Giuseppe Longo
CNRS – Département d'Informatique,
Ecole normale supérieure, Paris
et CREA, Ecole Polytechnique.

Géométrie et Cognition

Entre fondements des mathématiques, théorie de la connaissance et cognition

En 1999, en étroite collaboration avec Jean Petitot et Bernard Teissier, l'auteur de cette introduction a mise en place une série de conférences-débats avec le titre de cet atélier (voir le "Cycle de Conférences de démarrage", Février - Avril, 1999, dans http://www.di.ens.fr/users/longo/geocogni.html). Nos différentes préoccupations, faisant respectivement référence aux sciences cognitives, à la géométrie des systèmes dynamiques et à la géométrisation en informatique, ont trouvé un "espace conceptuel et de travail commun" grâce à cette initiative. Le manifeste qui accompagnait ce cycle de conférences et écrit en collaboration avec jean petito et bernard Teissier, transformé en projet d'atelier, a été ensuite généreusement financé par l'**Action Cognitique** du Ministère de la Recherche (Dir. C. Fuchs), pour la période 2000-2002.

Ce volume est une des trois publications qui ont recueilli certaines des contributions aux séminaires et aux colloques organisé dans le cadre de l'atelier (voir les conclusions, ci-dessous).

Le texte qui suit est une introduction générale, reprise de la première partie du manifeste originaire, aux thèmes de l'atelier les plus ne rapport avec les articles dans ce volume (pour les références bibliographiques, voir l'article de Bailly-Longo ci-dessous).

1. L'origine d'un débat.

Un grand débat est à l'origine de l'analyse des fondements des mathématiques, au tournant du siècle. Un moment central en fut l'opposition radicale entre les visions de Riemann et Poincaré, d'un coté, et celles de Frege et Hilbert de l'autre (chacune avec ses caractéristiques propres et bien différentes ente elles). Très brièvement, Riemann et Poincaré insistent sur le rôle de l'espace et sur la "constitution des concepts mathématiques" par l'homme, en tant qu'être vivant dans le monde. Frege propose des règles logiques universelles et indépendantes de l'homme, dont l'objectivité absolue constitue le fondement ultime des mathématiques, des règles à exprimer dans une "langue formulaire de la pensée". Ces règles et ces axiomes, codés dans des suites fines de signes, devront satisfaire à la seule cohérence formelle pour "fonder", si suffisamment expressifs, les mathématiques ou leurs différentes branches (Hilbert).

Au cours de ce siècle, F. Enriques et H. Weyl enrichiront les réflexions de Riemann et Poincaré en y ajoutant l'appréciation de l'histoire, par cette analyse des "conceptualisations progressives" en mathématiques, que l'on trouve dans leurs nombreux écrits philosophiques. Hilbert, au contraire, développera la Logique Mathématique de Frege et ira bien plus loin que Frege: en cherchant la "certitude" dans la manipulation finitaires de langages formels cohérents, il posera les bases de la Théorie de la Démonstration, en tant qu'analyse formelle et linguistique des mathématiques, telle qu'elle se développera surtout après les années trente.

En fait, le "tournant linguistique" marque le siècle bien au-delà des projets de Frege : le raisonnement logique de Boole et de Frege est réifié dans une mathématique des suites finies de signes et leur transformations effectives, la métamathématique de Hilbert, à l'intérieur de laquelle on pourra poser des problèmes mathématiques, des conjectures (la complétude, la décidabilité, la cohérence ... d'un système d'axiomes et règles), démontrer des résultats précis. La force conceptuelle, la rigueur et la précision mathématique du programme de Hilbert, feront oublier les remarques informelles, quoique profondes, de Riemann, Poincaré et les autres géomètres (dont aussi Helmholtz et Mach): la Logique Mathématique se posera comme nouvelle discipline mathématique de grand relief et, en permettant de développer la notion de représentation ou codage finitaire (Gödel) et de calcul effectif (Herbrand, Gödel, Turing, Church ...), elle sera à l'origine de l'Informatique. C'est ainsi que l'objectivité absolue des calculs logiques s'est en définitive trouvée objectivée dans des machines "formellement et parfaitement logiques". Ces machines ne cessent, depuis 50 ans, de changer notre vie, par leur extraordinaire efficacité dans tout ce qui est codable par des suites finies de signes et leur transformations effectives. Les conséquences de la philosophie propre à ce tournant fondationnel et des machines qu'il a engendré ont été énormes en théorie de la connaissance et de l'ésprit et, par conséquent, en sciences cognitives.

Ce sont justement les succès et les limites des analyses et des applications basées sur "le traitement finitaire de suites finies de signes" qui nous poussent à aller au delà de ces outils, vers une méthode épistémologique et scientifique qui intègre aussi les autres formes de la connaissance et du rapport de l'homme au monde. Il est temps de reprendre les idées esquissées par Riemann, Poincaré, Weyl et Enriques, pour redémarrer une réflexion scientifique, en fait mathématique, sur l'épistémologie des mathématiques et leur origine cognitive. Ce volume est une première tentative dans cette direction, développée dans le cadre d'une série d'exposés présentés à l'Atelier Géométrie et Cognition.

2. La Géométrie : d'une Science de l'espace à une Science du mouvement dans l'espace.

La Géométrie des Grecs était une "science des figures"; avec Riemann, et après Descartes, elle est devenue une "science de l'espace". Poincaré est allé plus loin, en soulignant le rôle du mouvement dans l'espace : « un être immobile n'aurait jamais pu acquérir la notion d'espace puisque, ne pouvant corriger par ses mouvements les effets des changements des objets extérieurs, il n'aurait eu aucune raison de les distinguer des changements d'état» [Poincaré,1902,p. 78] ...« localiser un objet en un point quelconque signifie se représenter le mouvement (c'est-à-dire les sensations musculaires qui les accompagnent et qui n'ont aucun caractère géométrique) qu'il faut faire pour l'atteindre» [Poincaré,1905,p. 67].

Pour Poincaré, comme pour Riemann, il n'y a pas une théorie géométrique "a priori" du monde, donnée par une axiomatique formelle. C'est plutôt « la présence des corps, les solides naturels» et notre propre corps, notre mouvement et les changements d'état qui constituent l'espace et qui nous le font appréhender; « les axiomes ne sont que des définitions déguisées», dont on choisit « les plus commodes » pour nous, êtres biologiques vivant dans ce monde [Poincaré,1902,p.75-76]. Toutefois, pour Poincaré, la géométrie du monde sensible n'est pas la géométrie mathématique, car ...« les sensations musculaires ... n'ont aucun caractère géométrique...». C'est ce clivage, qui le conduit à un certain conventionnalisme, qu'il faut aujourd'hui dépasser : il faut reconstruire la géométrie mathématique à partir de celle du monde sensible, expliquer pourquoi nos choix explicites sont "plus commodes", en utilisant les outils que les mathématiques, la géométrie tout d'abord, mais aussi la logique mathématiques, nous ont donné au cours des dernières décennies, en combinaison avec l'apport des neurosciences et des sciences cognitives.

Prenons un exemple, à partir du livre d'un physiologiste [Berthoz, 1997]: la capture d'une balle qui approche. Selon Berthoz, au cours de l'action, il n'y a pas de reconstruction centralisée de l'espace extérieur, mais une intégration multisensorielle de différents référentiels [p.90], chacun desquels permet de "simuler" l'espace de la perception. C'est à dire, l'espace n'a pas besoin d'être représenté de façon explicite, dans un système de coordonné cartésienne ou par un codage pixel par pixel des points de l'espace : le seuil musculaire relatif à un certain angle du bras, par exemple, est lui-même le référentiel ou le codage d'une distance. C'est ainsi que, quand on fait un mouvement pour saisir un objet, le référentiel est constitué par l'espace articulaire et quantifié par les seuils musculaires, y compris ceux des muscles oculaires. Il nous parait donc que le référentiel spatial est, en premier lieu, analogiquement reconstruit sur la rétine : l'élargissement de l'image bidimensionnelle est une "simulation analogique" du mouvement de la balle; ensuite, cette "simulation" est transférée, par mille passages intermédiares, sur le système referentiel donné par les articulation du bras et quantifié par la proprioception des seuils musculaires. Le passage d'une représentation analogique à l'autre, l'intégration, par comparaison et constitution d'invariants (l'aperception de la stabilité de certains phénomènes), est le premier élément constitutif de cette intelligence qui nous permet l'action et qui, en fait, a sa genèse dans notre action dans le monde, dans la pluralité de nos représentations du monde et de notre action. En bref, cette toute première forme d'intelligence, le bras qui se lève et saisit la balle qui s'approche, réside tout d'abord dans le transfert de la représentation analogique de la balle, de sa vitesse et de son accélération sur la rétine sur une autre représentation analogique, celles des seuils musculaires, qui simulent la direction, la vitesse, l'accélération de la balle dans leur propre système de référence, celui des articulations du bras. Cette intelligence "géométrique" est loin d'être indépendante des codages, tout au contraire elle se construit comme réseaux de codages ou de représentations analogiques; elle est acquise par une pratique de l'action dans le monde, sur un corps et une protocarte cérébrale qui rendent ce réseau possible. La pratique de l'invariance des objets du monde par rapport à la pluralité de nos référentiels et de nos codages nous permet de construire ou de concevoir, après coup, cette "invariance" ou stabilité qui sera propre de nos représentations conscientes, celles du langage et de l'espace par exemple, jusqu'aux constructions conceptuelles les plus stables, les plus invariantes, celles des mathématiques.

L'analyse de la constitution dans la praxis de nos invariants conceptuels demande un effort mathématique remarquable, qui parte du dialogue avec les biologistes et les physiologistes et utilise l'analyse des jeux des référentiels géométriques. En particulier, l'espace dont nous parlent les physiologistes est toujours structuré par le geste, le mouvement : il n'est jamais absolu, mais relatif à la structure qui intéresse. En fait, l'analogie reconstruit l'essentiel (la structure spatiale intéressante) du phénomène simulé, dans le but de l'action. Le référentiel modulaire des seuils, des saccades, du système vestibulaire, du toucher, est choisi et modifié selon la structure de l'espace; il est fonctionnel à l'action du moment: la saccade qui simule la course de la proie ou précède la poursuite, le mouvement du bras qui simule le déplacement de l'objet à saisir, préservent exactement la structure de l'espace utile à l'action. Or, l'analyse des "espaces mathématiques structurées" est un enjeu central en géométrie et dans une de ses généralisation des plus importantes : la Théorie des Catégories, en tant que théorie des transformations qui préservent la structure (qui intéresse). En conclusion, la question que nous posons, par cette analyse, est celle du rapport entre construction géométrique (conceptuelle, proposée par l'homme dans l'histoire) et perception/simulation mentale des espaces physiques et de notre mouvement dans ces espaces, en tant qu'être vivant dans le monde. Elle est la question des rapports entre géométrie mathématique et géométrie du monde sensible. Et, bien évidemment, la géométrie des espaces physiques sera une extension de celle du monde sensible par des variantes pertinentes des modes d’accès et de mesure (en astrophysique : variétés rimaniennes ; en microphysique : géométrie non-commutative, voir [Longo, 2003]).

3. Épistémologie et genèse.

Dans un article de 1927, Weyl explique que l'analyse formelle des théories mathématiques, en fait de leur cohérence logique, n'est qu'un élément nécessaire pour l'analyse fondationnelle; que ce n'est nullement une condition suffisante, ni d'un point de vue épistémologique, ni pour une recherche fondationnelle analytique. Ce sont plutôt les significations, bâties à partir de "nos actes d'expérience" (pour reprendre Weyl), i.e. les structures sous-jacentes des relations avec le monde sensible - que nous introduisons plus ou moins implicitement - qui permettent au mathématicien de "comprendre" la preuve ou de formuler des conjectures, et qui suggèrent au logicien les conditions suffisantes pour la constitution d'un système formel, point d'aboutissement, et non pas de départ, d'une pratique conceptuelle. En somme, dans notre opinion, c'est l'analyse du processus génétique de constitution d'un système qui met en évidence la "nécessité" de ce système. Husserl précisera:

> « L'évidence originaire ne peut pas être interchangée avec l'évidence des "axiomes"; car les axiomes sont principiellement déjà les résultats d'une formation de sens originaire et ont cette formation elle-même toujours déjà derrière eux» [Husserl,1933: p. 192-3].

Les "conventions" axiomatiques, donc, viennent après la « formation de sens originaire». Au contraire, comme on mentionnait plus haut, les pères fondateurs de la logique mathématique, au début du siècle, ont pris pour fondement des axiomes et règles, en tant qu'"atomes logique" d'une langue de la pensée, et ont pu proposer cette discipline remarquable grâce au

> ...« dogme tout-puissant de la cassure principielle entre l'élucidation épistémologique et l'explicitation historique aussi bien que l'explicitation psychologique dans l'ordre des sciences de l'esprit, de la cassure entre l'origine épistémologique et l'origine génétique; ce dogme, dans la mesure où on ne limite pas de façon inadmissible, comme c'est l'habitude, les concepts d'"histoire", d'"explicitation historique" et de "genèse", ce dogme est renversé de fond en comble»[Husserl,1933: p.201].

C'est à ce renversement que nous voulons oeuvrer, car c'est possible aujourd'hui. C'est possible, grâce aussi aux percées de la logique mathématique : les nombreux résultats d'incomplétude des dernières décennies nous confirment le rôle essentiel de la géométrie (au moins l'ordre) ainsi que de l'infini mathématique en général, même dans la preuve de théorèmes finitaires, en théorie des nombres par exemple (voir [Longo, 2002]).

4. La constitution des invariants mathématiques : leur intérêt cognitif.

En reprenant la "distinction" de Weyl, quand on considère la question de l'identification des conditions suffisantes pour l'émergence d'une théorie, celles qui exigent cette théorie et la rendent possible, l'enjeu, cette fois, n'est pas interne aux mathématiques. Il exige un examen de l'insertion des mathématiques dans leur contexte opératoire, dans le monde, un examen de l'interface entre notre esprit et le monde, où s'amorcent les conceptualisations mathématiques.

En fait, l'objectivité des conceptualisations mathématiques a ses sources dans les processus constitutifs de celles-ci.

Les nombres réels, par exemple, n'ont pas une objectivité de par eux-mêmes, ils acquièrent à la fois existence et objectivité par la construction de Cantor-Dedekind qui constitue les réels standard à partir des entiers induits par nos perceptions courantes. (En outre, il y a aussi d'autres constructions, non-standard, qui suivent d'autres parcours et conduisent à d'autres résultats). En ce sens les réels ne sont pas des entités platoniques, des déjà-là-depuis-toujours-et-"en eux-mêmes"-tels-qu'ils-sont.

Les processus constitutifs des conceptualisations mathématiques sont donc de nature cognitive et ils sont ensuite soumis à l'historicité. Une analyse satisfaisante de ces processus conduit à réexaminer la théorie des démonstrations selon laquelle les bases des conceptualisations mathématiques se trouvent dans les formalismes linguistiques et dans les principes généraux de preuve syntactique. Notamment, le rôle des topologies et de la géométrie en logique - et, pour nous, avec ses origines cognitives - doit être réaffirmé, autant sur le plan technique que sur un plan philosophique ainsi que sa construction à partir de notre rapport avec le monde et du vivre dans le monde (à partir de Riemann, Helmoltz, Poincaré, Weyl, comme nous disions). Ce rôle est d'autre part déjà présent dans les structures topologiques et les Topos pour la Logique Intuitionniste, avec leurs applications à l'Informatique initialement proposées par D.S. Scott, et, surtout, grâce aux idées très originales de J.-Y. Girard en Théorie de la Démonstration (la Logique Linéaire, en particulier, où la géométrie ne concerne pas seulement les structures sous-jacentes, mais elle entre aussi "par la fenêtre", dans la structure elle-même des preuves, par les "réseaux des preuves").

D'autre part les mathématiques, tout en étant, dans leur genèse, intimement liées aux autres formes générales de la connaissance, présentent une très forte spécificité lorsqu'elles sont déjà accomplies. Aucune autre forme de représentation du monde n'est si essentiellement et explicitement fondée sur l'exigence d'indépendance des structures face aux représentations, face aux notations employées. Cette exigence est le coeur même de la conceptualisation mathématique, de son type particulier de généralité. En outre les mathématiques, à tout niveau, sont à la chasse d'une "simplicité" maximale, même - surtout - quand elles sont profondes. "L'élégance", la recherche de ce qui est "essentiel", "minimal", "stable", en bref la recherche de sortes de "géodésiques" abstraites - comme méthode liée à un principe que l'on est tenté de qualifier comme "esthétique" - en font partie de façon constituante. Or, le rôle de l'invariance au sens des mathématiques peut éclairer fortement les efforts d'analyse des processus quelconques de la cognition humaine. Il peut également guider pour l'identifications des contraintes qui ont présidé implicitement à la structuration de formes de représentation de connaissances plus complexes que les systèmes mathématiques abstraits, et dont les principes sont donc plus difficiles à isoler directement, plus cachés qu'en mathématiques pures.

Pour toutes ces raisons les mathématiques ont déjà été très souvent au centre des réflexions philosophiques en épistémologie, et il faut les y maintenir. En particulier, il nous semble que le rôle de la géométrie est le plus central, car "geometry is more compelling", comme aime le dire D.S. Scott (mais J.Y. Girard serait également d'accord). C'est un fait que, en mathématiques, la géométrie est le lieu préféré de la "signification" : pour analyser ce fait, il faut développer notre thèse qui lie la géométrie mathématique à l'espace sensible. Et suivre ensuite les conceptualisations qui s’en éloignent, pour des bonnes raisons de mesure et accès physiques.

5. Infini et Géométrie : du continu au systèmes dynamiques.

Nous en avons assez dit au sujet de notre intérêt concernant les aspects des fondements non linguistiques, non formels, des mathématiques et le rôle de la géométrie. Quant au concept d'infini mathématique, il s'agit là d'un des exemples des plus intéressants de "conceptualisation progressive", au cours de l'histoire. Un concept "métaphysique" qui est devenu une "pratique mathématique", qui s'est concrétisé dans des contextes opérationnels, de l'analyse infinitésimale à la théorie des ordinaux de Cantor. Mais l'infini a acquis une signification bien solide également grâce à son sens géométrique, et tout d'abord en géométrie projective : les points à l'infini de la peinture de Piero della Francesca, un des inventeurs de cette géométrie, est une des "conceptualisations" humaines les plus fortes et rigoureuse du concept d'infini.

Il faut donc développer une analyse du rôle de l'infini dans les fondements des mathématiques sous deux aspects essentiels. D'un coté, maints résultats de ces vingt dernières années montrent que l'infini (en acte, bien évidemment) entre massivement dans la preuve de théorèmes dont les énoncés sont finitaires (arithmétiques) comme le théorème de Paris-Harrington ou le théorème de Friedman prouvant la version finie du théorème de Kruskal ([Longo, 2002]). Il nous paraît toutefois qu'il manque une analyse "fine", épistémologique et mathématique, de ce phénomène. D'un autre côté, des résultats encore plus récents établissent des liens profonds entre la sémantique de certains systèmes logiques et la géométrie des systèmes dynamiques.

Quelle notion de calcul pouvons nous transférer sur ces derniers systèmes "continus"? Comment l'analyse mathématique, par des outils du continu, de certains systèmes discrets (langages formels et pour le calcul) peut-elle nous informer sur leur sens et sur leur expressivité? Quels liens existent entre le continu des structures utilisées pour la sémantique des langages et systèmes formels et, en passant par leur nouveau rôle dans les systèmes dynamiques, le continu des analyses morphodynamiques, en particulier thomiennes, du langage?

6. L'Informatique

Le projet de réification de la rationalité dans les "règles formelles", qui s'est développé au cours du siècle, est à la base de l'invention des ordinateurs, dans les années '30 et '40: les suites finies de symboles en tant que codage d'axiomes et de règles de déduction, permettent de manipuler d'énormes quantités de données. L'intelligence s'est transformée en la manipulation finitaire des suites finies de 0 et 1.

Malheureusement ce projet, bien que si efficace, s'est heurté à des limites bien précises. En fait, derrière les résultats d'incomplétude, que le logicisme et le formalisme eux-mêmes ont su nous donner, il y a la praxis humaine de la démonstration, qui utilise largement des références directes à l'espace (mental et physique): ce qui "manque" à la déduction formelle ou mécanique est le bon-ordre géométrique dans le quel nous rangeons les nombres dans nos espaces mentaux, ce sont les jugements explicites sur le continu spatial, sa connexion, les symétries, les analogies entre formes et mouvement. On a souvent "caché" ces pratiques conceptuelles sous une référence vague à "l'intuition". Il est temps de développer une analyse scientifique, en termes "cognitivistes", de ces aspects implicites du raisonnement, en particulier spatial, aussi rationnels que ceux gouvernés par les "règles logico-linguistiques finitaires". C'est l'Informatique même qui l'exige et cela pour au moins deux raisons différentes:

- l'essor remarquable des systèmes de calcul dans lesquels l'espace et le temps jouent un rôle central (distribution et asynchronie des systèmes concurrents), et qui sont mal représentés par certaines variantes des langages et méthodes essentiellement séquentiels,
- les difficultés immenses auxquelles s'est trouvée confrontée l'Intelligence Artificielle, en particulier la Robotique, dans la simulation des taches humaines ou animales les plus simples, en particulier quand le rapport à l'espace et au mouvement y sont centrales.

7. Conclusions

Certains des thèmes esquissés dans cette introduction ont été repris dans des ouvrages techniques, parus ou à paraître en tant que numéros spéciaux de deux revues internationales très connues. Pour quelques aspects de la géométrie dans l'informatique des systèmes concurrents, un des membres de l'atelier a édité le volume :

> **Geometry and Concurrency**, E. Goubault (Editor), Special issue of *Mathematical Structures in Computer Science*, Cambridge University Press, vol. 10, n. 4, August 2000.

Les actes d'un colloque sur les fondements des mathématiques, organisé dans le cadre de l'atelier, paraîtront dans :

> **New Programs and open problems in the Foundations of Mathematics**, G. Longo, P. Scott (Editors), Special issue of *The Bulletin of Symbolic Logic*, ASL, 2003.

Les articles de ce numéro spécial de la Revue de Synthèse reprennent le problème de l'espace et de son intelligibilité mathématique sous différentes formes : son histoire, son rapport au temps et à la causalité en physique, son rôle dans les langues naturelles. L'action dans l'espace ainsi que l'espace interne d'un monocellulaire aux performances remarquables sera suivi d'une réflexion phénoménologique sur la dynamique constituante de la conscience du corps propre dans l'espace. Après une approche originale à l'algèbre, sorte de géométrisation de l'algèbre, on analysera l'origine historique possible de la lecture du monde en terme de formalismes linguistiques mécanisants.

Au cours de 2002, les activités de cet atelier ont contribué à la mise en place d'un projet de recherche plus spécifique, sous la forme d'une nouvelle équipe au sein du Département d'Informatique de l'ENS : voir l'équipe "Complexité et information morphologiques" (http://www.di.ens.fr/~longo/CIM/projet.html).