient les mieux adaptés aux nouvelles conditions. Chacun d'entre nous, au contraire, essaye surtout de s'adapter avec son cerveau, autant qu'il le peut, grâce à ses 100 milliards de neurones plastiques, par forme et volume, et à leurs milliers de connections. La réponse évolutive des espèces possédant un système nerveux central 'important' se fait donc également au niveau de l'ontogenèse: les hommes, en particulier, utilisent le cerveau (pensent) en se rapportant au monde.

Or, pour mieux comprendre l'enjeu de la naturalisation de la pensée, tel que la biologie moderne (et le livre de A.P.) peut nous aider à le poser, je crois que, par une provocation duale, essentielle à la démarche scientifique, il faudrait renverser l'attitude commune et se poser aussi les questions suivantes: est-ce que les hommes pensent vraiment? Ont-il vraiment une conscience? D'habitude, on tend seulement à chercher comment, à partir de la 'matière', il est possible de parvenir à cette conscience parfaite ou absolue et à cette connaissance du monde, à la fois complète et décidable, qui 'sont' les nôtres (voir à ce propos les hypothèses de Laplace et Hilbert sur les mathématiques et les métamathématiques, respectivement, qui font encore largement partie du patrimoine des sciences et du sens commun). En fait, en dialoguant depuis quelque temps avec des biologistes du systèmes nerveux, je suis resté absolument épaté par la richesse et la complexité de notre cerveau, par son histoire évolutive, par son adaptabilité. Comment se fait-il qu'avec un cerveau si extraordinaire, on pense si mal et on connaisse si peu? Que même un normalien (sorti des classes préparatoires!) ne sache pratiquement rien et n'ait pratiquement aucune conscience de soi-même et du monde?

Un ami venu de Jupiter m'expliquait un jour son extraordinaire niveau de conscience, une conscience construite à partir de celle du corps. Pour pouvoir bouger sous le poids gravitationnel extraordinaire de cette planète, tout jupitérien a conscience du moindre mouvement cellulaire des muscles des ses 47 tentacules: il 'voit' et coordonne consciemment tout mouvement du flog (l'acide citrique qui forme son 'sang'), il perçoit distinctement le partage des tâches de son système nerveux. C'est ainsi qu'il arrive à avoir une maîtrise bien plus grande que nous de ce qui est pour nous 'inconscient': ainsi il peut apprécier consciemment, par exemple, la 'scène primitive' (Freud), à savoir le dévoilement du fait que ses cinq parents font l'amour (sur Jupiter il faut se mettre à cinq pour la reproduction, gravitation oblige). Tout cela entraîne le niveau extraordinaire de connaissance de la vie et de l'esprit, ainsi que de conscience, que l'on reconnaît aisément chez les jupitériens. Dès lors, qu'est ce qu'est notre conscience, mais aussi notre connaissance du vivant? A peine un peu supérieure à celle d'un calamar (par contre, les jupitériens ont développé très peu de maths: pour des raisons évidentes, ils comptent seulement jusqu'à 235 (= 47x5) - ils appellent 236 un 'cardinal indescriptible' - de plus, ils n'arrivent pas à lever le regard jusqu'à l'horizon et, donc, à concevoir l'infini).

Mais revenons à la thèse centrale de A.P., concernant les rapports entre l'individuation dans l'ontogénèse, la plasticité cérébrale et l'évolution des espèces. L'importance de cette thèse est énorme, car elle nous permet de donner un fondement biologique à l'hypothèse que notre 'je' se forme dans notre rapport au monde, avec ce qui est, et qui devient 'autre', au niveau de l'histoire, qu'elle soit collective ou individuelle. Nous ne sommes pas 'déjà là': grâce à notre plasticité cérébrale, nous nous spécifions dans et au même temps que notre milieu. En particulier, ceux qui sont 'différents' de nous, les noirs, les immigrés (les français pour moi), contribuent à la constitution de notre individualité humaine. La pensée, enfin, apparaît comme ce rapport adaptif de l'organisme à son milieu, comme émergeance de notre 'praxis' dans le monde. A commencer par les calamars, comme nous l'explique A.P., car il y a continuité dans la compléxification du système nerveux: nous avons des ancêtres communs qui ont contribué à constituer l'héritage phylogénétique de la protocarte cérébrale. Chez le calamar, il y a donc un "embryon" de pensée.

Quant à la géométrie, si en faire veut dire déduire des théorèmes à partir des axiomes de Hilbert, fondements ultimes de cette 'science pure', non, alors il est clair que les calamars ne font pas de géométrie. Si, au contraire, la géométrie est une de nos constructions conceptuelles qui émergent dans la praxis, dans la vie et dans l'histoire, et que nous la construisons dans notre rapport aux régularités du monde (ses symétries, ses homogénéités ...), si la géométrie trouve son origine (et son fondement) dans notre effort, en tant qu'êtres vivants, d'interpréter les perceptions et de les encadrer dans notre environnement, et si elle la trouve dans le mouvement et dans sa simulation-prévision mentale, ainsi que dans l'appréciation de certains invariants spatiaux (les formes), alors les calamars 'font' un embryon de cette géométrie qui sera la nôtre. Car l'évolution de la pensée, dans tous ses aspects, est parallèle à celle de la vie.

Riemann, Poincaré, H. Weyl, F. Enriques ont essayé de développer ces thèses, en cherchant dans le mouvement, dans la boucle sensori-motrice, dans la vue, dans notre vie dans l'histoire, ces 'actes d'expérience' sur lesquels nous construisons, grâce aussi au langage, les fondements et l'origine des mathématiques possibles. Mais maints philosophes et logiciens nous ont expliqué, au cours de ce siècles, et continuent de répéter, qu'il ne faut pas confondre fondement et genèse. En fait, celle-ci est une distinction fondamentale et fondatrice proposée par Frege, entre autres, et elle a été à l'origine de la théorie formelle de la démonstration, une des plus belles branches des mathématiques modernes, et de sa petite fille, l'informatique. Toutefois, l'insistance, en philosophie de la connaissance, sur cette distinction ne constitue aujourd'hui, qu'une limite aux analyses de nos formes de connaissance, car c'est précisement là où se touchent genèse et fondement que trouve son origine cette formidable construction conceptuelle que sont les mathématiques. En isolant certains éléments fondamentaux ou invariants de la pratique de la preuve, la théorie de la démonstration peut nous aider à faire les premiers pas vers une connection des fondements et de la genèse; mais il s'agit ensuite de l'enrichir par une analyse cognitive de ces mêmes invariants conceptuels qu'elle met en évidence, et qui forment un mélange très particulier de notre langage et de notre rapport à l'espace sensible.

Le langage donc, outil essentiel à la pensée humaine, mais également le toucher, les caresses des singes (et des hommes), le sourire, le dialogue entre cerveaux dans toutes ses formes: fort heureusement, A.P. sort du tout biologique et place la plasticité cérébrale comme un pont entre la vie et l'histoire de l'homme, entre la vie et les constructions conceptuelles communes. La pensée n'est pas déposée dans le cerveau, elle est dans le dialogue et dans l'histoire. Elle se constitue par cette praxis dans le monde qui, pour le biologiste du cerveau, laisse ses traces dans le système nerveux, grâce, en particulier à l'apparat sensori-moteur.

Cette toute dernière thèse, sur le rôle central du sensori-moteur, apparaît souvent dans les analyses des neurobiologistes: la plasticité s'observe essentiellement là où une 'rétroaction' est possible, c'est à dire, dans les activités cérébrales où la sensation stimule une action qui provoque à son tour une nouvelle sensation. Voilà les neurones corticaux associés aux doigts de la main gauche du violoniste qui augmentent en structure, en nombre et en connexions; voilà le danseur ou le pianiste qui "pensent aussi avec les pieds ou les mains", comme l'affirme A.P., dans le sens où ces activités dans le monde façonnent le cerveau et créent, chez l'artiste entraîné, une nouvelle unité corps-cerveau. Voila, plus en général, le "cerveau [considéré] comme compléxification de l'axe réflexe", et la structure différenciée du cerveau antérieur qui se forme en réponse à "la nécessité de lier des réflexes d'ordre sensori-moteur à d'autres modalités sensorielle".

A.P. nous conduit donc au seuil d'un immense enjeu: le "jeu" entre protocarte cérébrale, en tant que "mémoire" de l'espèce, et l'adaptation par individuation, basée sur la plasticité ontogénétique du cerveau qui garde les traces de l'expérience individuelle et rend possible la "mémoire individuelle". Cet enjeu est un des aspects centraux de la cognition humaine; il est le point de passage obligé de toute 'naturalisation' de la pensée, pourvu qu'on sache relier l'étude spécifiquement biologique à la pluralité des analyses des conceptualisations humaines et de l'esprit (origine et fondement du langage, des mathématiques, de la folie ...). C'est seulement dans ce dialogue de la biologie et des disciplines qui mettent en évidence les fondements et la dynamique (historique et individuelle) des différentes formes de connaissance et de construction conceptuelle, qu'on peut espérer comprendre leur origine, en particulier dans ce jeu des résultats de l'évolution phylogénétique et de la constitution de l'individu.

Finalement, l'ouvrage absolument remarquable d'A.P. nous plonge dans les conquêtes récentes de la neurobiologie, tout en nous donnant les outils pour commencer à comprendre comment la vie est *suffisante* à la formation de la pensée conçue comme un continuum évolutif qui conduit, à travers l'évolution et l'histoire, jusqu'à la nôtre (mais continu ne veut pas dire différentiable); une pensée prise pour ce qu'elle est, à la fois contingente et historique. Mais, peut-être, A.P. a-t-il également l'audace d'essayer de nous faire croire, en tant que biologiste, que la vie est *nécessaire* à la pensée; cette vérité lapalissienne que certains developpements de l'idéalisme et du formalisme nous ont fait oublier.

Mouvement, Espace et Géométrie[2]

A partir du livre
LE SENS DU MOUVEMENT
par Alain Berthoz,
Odile Jacob, 1997.

«La perception n'est pas une représentation : c'est une action simulée et projetée sur le monde. La peinture n'est pas un ensemble de stimuli visuels : c'est une action perceptive du peintre qui a traduit, par son geste, sur un support contraignant, un code qui évoque immédiatement, non pas la scène représentée mais la scène qu'il a perçue. La peinture nous touche parce qu'elle reproduit à l'envers le miracle des images de Lascaux. Je regarde le tableau à la place du peintre qui a projeté son activité mentale. Le génie est celui qui me guide à percevoir comme lui.» [A.B., p.147].

Le livre d'A.B. (Alain Berthoz) est tout d'abord une analyse de la cognition humaine du point de vue de "l'action du corps, avec son cerveau, dans le monde"; pour A.B., même la perception est une action simulée [p.17]. *Anticiper, deviner, parier* : voila le fondement et le paradigme quotidien au coeur de notre "praxis", en fait de notre intelligence; cette intelligence qui trouve son origine dans l'évolution des espèces, dans la phylogenèse, mais aussi dans notre histoire humaine et dans l'ontogenèse (la formation de l'individu). Le pari est de trouver par ce même parcours le *fondement* et non pas seulement l'origine, ajoute le mathématicien que je suis, aussi de la plus "conceptuellement stable" de nos tentatives de description du monde : les mathématiques. J'essaierai d'esquisser cette thèse, tout en analysant ce livre très intéressant et, pour ce que je peux dire dans mon expérience bien moindre en neurophysiologie, très original.

1 - Prémisse : Poincaré et le formalisme.

«Localiser un objet en un point quelconque signifie se représenter le mouvement (c'est-à-dire les sensations musculaires qui les accompagnent et qui n'ont aucun caractère géométrique) qu'il faut faire pour l'atteindre» ... «un être immobile n'aurait jamais pu acquérir la notion d'espace puisque, ne pouvant corriger par ses mouvements les effets

[2] A paraître dans **Intellectica**, n. 25, 1997.

des changements des objets extérieurs, il n'aurait eu aucune raison de les distinguer des changements d'état». Ces deux citations de Poincaré marquent le début du livre de A.B. [p. 44] : il n'y a pas une théorie géométrique "a priori" du monde, donnée par une axiomatique formelle. C'est plutôt la présence des corps, les «solides naturels» et notre propre corps, notre mouvement et les changements d'état qui constituent l'espace et qui nous le font appréhender; les axiomes ne sont que «des définitions déguisées», dont on choisi les «plus commodes» [Poincaré,1902,p.75-76].

Je partage entièrement l'enthousiasme de A.B. pour Poincaré, ce mathématicien de génie, toujours à redécouvrir : son analyse du "problème des trois corps" (1880-85) a bouleversé la physique laplacienne (et sa philosophie), mais il fallut attendre l'école russe des années '30 et '60, et puis les années '70 en France et aux USA, pour que les esprits acceptent de dépasser l'hypothèse du déterminisme et de la connaissance "*décidable et complète*" du monde physique que, selon Laplace, les mathématiques fourniraient. Ses remarques très informelles et incomplètes sur les fondements des mathématiques, de la proprioception de l'espace à la nature de l'induction arithmétique sont tout aussi importantes et profondes, mais, dans mon opinion, elles n'ont pas reçu l'attention qu'elles méritent, car elles ont été balayées par la rigueur mathématique de la Logique Mathématique de Frege et Hilbert, en particulier par ce sens de l'indépendance de la construction mathématique de toute signification que l'école hilbertienne a su nous donner : le fondement et la certitude sont dans la manipulation de règles de déduction finitaires sans signification et dans la preuve de leur cohérence formelle. (Une règle est une suite de symboles avec une structure syntactique "bien formée", en hypothèse, et une autre suite de symbole bien formée en tant que conséquence; le passage des hypothèses aux conséquences est purement mécanique: des hypothèses "A" et "$A \Rightarrow B$" on déduit "B" sur la base seulement de la *forme* de ces suites de symboles, indépendamment de toute signification.)

Par ces moyens, une axiomatique logico-formelle et ses règles de déduction, Hilbert visait à fournir un cadre formel "*décidable et complet*" (ainsi que démontrablement cohérent) pour les mathématiques: à partir de l'Arithmétique, la déduction formelle aurait dû permettre de décider toute proposition mathématique. L'hypothèse de Laplace, entre mathématiques et physique, est donc reprise par Hilbert, au niveau du rapport entre *méta*mathématiques et mathématiques: les systèmes formels doivent "recouvrir complètement" les mathématiques comme les mathématiques laplaciennes aurait du "recouvrir complètement" le monde physique. Et le siècle en a été marqué : la rigueur mathématique coïncide avec la "rigueur formelle" (la possibilité, même seulement à l'état potentiel, d'un cadre axiomatique et d'une déduction purement formelle certifie la correction de tout théorème); la géométrie devient algèbre, si possible sans référence à l'espace; le langage ainsi formalisé, détaché de son *sens* (géométrique, en particulier), permet d'inventer, à partir des années '30, des "machines pour déduire", pures manipulatrices de symboles sans signification (ces ordinateurs digitaux qui ont changé notre vie). L'invention de ces machines est une conséquences extraordinaires d'idées remarquables, accompagnées parfois par une hypothèse philosophique qui n'est pas nécessaire pour ces developpements, mais qui a eu un très grand succès : *toute* l'intelligence humaine est "logico-computationnelle", ou peut-être reproduite par une machine qui élabore mécaniquement des suites finies de symboles, des 0 et des 1 qui code la *forme* de formules logiques.

Une fois que cette étape a été franchie et les paradigmes pour la connaissance du logicisme et du formalisme nous ont donné, entre autre, ces machines où le "raisonnement", en tant que déduction linguistique et formelle, est très bien réifié, on peut reprendre les idées de Poincaré sur les fondements des mathématiques (ainsi que de Riemann, Helmotz et Mach, au moins pour ce qui en est à la géométrie, voir [Boi,1995]) et laisser aux ordinateurs la tache des déductions formelles (malheureusement, en pratique, même pour cela il faut toujours les accompagner, par des systèmes interactifs de preuve). Bref, on peut reprendre ce dialogue, pour analyser les fondements de la connaissance *et* des mathématiques avec ces biologistes, ces physiologistes, comme A.B., qui sont en train de comprendre ce qu'est notre présence, avec le corps, dans le monde, ce qu'est cette unité de notre être vivant et pensant. Car chez le vivant on ne retrouve pas la séparation entre "logiciel" et "matériel", cette idée révolutionnaire des Machines de Turing et des ordinateurs digitaux, mais qui n'a rien à voir, en particulier, avec la réalité biologique de notre cerveau dans son habitat préféré : le corps des hommes vivants dans le monde. Voici les motivations de ce compte-rendu et des réflexions que le livre de A.B. inspire.

2 - La vision et l'action.

Revenons donc au livre de A.B.. La thèse centrale de ce livre est que la perception est essentiellement multisensorielle : le cerveau *sélectionne* et *intègre* une pluralité de sensations. La sélection et l'intégration sont largement conditionnée par l'action.

La vision, par exemple, est présentée comme une sorte de "prélèvement visuel" qui n'échappe pas à la sélection motivé par l'action. Elle est un des phénomènes physiologiques et cognitifs les plus complexes et son analyse parcourt presque tout le livre, en particulier les chapitres 2,3,9 et 10. En fait, l'interprétation du stimulus visuel utilise grandement le système sensori-moteur et elle se situe a plusieurs niveaux, corticaux et sous-corticaux (le cortex cérébral est la partie extérieure et plus récente du cerveau; les activités conscientes ont lieu dans le cortex; le reste y est "en dessous"). Résumons-en quelques aspects. La stabilisation du regard est réglée, grâce à six muscles oculaires et trente de la tête, par le système vestibulaire (partie de l'oreille interne qui assure les fonctions d'équilibration) : les mouvements du crâne et du corps sont compensés pour nous donner des images stables sur la rétine. Les saccades réflexes et volontaires nous font explorer le monde, comme si on "touchait" les objets de plusieurs points de vues («La vision est palpation par le regard», Merleau-Ponty, cité par A.B., p.147). Cette exploration intègre à tel point l'action musculaire et le signal visuel que, pour supprimer l'effet de glissement de l'image sur la rétine, le signal qui part de celle-ci au cours d'une saccade, gérée par les muscles oculaires, est inhibé. Cette double intéraction entre vision et action est matérialisée par des boucles neuronales qui renvoient (ou envoient ailleurs) les signaux d'origines visuelles : elles règlent, modifient, inhibent les actions et les signaux qui arrivent. Enfin, la vision sous-corticale joue un rôle très important (et souvent ignoré dans le diagnostic médical des déficits visuels), en particulier dans la détection du mouvement. Il peut en fait arriver que, malgré la destruction du cortex cérébral visuel, la perception du mouvement subsiste : une expérience surprenante d'enfants malvoyants qui jouent au basket est ainsi racontée [p. 59]. Ces enfants, qui n'ont pas de vision consciente, gardent des capacités innées, arcaïques, de détection et de prévision du mouvement, que nous partageons avec maints animaux, capacités tout à fait remarquables : elles sont essentielles à la capture d'une proie, elles peuvent très bien servir à attraper une balle. On les utilise quotidiennement, dans un jeu complexe mais immédiat de suivi, d'analyse et de prédiction du mouvement, qui ne serait pas représenté explicitement, dans un système interne d'axes cartésiens, et développé par des *calculs digitaux* pour la reconstruction des trajectoires, mais plutôt, simulé de façon *analogique*. Or, c'est bien l'Informatique, dès sa naissance, qui a mis en évidence ces differentes façon de représenter le monde : on peut le coder par un système de symboles (des suites fines de 0 et 1, par exemple) ou le representer, coder si l'on veut, par un "phénomène analogue" (un courant éléctrique qui simule analogiquement un flux d'eau).

On apprécie, par exemple, la vitesse et l'accélération de la balle qui arrive par l'appréciation de l'élargissement de son image sur la rétine, sans nécessairement reconstruire une trajectoire, au niveau cortical; on précède le parcours d'une proie, par une saccade, et la saccade elle-même fournie une simulation analogique du parcours à suivre pour capturer la proie : *elle "trace" la trajectoire de poursuite*. L'élargissement de l'image de la balle qui approche et la saccade oculaire qui précède et prépare un mouvement, une poursuite, sont "analogues" au phénomène représenté, ils ne sont pas et ne paraissent pas demander une représentation explicite du phénomène (c'est à dire, un codage "symbolique" dans un referentiel cartésien absolu), pour qu'il y ait action. Je pense que, à ce niveau, l'action intelligente est justement dans ce jeu de "codages" ou, plus précisément, dans le passage d'une représentation analogique à l'autre. L'élargissement de l'image de la balle ou de la pierre sur la rétine est un représentation analogique de la vitesse de l'objet et ses variations en codent l'accélération : le bras qui se lève pour rattraper ou pour nous protéger est la transposition de cette représentation sur un autre système de référence spatial, celui des muscles et des articulations. C'est à dire, on "simule", de façon réflexe, surtout suite à l'apprentissage, l'élargissement sur la rétine *par un geste*, en tant que représentation analogique (et "duale" dans ce cas) de cet élargissement dans un autre référentiel, celui du bras; moici une forme d'intelligence primaire, mais fondamentale, de notre intéraction au monde. On reviendra sur ce thème spécifique en parlant des seuils musculaire et du codage de l'espace qui leur est relié.

La poursuite d'une proie, voila un autre défi clé pour la survie. Elle est toutefois préparée d'une façon bien différente, par la poursuite oculaire, chez les primates et chez d'autres mammifères. Le chat ou le lapin peut seulement faire des "sauts" d'un point à l'autre de l'espace visuel [p. 70] et les saccades paraissent donc fournir des points successifs dans l'espace pour la prédiction du mouvement : c'est notre fovéa de primate (la partie centrale de la rétine), apte à une analyse plus fine, peut-être de nos activités manuelles, qui oblige l'oeil à un suivi continu, pour garder l'image dans un focus plus précis.

L'interaction des systèmes visuels et vestibulaires se présentes dans maintes autres tâches. On reconnaît plus rapidement, par exemple, une image symétrique si son axe de symétrie est vertical ou horizontal : par contre, en microgravité (les astronautes), quand le système vestibulaire ne sait plus nous donner la verticale, on perd cette facilité dans l'indentification des symétries [p.82].

3 - Symétries et espaces euclidiens.

Au sujet des symétries, il y aurait une réflexion à faire, qui nous ramène à Poincaré. Pour Poincaré, le choix de la géométrie euclidienne est le plus "pratique" dans nos descriptions du monde (quoique Poincaré lui-même ait proposé, comme Einstein, de représenter le monde physique dans un cadre non-euclidien, il est conscient que les représentations euclidiennes sont plus adaptées à notre action). Je voudrais maintenant ajouter une remarque qui peut donner une des motivations pour la préférence que nous accordons à

Euclide, dans la pratique quotidienne.

Si vous prenez une droite sur le plan et un point en dehors de la droite, le tracé d'une et une seule droite "parallèle" à la droite donnée est, intuitivement, celui qui donne plus de symétries. Faites le dessin : en plaçant une et une seule parallèle par un point à une droite donnée, on peut construire un axe de symétrie parallèle et entre les deux droites et une infinité d'axes orthogonaux. Si on s'imagine avoir plusieurs droites parallèles par ce point (Lobacevskij) ou aucune (Riemann), on perd, *pour un regard naïf*, tous les axes de symétrie orthogonaux sauf un, ainsi que l'axe de symétrie parallèle. Ceci est vrai pour notre regard immédiat, pour le dessin sur la feuille, non pas du point de vue mathématique, où la situation est plus complexe : si on décrit les géométries par des groupes de transformations, elles diffèrent pour certains automorphismes (les homothéties sont des automorphismes de la géométrie euclidienne seulement, car seulement cette géométrie est invariante par élargissement et rétrécissements), mais elles possèdent des groupes isomorphes d'isométries (isomorphismes topologiques ou algébriques selon les cas). Or les isométries du plan sont engendrées par les réflexions, c'est-à-dire par les symétries par rapport à une droite [Iversen,1989]; donc, dans les trois géométries, les symétries ont une expressivité *algébrique* comparable, et elles ne permettent pas de distinguer, mathématiquement, les trois systèmes de géométrie.

Voila donc une cause possible de cette préférence *pratique* que nous accordons au cadre euclidien, tandis que *l'analyse possible* des symétries, en géométrie algébrique, des différentes géométries justifie leur "indifférence théorique" pour la physique, qui peut donc choisir le système empiriquement le plus plausible. Ce sont les symétries sur lesquelles tombe notre regard, celles de notre corps, de notre action, de notre mouvement, ces symétries qui sont dans le monde et que nous cherchons et projetons dans le monde, qui suggèrent le choix d'une *géométrie de l'action immédiate*, du geste, sans qu'il y ait une *priorité mathématique* dans cette préférence.

4 - Représentations et codage.

Toutefois le choix et l'usage de représentations mathématiques, fortement basées sur les symétries, comme sur d'autres formes de régularité, ne doit pas nous faire croire que ces représentations sont explicitement reconstruites dans le cerveau : c'est un parcours évolutif et historique très long qui nous a amené à "voir" les objets comme représentés dans un espaces cartésien. En fait, pour A.B. il n'y a pas de reconstruction centralisée de l'espace extérieur, mais une intégration multisensorielle de différents référentiels [p.90], qui permait de simuler, par une "unité analogique", dans le sens que je disait ci-dessus, l'espace de la perception.

Composante essentielle de cette intégration est la proprioception musculaire : des seuils variables nous informent à tout instant de la position et tension des muscles. Ces seuils permettent de simuler directement l'espace de notre mouvement : ils constituent un référentiel implicite, aussi efficace qu'un système de coordonnées; ils nous donnent, pour une certaine valeur fixée selon les circonstances, le point d'origine du système de référence [p. 123]. Alors, l'espace n'a pas besoin d'être représenté de façon explicite, dans un système de coordonné cartésienne ou par un codage pixel par pixel des points de l'espace : le seuil musculaire relatif à un certain angle du bras, par exemple, est lui-même le référentiel ou le codage d'une distance. C'est ainsi que, quand on fait un mouvement pour saisir un objet, le référentiel est constitué par l'espace articulaire, donné par les seuils musculaires, y compris ceux des muscles oculaires. Bref, dans cette hypothèse, que je développe à partir des remarques de Berthoz, le référentiel spatial est analogiquement reconstruit dans la proprioception des seuils musculaires, dans la mémoire vestibulaire des accélérations subies, dans l'évaluation analogique, par l'image sur la rétine, des mouvements des corps autour de nous. Le passage d'une représentation analogique à l'autre, l'intégration, par comparaison et constitution d'invariants (l'aperception de la stabilité de certains phénomènes), est le premier élément constitutif de cette intelligence qui nous permet l'action dans le monde et qui, en fait, a sa *genèse* dans notre action dans le monde, dans la pluralité de nos representations du monde et de notre action. Je pense donc que cette toute première forme d'intelligence, le bras qui se lève et saisi la balle qui s'approche, réside tout d'abord dans *le transfert* de la représentation analogique de la balle, de sa vitesse et de son accélération sur la rétine vers une autre représentation analogique, celles des seuils musculaires, qui simulent la direction, la vitesse, l'accélération de la balle dans leur propre système de référence, celui des articulations du bras. L'intelligence est loin d'être indépendante des codages, tout au contraire elle se construit tout d'abord comme *réseaux de codages* ou de représentations analogiques; elle est acquise par une pratique de l'action dans le monde, sur un corps et une protocarte cérébrale qui rendent ce réseau possible. La pratique de l'invariance des objets du monde par rapports à la pluralité de nos référentiels et de nos codages nous permet de construire ou concevoir, nous donne accès après coup à cette "invariance" ou stabilité qui sera propre de nos représentations conscientes du monde, celles du langage et spatiales par exemple, jusqu'aux constructions conceptuelles les plus stables, les plus invariantes, celles des mathématiques.

La capacité de changer de référentiel est aussi analysée dans d'autres expériences, comme celle du "rôtissoire" : le sujet est couché à l'horizontale et tourne à vitesse constante suivant un axe de rotation perpendiculaire à la gravitation terrestre (et qui le traverse de la tête aux pieds). «Si on lui presse les pieds, le sujet a soudain l'impression de basculer, que son corps est maintenant vertical et qu'il tourne sur lui même en position debout. Si on lui presse sur les fesses, il a l'impression d'être assis et de tourner sur une chaise. ... Dans ces cas, les informations tactiles déterminent le référentiel dans lequel s'effectue la rotation» [p. 116].

Donc notre *sens* de l'espace, et, j'ajoute, l'émergence d'un *concept* mathématique d'espace, est loin d'être une affaire du cerveau à lui seul, mais il est dans le rapport entre cerveau et corps : le corps aussi, du système vestibulaire aux muscles des yeux ou des bras, à la peau, participe à la représentation de l'espace et du mouvement et contribue à en constituer la mémoire, avec ses référentiels spécifiques. Bref, nous n'aurions pas dans la tête une représentation à trois dimensions de l'espace dans laquelle insérer les représentations objets, ni un codage de celui-ci par des suites alphanumériques, pixel par pixel, comme sur un écran de télévision ou dans la mémoire d'un ordinateur digital, mais l'espace serait inscrit dans la mémoire de notre action, en tant qu'évaluée par les tensions musculaires, nos saccades oculaires, les accélérations subies par système vestibulaires etc..

Je voudrais essayer de comprendre comment ces différentes conceptions de nos représentations de l'espace peuvent avoir un rapport à des approches aux fondements des mathématiques qui ont marqué notre siècle. On exclus pour le moment l'idée que l'on ait une représentation tridimensionnelle explicite du monde dans la tête, une sorte de maquette cartésienne à trois dimensions composée de neurones, car elle semble présupposer un homoncule qui la regarde. Essayons plutôt de comparer l'idée que A.B. me paraît nous proposer à cette idée d'un espace absolu, une structure unique où tout insérer et à celle du codage "symbolique", par des 0 et 1 par exemple, qui représenterait toute forme d'intelligence dans nos neurones, y compris celle de l'espace physique, pixel par pixel, et l'élaboreraient en tant qu'information alphanumérique.

Je voudrais alors rappeler un des grands résultats *négatifs* de la Théorie des Ensembles (il y en a eu d'autres ensuite) dû à son inventeur : Georg Cantor. Un résultat négatif, par rapport au tentatives de proposer la Théorie des Ensembles comme fondement ultime des mathématiques et l'on impose axiomatiquement (comme on fait au moins depuis l'axiomatique hilbertienne de la Géométrie) une correspondance parfaite entre le continu des nombres réels et celui de l'espace.

Cantor démontra, vers 1877, qu'on peut établir une correspondance bijective entre la droite réelle et le plan cartésien. Il en fut bouleversé : ai-je détruit, se demanda-t-il, la notion cartésienne de coordonnée, en permettant de coder par une seule dimension le plan bidimensionel? Dans une lettre, Dedekind lui expliqua son erreur, dans l'interprétation de ce théorème remarquable : vous introduisez dans la correspondance, lui écrit-il, une «discontinuité à donner le vertige». En fait, toute correspondance bijective entre la droite et le plan fait perdre la structure métrique et topologique du plan : deux points proches de la droite (ou du plan) sont transformés, par cette correspondance, dans des points arbitrairement éloignés du plan (ou de la droite). Bref, elle n'est pas un isomorphisme d'espaces métriques ou topologiques, mais seulement une correspondance point-par-point, tout ce que la catégorie des ensembles peut nous donner. Pour cette raison, elle fait perdre le sens même de l'espace cartésien : la notion de distance, de vecteur, en fait de voisinage. Le théorème de Cantor est donc un résultat négatif : il nous dit que la Théorie des Ensembles est un cadre fondationnel insuffisant pour les mathématiques, car elle est tout d'abord une théorie des ensembles de points ou "tout se fonde" sur les points. En mathématiques, il y a *en premier lieu* des structures (algébriques, métriques, topologiques etc.), tandis qu'en Théorie des Ensembles celles-ci sont "superposé", chaque fois ad hoc, par rapport au coeur de la Théorie elle-même, les points sans dimension ni structure, dans son univers absolu de référence, la collection de tous les ensembles. Heureusement, grâce à la Théorie des Catégories, on a, depuis 50 ans, un excellent complément aux carences de la Théorie des Ensembles : dans cette théorie, on développe les mathématiques selon la structure analysée; elle ne se base pas sur un seul grand univers de référence, a priori et "sans structure"; dans un catégorie, la notion de "point" est possible, comme notion dérivée, comme en Géométrie où on peut la dériver en tant qu'intersséction de deux lignes (voir [Longo,1998]). En Théorie des Catégories on n'aurait même pas conjecturé le théorème de Cantor, car le plan et la droite y apparaissent dans les "bonnes catégories", avec leur structure spatiale, leur notion de distance, leur "norme", comme le monde de nos mouvements : dans ces catégories, le plan et la droite réels sont loin d'être isomorphes.

Or, l'approche proposée par A.B. me paraît se relier à une vision structurée (catégorique) de la représentation de l'espace pour deux raisons : l'espace dont il nous parle est toujours structuré par le geste, le mouvement et il n'est jamais absolu, mais relatif à la structure qui intéresse. En fait, *l'analogie reconstruit l'essentiel (la structure spatiale intéressante) du phénomène simulé*, pour l'action. Le référentiel modulaire des seuils, des saccades, du système vestibulaire, du tact, est choisi et modifié selon la structure de l'espace; il est fonctionnel à l'action du moment : la saccade qui simule la course de la proie ou précède la poursuite, le mouvement du bras qui simule le déplacement de l'objet à saisir, préservent exactement la structure qui intéresse de l'espace.

Un autre grand résultat négatif en mathématiques se base aussi sur une technique de codage : les théorèmes d'incomplétude de Gödel, dont le coeur est le "lemme de représentation", disent que, dès qu'une théorie peut coder sa propre métathéorie, alors cette dernière n'est pas assez expressive, dans le sens qu'elle n'arrive pas à démontrer la cohérence de la théorie en question. Bref, ils montrent l'insuffisance des métathéorie codables.

Or, il me semble que ces résultats surprenants, mais négatifs, de Cantor et Gödel, qui soulignent les problèmes que posent les codages, ont plutôt fourni un paradigme, plus au moins implicite, pour les maintes tentatives de coder toute forme de perception et d'intelligence humaine, y compris notre intelligence spatiale, de "façon linéaire", comme en transférant toute l'information sur une droite ou par des suites finies de symboles sans signification, point par point, pixel par pixel, de manière absolue, indépendamment de la "structure" de l'intelligence en question (par exemple de son rapport à l'espace par des référentiels spécifiques). C'est-à-dire, on a pris ce genre de résultats comme point de départ de théories "fonctionnalistes" qui travaillent "à codage symbolique près" (ou supposent l'indifférence du codage) et partent de l'hypothèse que : «Intelligence ... is effectively defined as that which can be manifested by the communication of discrete symbols» ([Hodges dans Herken,1992]). Et, malgré les maints succès dans la conception de systèmes experts et de systèmes interactifs de preuve, centrés sur les langages et la déduction formels, donc sur l'élaboration de suite discrètes de symboles, les robots qui représentent aussi l'espace dans un référentiel cartésien absolu et/ou le codent pixel par pixel, en développant ensuite des calculs symboliques monstrueux pour faire un pas, continuent à trouver des difficultés immenses dans leur moindre action, tout en étant censés, par ces méthodes, simuler l'homme ou l'animal dans son mouvement intelligent. Par contre, le physiologiste nous dit deux choses fondamentales : d'abord, le rôle essentiel des référentiels structurés, qui dépendent des contextes et de l'action; deuxièmement, qu'il y a une intelligence sous-corticale du mouvement, qui ne possède pas de représentation explicite, encore moins symbolique.

D'autre part, si on interprète différemment ces grands "théorèmes de codage", les mathématiques peuvent nous enseigner que le codage n'est pas toujours "transparent", tout comme il n'y a pas d'isomorphisme (codage) entre droite et plan qui préserve la structure qui importe (Cantor et Dedekind) et que toute intelligence métathéorique codable est très peu expressive (Gödel). Pour résumer, dans mon interprétation, les bijections avec lesquelles on prétendrait coder toute forme d'intelligence par des suites discrètes de symboles, sur n'importe quelle machine, font perdre l'essentiel de l'intelligence, tout comme la droite ne peut pas contenir toute l'information du plan; de façon similaire, en Logique, Gödel nous dit que les codages arithmétiques ne saisissent pas les métathéories (infinitaires, mais tout à fait "intelligentes" et humaines) qui prouvent la cohérence.

En générale, ces codages font perdre le *sens*, qui dépend du contexte, de notre corps, de nos espaces d'êtres vivants et d'humanité, y compris la structure de l'espace physique et le but de l'action. En particulier, la distance dans l'espace, ce vecteur qui est mon bras tendu, qui est mon mouvement, la notion de voisinage sont perdus dans le codage linéaire, comme l'avait déjà expliqué Dedekind à Cantor : le geste dans l'espace pluridimensionnel, le *sens du mouvement* (pour Poincaré, localiser un point dans l'espace, c'est s'imaginer le mouvement qu'il faut faire pour s'y rendre) font directement partie de nos formes de reconstruction du monde et d'intelligence, dans la spécificité de notre structure physiologique et ne passent pas par un représentation absolue et explicite, encore moins par un codage symbolique. J'osais même dire que la toute première forme d'intelligence est dans le passage d'un codage (ou, mieux, représentation analogique) à l'autre, comme dans l'opération de capture d'une balle qui arrive, ainsi que dans l'intégration des différents codages : l'intelligence *est* ou se *forme* dans ce réseau interconnecté de représentations neuronales spécifiques et dans la constitution successive d'invariants conceptuels, à partir de l'intégration multisensorielle. Et la constitution de ces invariants est au coeur, comme j'essaierai de dire, de nos constructions mathématiques, en fait de leur *fondement*, en tant qu'analyse d'une genèse.

5 - Intégration multisensorielle.

«Une propriété fondamentale de l'intégration multisensorielle dans le colliculus [partie du mésencéphale] est la suivante : c'est le champ récepteur qui est la référence pertinente pour l'intégration multisensorielle et non pas l'espace extérieur. La fusion des capteurs se fait dans l'espace des champs récepteurs et non pas en reconstruisant centralement l'espace cartésien extérieur» [p.90]. Remarque difficile à interpréter : en partie, elle reprend les observations ci-dessus sur la simulation et la prévision spatiale comme précédant toute représentation explicite. On y retrouve aussi le problème de l'intégration multisensorielle : est-ce la pluralité des formes de proprioception et de perception qui donne une "synthèse" (une moyenne ou somme vectorielle) de la situation du monde ou y-a-t-il un «schéma corporel ... interne qui est modulé ou modifié suivant la configuration des capteurs»? Car il n'y a pas «un seul référentiel égocentré, mais de multiples représentations du corps», d'où le problème de l'intégration dans un seul schéma corporel de plusieurs sous-système neuronaux locaux [p. 123]. La pluralité des référentiels extérieurs paraît permettre au cerveau une sélection de la tâche à accomplir, en modulant ce schéma, en accord avec les remarques de la section précédente.

Le mécanisme d'intégration de ces simulations de l'ego et du monde est aussi rendu possible par un phénomène remarquable : les "fenêtres temporelles". Le réseau neuronal du culliculus élabore une mémoire qui maintient la sensibilité des neurones multimodaux pendant un certain temps : on superpose alors le chant et la vision d'un oiseau qui chante loin, malgré la différence de vitesse de propagation du son et de la lumière [p. 91]. Des phénomènes similaires peuvent avoir lieu pour la proprioception : un choc simultané sur différentes parties du corps est perçu en tant que tel grâce à un jeu similaire des fenêtres temporelles.

Cette intégration des stimuli dans un référentiel unique, dont la gestion de ces retards est un exemple, est en fait aussi construite dans l'ontogenèse et non pas seulement héritée par la phylogenèse, car le corps se prolonge aussi dans nos outils : on sent la texture du papier au bout du crayon et non pas sur la main qui tient le crayon; le pilote expert sent les roues de l'avion toucher le sol, comme s'il s'agissait de ses propres pieds [p.108]. On construit, par la pratique, souvent difficile et longue, des nouveaux référentiels spatiaux et on les intègre. Et, même dans ces cas acquis, on choisit les entrées sensorielles en fonction du contexte [p. 242].

Un autre aspect surprenant de l'intégration multisensorielle est le suivant. Certains neurones du putamen (une partie du "striatum" cérébrale) s'activent aussi bien par la stimulation tactile d'une partie du corps que quand le sujet voit un objet *s'approcher* de la même partie du corps [expériences sur le visage des singes, p. 95] : l'activation de ces neurones ou groupe intégré de neurones est une façon concrète et profonde d'assurer la prévision, par une intégration multimodale.

Prévision et anticipation : voila deux éléments essentiels de la (sur)vie d'un être vivant dans le monde, soulignés à maintes reprises par A.B.. La prévision est essentiellement passive, l'anticipation est active et contribue à constituer le futur. Et le présent, car le présent est une "rétention" (modulation du passé et du présent) et une "proténtion" (constituant du futur et qui constitue aussi le présent). En fait, pour le physiologiste, *la perception est fonction non pas tant de l'intensité d'une stimulation que de la concordance de celle-ci avec une hypothèse faite par le cerveau* [p. 61, p. 102]. De plus,n mémorise cette perception, qui dépend donc d'une prévision, pour prévoir et agir. Mémoire de trajets qui est dégradée en cas de lésions vestibulaires [p. 130]. Mémoire "vestibulaire", car le cerveau garde une mémoire directe du mouvement perçu par le système vestibulaire [p. 131], de sa vitesse et de son accélération; bibliothèques de trajectoires, de formes, de visages. Une expérience met en évidence la mémoire des saccades oculaires et vestibulaires : après une rotation dans le noir, on retrouve une cible en parcourant à l'envers, par une saccade oculaire, l'angle enregistré par les canaux semi-circulaires [p. 131]. En fait, on prédit où se trouvera la cible. Encore une fois Poincaré avait eu une belle intuition à ce sujet, en soupçonnant le rôle du jeu entre mémoire et prédiction, en particulier pour le mouvement : «Connaissant l'accélération du mouvement de rotation de la tête à chaque instant, nous en déduisons, par une intégration inconsciente, l'orientation finale de la tête par rapport à une certaine orientation initiale prise comme origine» [cité à p. 135].

6 - Mémoire et Mathématiques.

Mémoire du mouvement, de la vitesse et de l'accélération; bibliothèques de trajectoires. Une question que je me pose est la suivante. Est-ce que cette mémoire des courbes possibles ou optimales est à la base de "l'interpolation" de points ou d'un trait incomplet par une ligne? L'école gestaltiste nous a donné maints exemples surprenants de ces ensembles de points, éparpillés plus ou moins régulièrement dans l'espace, de lignes incomplètes, qui nous rappellent un triangle, un carré ou un contour qui courbe en douceur et que nous interpolons ou complétons, selon leur structure dans l'espace, par des droites ou des "splines", lignes mathématiquement optimales, comme est aussi optimale la "courbe mathématique de poursuite" de l'animal qui chasse. Indices spatiaux, ces points, et de mémoire, ces trajectoires, que nous rassemblons dans une construction, indépendante du souvenir spécifique et qui nous fait "voir" ces images parfaites de la géométrie élémentaire. Le segment que nous "voyons" entre deux points, les lignes avec lesquelles nous interpolons des ensembles de points ou des lignes incomplètes, sont des courbes optimales ou continuent les lignes selon leur courbure. *Le triangle, le carré, le cercle mathématiques* ne sont peut-être pas des "généralisations" (que veut dire ce mot dont on abuse?) de la vision immédiate des pierres rondes ou carrées, comme nous proposaient les empiristes, mais *ils sont des reconstructions, à l'aide de la mémoire, d'une pluralité d'actes d'expérience spatiale : les lignes interpolant des points sont les traces mnésiques de trajectoires "parfaites", en tant qu'optimales, dans l'espace de nos mouvements*. C'est l'expérience de trajectoire, vécue ou imaginée, dans l'action de poursuite, par exemple, que nous projetons sur l'image incomplète.

La *cohérence* et l'*objectivité* de la construction conceptuelle que, ensuite, nous proposons, la géométrie dans ce cas, se fondent sur l'efficacité de notre action dans le monde (car le monde, ses symétries, sa connexion, ses régularités s'imposent à nous ou "font résistance", quand nous agissons ainsi que quand nous proposons une théorie) et sur *l'intersubjectivité*, en tant que comparaison avec la construction d'autrui, ou en tant que "acte de construire ensemble" par le langage, le dessin, au cours de l'histoire. Mais la géométrie n'est pas seulement une *émergence* de la praxis, de notre rapport actif et collectif au monde, elle trouve aussi son *fondement* dans celle-ci, car on ne peut pas départager l'analyse fondationnelle de l'analyse épistémologique. Dans ce sens, le fondement de la géométrie (des mathématiques, en fait) n'est pas logique, n'est pas dans une poignée d'axiomes et de règles syntactiques : ces axiomes, ces règles, fournissent un choix possible de *principes de preuve*, souvent incomplets, conventions commodes pour classer les différentes constructions possibles. Ils constituent, a posteriori, un squelette formel de structures qui sont énormément plus riches, dont l'origine *et* le fondement sont ailleurs : dans la praxis, enrichie par le langage. Ce langage, outil de l'intersubjectivité, qui permet de *proposer*, et de comparer, des constructions explicites et qui nous permet d'arriver, ensuite, jusqu'à la description algébrique, et, enfin, aux systèmes axiomatiques, description la plus générale des structures mathématiques que nous sachions donner, *aboutissement* d'une pratique et non pas son fondement. En bref, le fondement des mathématiques n'est pas dans l'échafaudage logico-formel, donné dans un langage symbolique, ni dans les preuves de cohérence logique : cet échafaudage est a posteriori, il s'ajoute à la construction mathématique, en particulier à la construction géométrique, ne la fonde pas. Sa cohérence, comme souligne [Weyl,1927], est une condition *nécessaire*, elle n'est pas *suffisante* pour la justification ni pour l'analyse de l'objectivité et de la généralité des mathématiques.

L'autre aspect de la mémoire qui me paraît contribuer à la construction mathématique est la pratique de *l'invariance*, en tant qu'indépendance par rapport aux représentations spécifiques, aux codages, aux "détails" d'un type ou d'un autre, selon les buts de l'action. La mémoire humaine, en fait, parait garder des indices aussi bien que des "invariants", ou, plutôt, elle contribue à constituer des invariants.

Le souvenir des actions essentielles pour agir dans une situation particulière, une forêt ou une gare de train par exemple, nous permet de nous débrouiller assez bien aussi dans une autre forêt ou dans un aéroport : on se souviendra donc des points de repères et des actions communes, de ces invariants spatiaux et comportementaux qui nous font reconnaître une certaine stabilité dans le monde. C'est peut-être pour réduire l'encombrement que la mémoire sélectionne des "éléments essentiels" à l'action, selon des critères très variés. On "distille" ainsi des invariants. Voila une pratique profonde que l'on retrouve à tout instant dans la conceptualisation mathématique. En fait, l'invariance conceptuelle est au coeur des mathématiques : les nombres (entiers) acquièrent dans l'histoire un statut mathématique quand l'expérience d'une pluralité de notations possibles permet de mettre à feu le *concept* de nombre, comme l'invariant sous-jacent les différentes notations. Les mathématiques naissent aussi quand le géomètre grec va au delà des maints exemples de triangles connus par les égyptiens avec la "relation de Pythagore" entre les côtés, il démontre le *théorème* de Pythagore sur un triangle spécifique (on peut pas se passer, pour cette preuve élémentaire, d'un croquis sur le tableau ou sur le sable) et ajoute : la preuve que j'ai donné sur ce dessin ne dépend pas du dessin spécifique, ce triangle-ci avec *ces longueurs-ci* des cotés, mais elle dépend seulement de l'hypothèse que cet angle est droit (et il démontre cette observation en reparcourant la preuve, où il n'utilise pas d'autres hypothèses). Le théorème est donc valable pour *tout* triangle rectangle. Il a construit alors un invariant, le plus important de tous les invariants mathématiques : la généralité de la preuve par rapport au dessin, au système de référence spécifique. Sommes-nous aidés, dans cette formidable construction conceptuelle, par la pratique consciente et inconsciente des invariants sur lesquels se bâtit notre mémoire? *Si oui, le fondement de cette invariance, qui est au coeur de la preuve mathématique, n'est pas logique, mais pratique*. L'analyse logique de la preuve l'encadre a posteriori, elle le clarifie, mais *ne suffit pas* à le fonder, comme observait déjà Weyl. L'analyse conceptuelle de Frege, par exemple, réduit l'Arithmétique (et l'Analyse Mathématique, en raison la construction des réels de Cantor et Dedekind) à trois axiomes pour le 0 et le successeur plus la règle d'induction arithmétique; ensuite, elle reconduit cette dernière à un principe logique général du raisonnement humain (par une sorte d'atomisme logique), et pose donc les bases de la logique mathématique moderne. Frege est conscient d'être en train de proposer un départage net entre analyse fondationnelle et épistémologie et se débarrasse de l'épistémologie par une critique sévère (et justifié) du psychologisme et de l'empirisme de l'époque (Stuart-Mill).

Toutefois, à partir de ce travail remarquable, la logique mathématique est devenue, après les années trente, une *branche* des mathématiques : comme l'avait prévu Wittgenstein, les métamathématiques hilbertiennes, en particulier, en tant que "jeu de règles" mathématiques, font *partie* des mathématiques et ne peuvent pas les "fonder". Ce qui confirme la thèse que le problème des fondements des mathématiques est un problème épistémologique, il ne peut pas être seulement (logico-)mathématique. En fait, la démarche de Frege ne fait que transférer le problème épistémologique des mathématiques vers celui d'une "logique" ou "langue formulaire de la pensée pure", où, dans mon opinion, il continue à se poser. Car le choix même de fonder les mathématiques, la géométrie en particulier (ce qui sera fait par Hilbert, non pas par Frege), sur des langages logiques ou formels contient déjà un fort engagement épistémologique et pose le problème d'une épistémologie de la Logique (ou des méthodes finitaires hilbertiennes). Par ce biais même, toutefois, la Théorie de la Preuve de Frege et Hilbert nous permet aujourd'hui d'aller plus loin, d'approfondire notre analyse de la démonstration en mathématiques ainsi que de son épistémologie; car le problème qui se pose aujourd'hui est celui de l'explicitation et de l'extension de l'analyse (logique) du langage des mathématiques, et ses acquis remarquables, à une analyse directe du rapport entre géométrie mathématique et espace sensible, en reprenant les intuitions de Riemann, Poincaré, Weyl et Enriques, entr'autres.

A.B. propose un autre élément qui peut aider à justifier l'hypothèse que je viens de faire sur le rôle des invariants, dans le cas de la géométrie : «la mémoire de l'espace est ... mémoire du mouvement dans l'espace : elle est donc essentiellement multisensorielle» [p. 132]. L'espace de nos représentations explicites et conscientes, en fait mathématiques, serait alors l'invariant, ce que *nous proposons* de commun, par rapport à la pluralité des représentations implicites, des mémoires multisensorielles, un invariant distillé aussi par la mémoire. Il doit être clair, toutefois, que ces *propositions*, que nous faisons, ne sont pas arbitraires, car elles s'appuient sur des régularités qui sont dans le monde (les symétries, des géodésiques ...) et sur l'interface qui se constitue par notre action dans le monde, dans et grâce à la multisensorialité.

7 - Mouvement et espaces allocentriques.

On vient de citer maints exemples où le cerveau mémorise les mouvements (direction, vitesse et accélération) aussi bien que l'espace. En fait, la reproduction d'une distance serait faite par comparaison entre simulation interne d'un mouvement mémorisé et l'information des sens. «Le cerveau est un comparateur qui mesure les écarts entre ses propres prédictions fondées sur le passé et les informations qu'il prélève sur le monde en fonction de son but» [p. 134].

Mais il y a plus que ça (il devrait être désormais clair au lecteur que le cerveau n'agit jamais à un seul "niveau", tout y est ... "multi"). Au cours de l'enfance, nous passons d'un regard vers le monde, et d'une insertion dans l'espace ambiant, purement *égocentriques*, à la construction de divers référentiels *allocentriques* (spatiaux, mais aussi émotionnels, de l'intentionnalité ...). Pour en rester à l'espace, les expériences chez le rat démontrent que, quand cet animal se familiarise avec des parcours ou des espaces, certains neurones de l'hippocampe déchargent chaque fois que l'animal passe par un endroit particulier [p. 138]; probablement, cette activité neuronale est à la base des excellentes performances du rat dans les labyrinthes. Ces cellules de lieu coderaient donc analogiquement l'espace sensible. Une représentation allocentrique? On trouve là une légère contradiction dans le livre, clarifié par une discussion avec l'auteur. En effet, [p. 110], on dit que seuls les primates sont capables d'avoir une appréciation allocentrique de l'espace : on apprécie la distance entre deux arbres, entre la table et la porte, indépendamment de nous, de notre position dans l'espace; on commence en faire une géométrie objective. Or, le rat reste au niveau de la représentation égocentrique, malgré les performances de son hippocampe : ces neurones s'activent quand *le rat passe* par ces endroits. Une forme presque "objective" de représentation égocentrique de l'espace, donc, qui me paraît un passage de la représentation égocentrique à celle allocentrique : pour le rat, pas tout est centré sur lui, car il se voit là, dans l'endroit où il passe[3].

Le passage des formes de représentation égocentrique du monde, à des représentations allocentriques, suggère justement un autre élément à l'origine de la construction géométrique : dans la représentation allocentrique, les choses et leurs distances sont là, elles ne dépendent pas de nous, elles sont invariantes par rapports à maints événements possibles. Ensuite, le langage nous permet de comparer nos expériences avec celles d'autrui; un outils essentiel pour la généralisation des représentations spatiales, qui confirme l'objectivité, par l'échange intersubjectif, de la distance entre cette arbre-ci et celui-là. Bien plus en avant, dans l'histoire, on continuera à utiliser l'expressivité du langage, jusqu'à parler de l'espace avec l'algèbre, en toute généralité.

8 - Trajectoires et anticipation.

Certaines régularités de la physique, de la chimie, de la vie, comme les symétries, les réflexions de la lumière, les trajectoires minimales que le monde nous impose, "forcent" des structures dans nos constructions conceptuelles, et rendent non-arbitraires les univers possibles des mathématiques : l'analyse épistémologique doit partir de ces "objectivités" du monde et se prolonger à la constitution phylogénétique, ontogénétique et, enfin, intersubjective.

L'analyse de Viviani [p. 159] des relations mathématiques entre courbure et vitesse des mouvements de la main en est un bel exemple : notre geste n'est pas arbitraire, il suit des régularités, il parcourt des lignes minimales d'équilibre. On retrouve ces lignes même

[3] Toutefois la nature et l'évolution ne sont pas linéaires : il serait intéressant de savoir si l'espace des abeilles, cet espace qu'elles décrivent aux autres abeilles par des danses très complexes, est égocentrique ou allocentrique (et si, dans ce cas, cette classification a encore un sens).

dans le dessin, dans les formes "aux secousses minimales" [p. 165] (une secousse est la dérivée d'une accélération). Est-ce que notre corps suit la forme - se demande A.B. - ou, plutôt, la forme résulte du fonctionnement du corps? Les deux phénomènes ont lieu, dirais-je : la forme se constitue grâce à la présence des objets dans le monde, y compris notre corps, et notre corps se façonne, prend forme dans l'évolution, par son agir dans le monde, avec ses géodésiques et ses symétries. La description mathématique de ces formes est, ensuite, notre pari de représentation; elle n'est pas arbitraire, mais elle est loin d'être unique, comme les géométries non-euclidiennes nous enseignent. Ce qui lui donne son objectivité sont ces régularités du monde qui s'imposent à notre présence et qui seront sous-jacentes a toute bonne (cohérente) représentation du monde, construite dans l'intersubjectivité.

Mais nous ne sommes pas passifs face à ces régularités. Les trajectoires, par exemple, qui sont au coeur de notre action, ne sont pas suivies passivement par notre corps : A.B. nous explique que nous anticipons le mouvement à faire [p. 164]. En particulier, dans la poursuite oculaire, on *précède* la cible et, par cela, nous préparons la trajectoire à suivre, s'il s'agit, par exemple, de capturer une proie. «Autrement dit, nous nous dirigeons vers l'endroit que nous regardons et non pas le contraire» [p. 201].

Ce mouvement est préparé, par anticipation, d'une façon très complexe. Si je regarde devant moi et un objet bien visible se trouve à ma droite de 60°, hors de la portée de ma fovéa, quand je fais une saccade volontaire vers la droite, de 30° disons, l'activation des neurones du cortex pariétal, qui déchargeaient en correspondance de cet objet, *se déplace* quelques millisecondes *avant* que la saccade ait lieu, pour se retrouver à l'avance en correspondance de ce déplacement du stimulus de 30° (!). Tout le cortex pariétal en fait réorganise son champ récepteur *en avance* sur les conséquences du mouvement [p. 224]. L'intégration sensori-motrice est donc extraordinaire et cette boucle entre stimuli, prévision, action, réaction du monde et du corps, est au centre du développement de notre cerveau. «Le cerveau n'est pas formé de simples systèmes qui transforment les signaux sensoriels en commandes motrices : il est constitué de boucles fermées. *L'action modifie la perception à la source*» [p. 221]. On peut en fait comprendre la formation du cerveau comme une sorte de "compléxification de l'axe réflexe" : la structure différenciée du cerveau se forme, comme propose A. Prochiantz [1997], en réponse à «la nécessité de lier des réflexes d'ordre sensori-moteur à d'autres modalités sensorielles» au cours de l'évolution. Voila ce réseau de représentations, façonnés par l'action, qui sous-tend toute forme d'intelligence et dont je parlais ci-dessus.

Bref, on questionne à tout instant le monde, en interrogeant les capteurs selon les besoins, les intentions; on en règle la sensibilité, on anticipe les réponses, on les compare aux entrés combinées, sur la base d'une simulation-représentation interne, en générale analogique, des conséquences attendues de l'action. Mon idée est que nos constructions conceptuelles (mathématiques en particulier) pas seulement trouvent leur genèse dans ces phénomènes, mais aussi qu'elles obéissent au même paradigme : suite à notre action dans le monde, on fait des paris de représentation explicite, qui ne sont pas arbitraires, car ils sont riches de mémoire (la mémoire dont on parlait plus haut, qui distille des invariants, mais aussi la mémoire commune, historique, voir [Longo,1995]), et on construit sur ces mêmes paris, par des analogies, des métaphores, qui relient une structure mathématique et/ou une méthode de travail, à une autre. Le langage et la logique, cette dernière en tant que lieu de l'invariance conceptuelle explicitée, consciente, et de la stabilité méthodologique, entrent massivement dans ce jeu, mais ils n'en sont pas le fondement ultime, encore moins unique.

9 - Genèse et fondement : des trajectoires aux formes.

Dans l'analyse des fondements des mathématiques, l'erreur du formalisme a été de croire que l'on puisse *isoler* une structure mathématique (importante) des autres et la décrire *complètement* par quelques axiomes et principes de preuve, en tant que suites discrètes de symboles. C'est celui-ci le sens des hypothèses de complétude et décidabilité des systèmes formels (importants, comme l'Arithmétique) : que nos constructions conceptuelles puisse être départagés les unes des autres et représentées complètement par un seul niveau, celui du "langage objet" ou formel, sans communication avec les autres niveaux et les autres structures. Non, on démontre des propriétés des nombres entiers en passant par les nombres complexes, on utilise le métalangage pour prouver des propriétés d'une structure, données dans un langage formel. Parfois, a posteriori, on arrive à reconstruire certains de ces résultats dans le cadre formel proposé, mais la Théorie de la Démonstration elle-même, cette formidable branche des mathématiques inventée par les logicistes et les formalistes, démontre que cela n'est pas toujours possible. Au cours des trente dernières années, des théorèmes sur les entiers ont été démontrés (des énoncés intéressants, non pas des astuces diagonales comme "je ne suis pas démontrable") où le métalangage, le langage et la sémantique se mêlent, d'une façon essentielle, *dans la preuve* (certains théorèmes de Normalisation, voir [Girard et al., 1989]); d'autres, où l'infini et sa signification sont tout aussi inévitable pour la démonstration (la forme finie de Friedman du Théorème de Kruskal; voir [Longo, 1997] pour une introduction, [Harrington et al.,1986] pour le résultat dans les détails). On ne peut pas coder les mathématiques à un seul niveau conceptuel (les formalismes linguistiques finitaires des suites discrètes de symboles) : les entiers font partie des nombres réels et puis des complexes; leurs propriétés dépendent aussi, comme le disent ces théorèmes, du métalangage dans le quel nous définissons leur langage ainsi que de propriétés infinitaires, de la *signification* des mots avec lesquels on parle de l'infini, par exemple.

Les mathématiques se constituent par des constructions conceptuelles, comme la suite *infinie* des nombres entiers, les rationnels, les réels, les nombres complexes. Elles se constituent en établissant des ponts entre structures différentes, en les utilisant pour en bâtir des nouvelles, dans un réseau intégré de connaissance, exactement comme des propriétés des nombres complexes peuvent nous donner des propriétés des nombres entiers finis et l'infini peut être essentiel à démontrer des théorème énoncés dans des systèmes finitaires.

A fortiori, on ne peut pas coder la variété de nos formes d'intelligence sur une seule dimension conceptuelle, par les suites discrètes de symboles des formalismes : notre intelligence est le résultat d'une intégration de plusieurs modalités d'action et de présence dans le monde, structurées par la pluralité de nos rapports à l'espace, entr'autres. Notre représentation explicite de l'espace, en particulier, est le résultat d'une intégration d'expériences multi-sensorielles, de la mémoire, de l'intentionnalité propre à la prédiction et à l'action.

Perdons-nous par cela tout espoir des donner des "fondements" à la connaissance, de "parler" même de la connaissance? Devons-nous nous taire face à la complexité de la tâche, une fois compris que l'on ne peut pas coder le mode multidimensionnel de notre présence dans le monde pixel par pixel ou par une seule dimension? Pas du tout. Considérons les mathématiques. Les pères fondateurs de la logique mathématique, au début du siècle, ont pu proposer cette discipline remarquable grâce au «dogme tout-puissant de la cassure principielle entre l'élucidation épistémologique et l'explicitation historique aussi bien que l'explicitation psychologique dans l'ordre des sciences de l'esprit, de la cassure entre l'origine épistémologique et l'origine génétique; ce dogme, dans la mesure où on ne limite pas de façon inadmissible, comme c'est l'habitude, les concepts d'"histoire", d'"explicitation historique" et de "genèse", ce dogme est renversé de fond en comble» [Husserl,1933: p.201]. Grâce à ce dogme, l'épistémologie des mathématiques est devenue "logique" (Frege, Russell) et, puis, "formelle et finitiste" (Hilbert), bien séparée de nos espaces humains de signification et d'action : elle a été restreinte à la seule dimension logico-formelle, qui n'utilise que le langage. Ensuite, grâce à ce développement pratique du formalisme et du logicisme qui s'appelle l'Informatique, (presque) tout ce qui est "codable formellement" a été réifié dans des machines qui ont changé notre vie. C'est alors justement le moment, aujourd'hui, pour ce qui en est des mathématiques faites par l'homme, de recomposer cette cassure de renverser «ce dogme ... de fond en comble», comme proposait Husserl, et de mettre le doigt aux endroits difficiles où épistémologie et genèse se superposent; pour l'instant, on a essayé ici d'esquisser le rôle possible des symétries et de la constitution des invariants, en tant que résultats d'expériences multisensorielles du monde et des activités de la mémoire. Peut-être, même des machines nouvelles pourront en dériver.

Une des maintes difficultés est la suivante. La Théorie de la Démonstration moderne a mis en évidence et analysé axiomes et règles de déduction (en fait Euclide l'avait déjà fait pour une des géométries possibles, au moins pour les axiomes). Or, «l'évidence originaire ne peut pas être interchangé avec l'évidence des "axiomes"; car les axiomes sont principiellement déjà les résultats d'une formation de sens originaire et ont cette formation elle-même toujours déjà derrière eux» [Husserl,1933: p. 192-3]. Pour cela, on a essayé plus haut de comprendre "l'évidence" de l'axiome des parallèles par une symétrie intuitive, comme "évidence originaire", malgré une certaine "indifférence mathématique" de cette symétrie. Mais il en est ainsi aussi pour les autres axiomes de la géométrie élémentaire :

- on peut construire un et un seul segment entre deux points,
- sur le plan, on peut construire un et un seul cercle une fois donnés un point et une distance, etc ... .

Encore une fois, l'évidence originaire est dans ces régularités du monde et de notre action dans le monde qui sont "derrière" ces axiomes (dans le sens de Husserl) : les deux représentent la situation la plus symétrique ainsi que les trajectoires minimales (les géodésiques) pour une distance entre deux points et pour contenir une surface.

Mais ces trajectoires, nous explique A.B., sont d'abord des prédictions. C'est dans ce sens alors que j'arrive à partager, en la révisant, la vision néo-kantienne de nombreux philosophes contemporains :

- la géométrie est *synthétique* en tant qu'elle anticipe l'expérience de l'espace et qu'elle la rend intelligible (voir [Petitot,1987], [Boi,1995] par exemple); mais elle l'anticipe, selon mon opinion, non pas comme idéalité préexistante, *elle l'anticipe dans l'action*, à partir de la mémoire constituée aussi dans la phylogenèse, et elle la rend intelligible à partir de l'intégration multisensorielle et par la synthèse de différentes expériences : la signification est tout d'abord dans le réseau interconnecté de nos formes de connaissance (qui commence, mais ce n'est qu'un tout petit brique initial, par les rapports qui s'établissent entre phénomènes différents dans les neurones multimodaux);
- a géométrie est *a priori*, non pas à cause de la caractérisation formelle de nos espaces à

partir de quelques concepts fondamentaux, car je ne connais pas des systèmes formels "catégoriques" ou complets par rapport au monde; mais elle est a priori, puisque son fondement est dans le processus constituant qui est derrière nous et derrière nos axiomes explicites, ce processus qui est démarré avec notre rapport évolutif d'être vivants aux régularités du monde.

Ces régularités et leur analyse sont au coeur de la "genèse" ainsi que de "l'épistémologie" de (ce fragment de) la géométrie; tandis que les trois axiomes que l'on a examinés sont notre choix spécifique, un pari non-arbitraire que nous avons fait pour parler de l'espace, mais ils ne sont pas le "fondement" de la géométrie : l'analyse logico-formelle de leur cohérence, par exemple, est *nécessaire*, mais elle n'est pas *suffisante* à l'analyse fondationnelle (voir §.6). Leur fondement, qui est commun aux autres géométries que l'homme a proposé dans l'histoire, est dans la dynamique évolutive et historique qui les a engendrés. Cette dynamique commence dans l'interface entre l'action de l'homme et certaines régularités du monde, comme les symétries ou d'autres, dont on n'a pas parlé, comme la *connexion* de l'espace, en tant que variété tridimensionnelle, et les *transformations* que nous donne le mouvement et que nous pouvons organiser dans un groupe algébrique.

Il faut comprendre, pour saisir ce changement de perspective, que la géométrie n'est pas, ou n'est plus, surtout depuis le grand débat du siècle dernier, une "science des figures" mais "une science de l'espace" (Riemann). En fait, elle est une science du mouvement dans l'espace (Poincaré). Or, on peut plus précisément se demander dans quel sens elle puisse être une "abstraction perceptive", qu'est ce que cet "invisible qui sous-tend le visible" (pour paraphraser Merleau-Ponty). Je crois que aujourd'hui on puisse considérer la géométrie, grâce aux percés des biologistes et des physiologistes, comme une science de l'action et de la *prévision* du mouvement dans l'espace : le segment, la courbe, le cercle ne sont pas la "forme abstraite" (?) d'un objet matériel, ni des "figures idéales" (?), mais plutôt la *prévision* d'un parcours. *Et la prévision est déjà une abstraction; la trajectoire prévue ou anticipée par le regard et le geste* est *abstraite*. Voici ma thèse principale.

Autrement dit, *l'acte de prévoir*, *anticiper* une trajectoire constitue le fondement antique, l'embryon pre-humain de *l'abstraction géométrique* humaine, l'origine cognitive de ces lignes que nous savons concevoir sans épaisseur, car elles sont des pures directions, de ces courbes parfaitement lisses et optimales, car elles sont des pures trajectoires; mieux, elles sont des prévisions de trajectoires. Et cet acte *est là*, non seulement dans la praxis, mais aussi dans la mémoire phylogénétique de notre rapport à l'espace (certains neurones visuels s'activent pour des "directions" dans l'espace). On l'utilisera, peut-être, aussi pour former des figures par interpolation, pour suivre ou reconstruire des contours en intégrant leur perception visuelle, vers cette géométrie des formes qui est une partie de celle de l'espace. Le langage s'y ajoutera, en donnant l'objectivité de la construction commune; mais le dessin aussi, par le regard qui anticipe le geste de la main; l'histoire enfin contribuera à constituer l'invariance et la stabilité conceptuelle propre à la construction mathématique, grâce aussi à la pluralité d'expériences pratiques et de descriptions linguistiques et formelles.

Remerciement. Je voudrais remercier Jean Petitot et Yves-Marie Visetti pour leur commentaires et leur encouragement.

Bibliographie

Boi L. **Le problème mathématique de l'espace**, Springer, 1995

Fruchart T., Longo G. "Carnap's remarks on Impredicative Definitions and the Genericity Theorem" in **X Conference on Logic, Methodology and Philosophy of Science**, Cantini et al. (eds.), Kluwer, 1998.

Girard J.-Y., Lafont Y., Taylor P. **Proof and Types**, Cambridge Univ. Press, 1989.

Goldfarb W. "Poincaré Against the Logicists" Essays in the History and Philosophy of Mathematics, (W. Aspray and P.Kitcher eds), **Minn. Studies in the Phil. of Science**, 1986.

Harrington L. et al. (eds), **H. Friedman's Research on the Foundations of Mathematics**, North-Holland, 1985.

Herken R., **The Universal Turing Machine**, Springer-Verlag, 1995.

Husserl E. **L'origine de la Géométrie**, 1936 (trad. française de J. Deridda, PUF, 1962)

Iversen B. , **An invitation to geometry**, Aarhus University Press, 1989.

Longo G. "Memory in Mathematics", **Revue de l'Association H. Poincaré**, vol. 2, 1995.

Longo G. "The mathematical continuum, from intuition to logic" in **Naturalizing Phenomenology: issues in comtemporary Phenomenology and Cognitive Sciences**, (J. Petitot et al., eds) Stanford U.P., 1998

Longo G. "Cercles vicieux, Mathématiques et formalisations logiques", in **Logiques et Sciences Humaines**, Paris, Juin 1997, à paraître.

Petitot J. "Objectivité faible et philosophie transcendantale", dans **Physique et Réalité**, M. Bitbol, S. Laugier (eds), pp. 201--236, Diderot, 1987.

Poincaré H. **La Science et l'Hypothèse**, Flammarion, Paris, 1902.

Poincaré H. **La valeur de la Science**, Flammarion, Paris, 1905.

Prochaintz A. **Les anatomies de la pensee**, Odile Jacob, 1997

Weyl, H. "Comments on Hilbert's second lecture on the foundations of mathematics." [1927] *in* van Heijenoort J., **From Frege to Goedel**, 1967.

Weyl H. **Symmetry**, Princeton University Press, 1952.