I rapporti tra i fondamenti della matematica e della fisica: dialogo[1].

Francis Bailly
Fisica, CNRS, Meudon
Bailly@crns-bellevue.fr

Giuseppe Longo
LIENS, CNRS-ENS et CREA, Parigi
http://www.di,ens.fr/users/longo

In questo testo, verrà considerata innanzitutto una distinzione interna alla matematica, tra "principi di costruzione" e "principi di prova" (vedere [Longo, 1999], [Longo,2002], [Bailly, Longo, 2004]). In breve, si tratterà di cogliere la differenza tra la costruzione dei concetti e delle strutture matematiche e il ruolo della "prova", più o meno formalizzata. Lo scopo è anche quello di analizzare i metodi della fisica da un punto di vista simile e, partendo dalle analogie e dalle differenze che si potranno mettere in evidenza, stabilire un parallelo tra i fondamenti della matematica e i fondamenti della fisica.
Quando si parla di struttura matematica, i numeri interi per esempio, o i reali, lo spazio cartesiano o…uno spazio d'Hilbert, si utilizza una pluralità di concetti spesso derivanti da esperienze speculative diverse; la costruzione dei numeri interi richiama l'operazione generalizzata del successore, ma, nel contempo, colloca i suddetti in un "buon ordine", nello spazio o nel tempo, per ottenere quella " linea numerica", facilmente "visibile", ben ordinata, in un piano mentale. In seguito si costruiscono i razionali, come rapporti di numeri interi (modulo l'equivalenza delle proporzioni), e poi i reali, in quanto ordini convergenti (modulo l'equiconvergenza), ad esempio. Il matematico "vede"questa notevole ricostruzione matematica del continuo fenomenale, alla Cantor-Dedekind; non è, tuttavia, l'unica: differenti continui sono molto efficaci per determinate applicazioni, sebbene la loro struttura sia localmente e globalmente molto eterogenea, non isomorfa, a questo continuo standard così famigliare. (vedere [Bell, 1998]). E suddetta costruzione, realizzata a partire dal buon ordine dei numeri interi, si rivela assai importante perché fondamento dell' "oggettività" dei numeri reali. Si potrebbe dire molto sulle costruzioni insiemistiche più importanti: la gerarchia cumulativa degli insiemi, gli insiemi ricavati dall'insieme vuoto (concetto chiave in matematica) tramite ripetute operazioni di elevamento a potenza, limite, limiti di potenza e così via… . Si tratta di costruzioni logiche che rispondono dunque a dei "principi" (di costruzione, giustamente) molto chiari: successione, ordine nello spazio (buon ordine degli interi), iterazione, limiti….
Ma come comprendere le "proprietà" di tali strutture matematiche? Come "provarle"? La grande ipotesi del logicismo (Frege) così come quella del formalismo (il programma di Hilbert) si basava sulla possibilità di descrivere completamente le proprietà delle strutture portanti in matematica attraverso dei principi di prova logico-formali. In particolare, l'induzione, sia come principio logico (Frege) che come operazione formale, potenzialmente meccanizzabile (Hilbert), avrebbe dovuto permettere di dimostrare tutte le proprietà degli interi (per Frege, la logica dell'induzione coincideva, semplicemente, con la struttura dei numeri interi-essa avrebbe dovuto essere *categorica*, in termini moderni). Dunque si dimostra che la deduzione logico-formale non è allo stesso modo "completa" (lasciamo cadere l'ipotesi implicita di "categoricità" di Frege): ad essa "sfuggono", in particolare, numerose proprietà "concrete" degli interi. Riporteremo i risultati "concreti" di incompletezza degli ultimi decenni: l'esistenza di proprietà molto interessanti, verificabilmente realizzate dalla struttura dei numeri, e che la prova formale non riesce ad afferrare. Ma ciò riguarda anche certe proprietà fondamentali degli insiemi, l'ipotesi del continuo e l'assioma della scelta ad esempio, ipotesi per dimostrazione vere nell'ottica di alcune costruzioni (Gödel, 1938) o per dimostrazioni false, dunque inattendibili (Cohen, 1964), attraverso la sola voce delle assiomatiche e della deduzione formale.

[1] Capitolo introduttivo al libro di Francis Bailly e Giuseppe Longo, *Mathématiques et sciences de la nature. La singularité physique du vivant*, Hermann, Paris, 2006. Questo capitolo è stato tradotto dal francese da M. Castellana per il volume "Per una epistemologia dei contenuti" (Castellana ed.), Bari, 2006. Una versione inglese della seconda parte apparirà in "Rediscovering Phenomenology in Science", (L. Boi, P. Kerszberg, F. Patras eds.), Kluwer, 2007.

Per riassumere, la distinzione tra "principi di costruzione" e "principi di prova" mostra che i teoremi di incompletezza tornano a ostacolare la riduzione (teorica ed epistemica) dai primi ai secondi (o ancora dalla semantica - proliferante e generativa – alla sintassi strettamente formalizzante).

Si può trovare, questa volta, relativamente ai fondamenti della fisica, una pertinenza ad una tale distinzione? In cosa consisterebbe questa pertinenza e il suo ruolo epistemologico sarebbe altrettanto simile? In effetti, se i contenuti e i metodi di queste due discipline sono prevalentemente diversi, il fatto che la matematica svolga un ruolo basilare per la fisica dovrebbe tuttavia permettere di stabilire qualche corrispondenza concettuale ed epistemologica a livello dei loro rispettivi fondamenti. Questa è la questione che cercheremo di analizzare. Scopo per il quale è necessario descrivere un unico livello di"principi di costruzione" per la matematica e per la fisica, quello delle strutture matematiche. Tale livello è comune alle due discipline, poiché la strutturazione matematica del mondo reale è un elemento costitutivo di tutto il sapere fisico moderno (in breve, ma verrà rivisto, la costituzione dell' "oggetto fisico" è matematica).
Tuttavia, la differenza appare molto netta quando si parla di principi di prova. Questi ultimi sono di natura logico-formale in matematica, legati all'osservazione e all'esperienza, in breve alla misura, in fisica. E' una separazione di natura epistemica che rinvia, dal punto di vista storica, al ruolo del logicismo (e del formalismo) in matematica e a quello del positivismo in fisica. Appoggiamoci dunque alla tabella seguente:

Discipline	**Matematica**	**Fisica**
Livello dei principi di costruzione	Strutture matematiche e i loro rapporti	
Riduzioni/Separazioni epistemiche	Logicismo/Formalismo	Positivismo/Empirismo
Livello dei principi di prova	Linguaggi formali/logica	Esperienza/osservazione

Commentiamo questo schema più precisamente.
IL livello superiore corrisponde ai principi di costruzione che trovano concretezza e traduzione nell'elaborazione e nello sviluppo delle strutture matematiche così come nei vari rapporti che le strutture stesse mantengono (siano queste strutture relative alla matematica propriamente detta, o ai modelli matematici i quali ritrascrivono, organizzano, in seguito generano principi fisici – e da lì, almeno in parte – i fenomeni che tali principi "legalizzano", provocando e guidando spesso esperienze ed osservazioni). La condivisione di questo livello tra le due discipline, per quanto riguarda la costruzione, non dipende unicamente dal carattere costitutivo della matematica per la fisica, carattere a cui abbiamo poc' anzi accennato e che sarebbe sufficiente a giustificare la suddetta comunanza, essa permette anche di comprendere la frequenza dei cambiamenti teorici (non solo strumentali) tra le due discipline. Sia che la fisica ricerchi elementi di generalizzazione, tipizzazione e generazione all'interno delle strutture matematiche e dei loro rapporti, sia che gli sviluppi propri della fisica suggeriscano e propongano alla matematica la costruzione di nuove idealità… delle quali essa stessa fa già uso, senza aspettare che esse siano state rigorosamente dimostrate (gli esempi storici abbondano: che si tratti del calcolo infinitesimale di Leibniz, così paradossale all' epoca in cui venne introdotto - e per molto tempo ancora - e che non trova una validità teorica se non attraverso un'analisi non standardizzata, o della "funzione" di Dirac, rigorosamente elaborata soltanto nella teoria delle distribuzioni, o degli integrali di cammino di Feynmann, che tuttora non hanno trovato una rigorosa elaborazione matematica sufficientemente generale, pur rivelandosi completamente operatori – o, ancora, che si tratti della nascita della geometria non commutativa ispirata dalle proprietà della fisica quantistica).
Il livello inferiore, corrispondente a quello dei principi di prova, si divide in due parti distinte a seconda che ci si riferisca alla matematica o alla fisica (ciò a causa dei loro, evidentemente, diversi referenti). Per la matematica tali referenti o fondamenti, come furono chiamati a partire da Russell, Frege, Hilbert, sono rappresentati dalle sintassi e dai linguaggi logico-formali corrispondenti. In effetti, il logicismo e il formalismo, che si sono così sviluppati a discapito di ogni altro approccio, non hanno desistito dal limitare il livello dei principi di costruzione a quello dei principi di prova riducendo il primo al secondo. Poiché i teoremi d'incompletezza hanno dimostrato che questo programma non poteva essere portato a termine per ragioni interne al formalismo, l'effetto paradossale è stato quello di disgiungere completamente un livello dall'altro nell'epistemologia dei fondamenti della matematica, portando ad opporre sintassi e semantica o rifiutando di soddisfarsi di prove non del tutto formalizzate (se si intende da questo formalismo) come possono esisterne in geometria. Al contrario, in realtà, sembra proprio che,

come dimostra tutta la pratica dei matematici, sono l'unione e la circolazione concettuali tra questi due livelli a creare quella articolazione tra rigore e immaginario innovativo che caratterizza la generazione concettuale della matematica e la stabilità delle sue invarianti.
Ora, per la fisica, in cui l'emergere delle invarianti costituisce anche un cardine metodologico, così come la costituzione degli oggetti e dei concetti (vedere, ad esempio, [Bailly, 2000], [Bailly, 2002]), può essere tracciata una tabella simile. Ma stavolta, al livello dei principi di prova non si trova più un linguaggio formale, bensì l'empiricità dei fenomeni: esperienze, osservazioni, addirittura simulazioni, che convalidano le predizioni teoriche dei modelli matematici, i quali ne provano la pertinenza. Per quanto costruiti essi abbiano potuto essere dalle teorie e dalle interpretazioni precedenti, sono i fatti fisici che costituiscono i referenti e gli strumenti delle prove. E qui ancora, un'opzione filosofica particolare, legata allo stadio di sviluppo della disciplina e all'esigenza di rigore quanto alla fattualità fisica, ha svolto per quest'ultima un ruolo simile a quello svolto dal logicismo e, soprattutto, dal formalismo per la matematica. Si tratta del positivismo e dell'empirismo radicale i quali, pensando di non poter attenersi che ai fatti, tentarono di ridurre il livello della costruzione, caratterizzato specialmente dai dibattiti interpretativi, a quello della prova, identificato, alquanto abusivamente, nell'empiricità pura. Gli sviluppi della fisica contemporanea, quello della fisica quantistica in particolare, sicuramente, ma anche quello della teoria dei sistemi dinamici, hanno dimostrato che tale posizione non era più sostenibile e lo stesso effetto paradossale ha portato, senza alcun dubbio per reazione, a separare, epistemologicamente, i livelli della costruzione e della prova (traccia che ne deriva è l'opposizione tra "realisti" e "nominalisti" nell'epistemologia della fisica), quando invece tutta la pratica dei fisici rivela che è ancora nell'unione e nella circolazione tra questi due livelli che si individua la fecondità della disciplina. E, dal momento che per noi l'analisi della genesi dei concetti rientra nell'analisi fondazionale, giustamente occorre analizzare questa produttività che si nutre delle interazioni e si inserisce profondamente nei processi conoscitivi.
E' in questo senso dunque, riassunto dallo schema sovrastante, che i fondamenti della matematica e i fondamenti della fisica, malgrado i loro contenuti e i loro metodi fortemente discordanti, presentano alcuni tratti strutturali comuni. E cioè, questa distinzione tra due istanze concettuali diverse, potenzialmente definibili nei due casi di principi di costruzione e principi di prova e la necessità della loro unione - contro la loro separazione o, al contrario, la loro confusione – per poter, anche, rendere conto della pratica effettiva dei ricercatori di entrambe le discipline. A tal punto che esse condividono lo stesso livello delle strutture matematiche che caratterizzano la dinamica dei principi di costruzione e si alimentano dello sviluppo di ciascuna di esse.

Se ora affrontiamo brevemente il caso un'altra disciplina della scienza della natura, la biologia, essa sembra, quanto alla struttura dei suoi fondamenti, allontanarsi da questo schema, sebbene si possa considerare che essa condivida con la fisica lo stesso livello di principi di prova, e cioè l'obbligo a far riferimento all'empiricità dell'osservazione e dell'esperienza. Con la piccola differenza che, a livello di tali principi di prova, si è portati a fare una distinzione cruciale tra ciò che compete all'*in vivo* (propriamente biologico poiché integrato e regolato dalle funzioni biologiche) e ciò che compete all'*in vitro* (e che si confonde praticamente con lo psico-chimico). Al di là di ciò, quello che cambia chiaramente di più, sembra dipendere da due fattori essenziali. Da una parte, il livello di ciò che in biologia potrebbe essere chiamato dei "principi di costruzione" non sembra ancora essere ben caratterizzato e stabilizzato (nonostante i modelli di autonomia e di autopoiesi). Dall'altra, all'epistemologia del vivente, sembra venire ad aggiungersi un altro livello concettuale specifico con il quale viene confrontata ogni riflessione in biologia e che si potrebbe definire, per riprendere la terminologia di Monod, livello di teleonomia. Secondo questo principio in qualche modo la comprensione del vivente dipende non solo dalla comprensione dei suoi rapporti passati e presenti con l'ambiente pertinente, ma anche da quella delle *anticipazioni* relative al futuro di ciò che tale ambiente diventerà sotto l'effetto della sua attività di vivente (aspetto di questo terzo fattore di temporalità, messo in evidenza in [Bailly, Longo, 2003]). E tale temporalità si affianca alla comune temporalità fisica che regola i rapporti d'azione e di reazione fisico-chimici e alla temporalità biologica tipica dell'organismo che si traduce attraverso l'esistenza e l'attività degli "orologi del vivente" i quali scandiscono le sue funzioni. (vedere anche [Bailly, Longo, 2003]). La situazione concettuale che si crea conduce in questo modo ad elaborare, per la biologia, la definizione di un concetto specifico supplementare, in relazione con i primi due, chiamato da uno degli autori "finalità contingente"; con esso ha inteso le regolazioni indotte dalle implicazioni di tali anticipazioni, anticipazioni che aprono la via alla considerazione dei "significati" (vedere[Longo, 2003]).

Questo articolo prosegue attraverso una problematica ed un dialogo, limitato ai fondamenti della matematica e della fisica, tra i due autori sulla base dei temi abbozzati in questa introduzione.

I. Fondamenti della matematica. Prima problematica.
(di Francis Bailly)

1. Questioni di terminologia?

1.1 A proposito del termine “struttura”.

.

Sembra proprio che il termine “struttura” (e i suoi derivati) possa assumere due diverse accezioni. La prima rinvia all’uso abituale del termine nella disciplina matematica: si tratta di una struttura matematica formale caratterizzata da una assiomatica ed associata a regole di deduzione. Ad esempio, struttura del corpo dei reali, struttura dei numeri definiti dall’aritmetica di Peano, struttura dei gruppi di trasformazioni,…
La seconda rinvia piuttosto ad una struttura, caratterizzata da proprietà di contenuto più che da determinazioni formali assiomatiche e che presenta dunque un aspetto maggiormente semantico. E’ il caso, ad esempio, della struttura del continuo o della connessione dello spazio. E’ con questa seconda accezione che G. Longo sembra utilizzare più frequentemente il termine all’interno della sua critica del procedimento formalista ed insiemistico ed è in questo ultimo contesto che siamo portati ad interrogarci sulla possibilità dialettica tra la rigidità di una struttura eccessiva e la dispersione di una struttura completamente assente.
Per prendere l’esempio dello spazio ci si rapporterà ad una sorta di spazio totalmente determinato nella sua topologia, nelle sue diverse proprietà, nella sua metrica - dunque molto “strutturato”- o, al contrario, ad uno spazio - molto destrutturato – di semplici insiemi di punti che permettono, alla Cantor, di stabilire, in cambio della perdita di ogni continuità e di ogni nozione di vicinanza, una biezione tra il piano e la retta, molto lontana dalla prima intuizione fenomenologica dello spazio nel quale il nostro corpo si colloca e si evolve?
Giunti a questo stadio non possiamo dunque impedirvi di notare che i sistemi di riferimento utilizzati in fisica contemporanea si richiamano a “spazi” che presentano proprietà, in qualche modo, intermediarie: essi rinunciano, infatti, ad una determinazione assoluta molto forte, se non addirittura completa (lo spazio di Newton e della meccanica classica), tuttavia non arrivano alla dispersione di punti gli uni indipendenti dagli altri, come accade negli insiemi cantoriani. Di conseguenza essi conservano una struttura importante in termini di continuità o di connessione, mentre perdono, *tramite* l’affermazione di proprietà di omogeneità e di isotropia, numerose determinazioni possibili poiché legati a invarianze sufficientemente vincolanti per simmetria al fine di negare la definizione di un’origine assoluta, o di una direzione privilegiata, o ancora di altre proprietà “rigide”. Il teorema di Noether stabilisce allora una correlazione essenziale tra questi proprietà di simmetria e la conservazione di alcune grandezze fisiche (energia, momento cinetico, carica elettrica…) che caratterizzano il sistema, nella sua profonda identità e nella sua evoluzione. In realtà esso ci dice che sono queste stesse proprietà di simmetria (dunque di invarianza) che vengono condotte a caratterizzare la struttura pertinente - né troppo forte, né troppo debole – dello spazio di riferimento.
Vi sarebbe, perciò, una sorta di equivalente di questo genere in matematica in cui una “struttura” troppo forte non permetterebbe di costruire che degli oggetti “isolati” e specifici, mentre un po’ di flessibilità strutturale consente di distinguere affinità e di elaborare delle categorie e dei rapporti tra esse.

1.2 A proposito del termine “fondamento” .

Il termine “fondamenti” solleva delle questioni simili. In effetti, sembra che esso possa assumere due accezioni fortemente diverse.

Ad esempio, il richiamare un'origine *a priori*, origine associata ad una prima intuizione, a partire dalla quale sarebbe spiegato, storicamente, il complesso teorico (l'intuizione fenomenologica del continuo o del numero, ad esempio), e che si manterrebbe come istanza ermeneutica della questione posta inizialmente [Salanskis,1991]. Il fondamento avrebbe allora un statuto genetico, garante della pertinenza ermeneutica di una domanda, grazie alla fecondità teorica che essa genererebbe. Con tale accezione, esso si presenta in qualche modo come il sostegno che sta alla base di ogni nuovo sviluppo, di ogni costruzione successiva. Ci si domanda se non è in questo senso che Longo vorrebbe sempre utilizzarlo.
Ma, per contrasto, e storicamente, il "fondamento" può designare anche una struttura *a posteriori,* struttura molto formale, addirittura completamente logicizzata, che si presenta come il frutto di un'evoluzione teorica e l'elaboratissimo prodotto di una ricostruzione razionale che permette di reinterpretare e di ricollocare tutto il lavoro precedente del concetto (come nel caso della ricostruzione assiomatica di Hilbert, ad esempio). E' in parte in questi termini che si è posta la problematica dei fondamenti quale è apparsa dopo la crisi dell'inizio del XX° secolo.
Al di là delle loro posizioni contrastate in relazione alla "temporalità" del lavoro teorico-concettuele (in un caso la difficoltà di assegnare un'origine, nell'altro l'impossibilità di raggiungere una posteriorità) non sottendono forse queste due accezioni diverse rappresentazioni dell'essenzialità? Nel primo caso nel tipo di domanda posta (per quanto indeterminata essa possa ancora apparire ma ricca degli ulteriori sviluppi che è suscettibile di generare), o, nel secondo, nel tipo di risposta data, capace di reinterpretare e conferire un senso al tentativo che essa stessa riprende e riassume e di cui è il risultato?
In ultimo troviamo chiaramente la questione relativa all'**invarianza** (invarianza strutturale e stabilità concettuale, secondo Longo, una delle caratteristiche più importanti della matematica intesa come disciplina). Nell'attuale problematica, l'invarianza stessa, sembra potersi presentare sotto due aspetti: da una parte nell'insistenza della questione originaria mai risolta (ad esempio, la questione del continuo che da luogo a ricerche sempre più profonde), dall'altra nella struttura formale, che è la ricerca a rivelare, e che, una volta costruita, si presenta in maniera quasi atemporale (l'invarianza legata al teorema di Pitagora, ad esempio).
Non sarebbe ciò a permettere di spiegare il duplice carattere legato al concetto di fondamento ma forse anche il duplice aspetto della struttura, a seconda che essa si richiami ad una ricchezza fondata su un'intuizione semantica o ad un rigore vincolato dal formalismo?

2.Genesi delle strutture matematiche, dei loro rapporti e di qualche analogia concettuale.

Si tratta ora, sempre a proposito delle strutture matematiche [Longo,1999], di sollevare e discutere brevemente le questioni relative alla loro genesi (e dunque non solo alla loro storia). Operando dunque, come è stato notato precedentemente, una distinzione importante tra la genesi delle strutture matematiche stesse e quella ricostruita dei loro rapporti, entrambe ci sembrano dipendere da approcci, concettualizzazioni e procedure molto diverse e tirare in gioco distinte risorse cognitive.
Ciò ci condurrà ad introdurre la questione dei concetti di "temporalità" che ne risultano, tentando di metterli in rapporto (essenzialmente di analogia concettuale, del resto) con i concetti di temporalità che si possono riscontrare in altri settori disciplinari, primo tra tutti, la biologia. Tali considerazioni sfoceranno sulle questioni relative ad una rivisitazione del termine "costruzione" e alle delimitazioni delle accezioni che esso può ricoprire in situazioni concettuali distinte.

2.1 Quanto alla genesi delle strutture matematiche, possiamo parlare, da una parte, di una genesi storica propriamente detta che può essere nuovamente delineata e datata seguendo il calendario, dall'altra di una genesi concettuale la cui temporalità è nettamente più complessa**.** Naturalmente per la prima, la materia è la storia della matematica, le scoperte e le invenzioni evenemenziali, dunque non è di nessuno aiuto ritornarci. La seconda è di natura abbastanza differente: quel approccio che aveva visto il suo momento di preponderanza viene oscurato da altri, poi riappare, si sviluppa, è di nuovo nell'oblio fino alla successiva resurrezione (fu il caso, in fisica, dell'ipotesi atomica, è tuttora il caso dell'infinito matematico) ; quel altro che sembrava autonomo ed originale, addirittura unico come la geometria euclidea, si rivela, in fine, essere la parte costitutiva di una particolare tematizzazione di una corrente più generale, corrente alla quale si ricollega ormai il suddetto approccio e che conferisce ad esso un diversa colorazione (fu frequentemente anche il caso all'interno della teoria dei numeri: in primo luogo con l'apparizione dei numeri negativi, successivamente con quella dei numeri complessi; o ancora con i numeri primi e i numeri immaginari). Il lavoro che si nasconde dietro queste evoluzioni è quello del concetto, della sua delimitazione e della sua generalizzazione. E' un lavoro che non si presenta lineare ed orientato in un'unica direzione: esso ritorna sulle definizioni e sugli sviluppi precedenti, li arricchisce, li modifica, li moltiplica facendo loro occupare settori diversi, li riunifica, li ritraduce gli uni negli altri. "Internalizza", in qualche modo, la temporalità storica che ha generato i concetti di riferimento per farne una temporalità che interpreta e da interpretare. E', come è stato ricordato più tardi, ciò che giustifica, a fianco dell'approccio filosofico che vi associa l'autore, la definizione di *ermeneutica formale* che gli ha concesso Salanskis, prendendo come esempi caratteristici le teorie del continuo, dell'infinito e dello spazio. L'approccio proposto da Longo riconosce allo stesso modo l'esistenza di una dimensione ermeneutica nella genesi delle strutture matematiche, come lascerebbe supporre lo spazio che egli concede al *significato*, al di là di quello puramente sintattico.

2.2 La questione della genesi dei *rapporti* tra strutture matematiche nasce da una problematica ben diversa. Anche questa genesi presenta due aspetti a seconda del tipo di approcci che si privilegia: l'aspetto comunemente definito *fondazionale* e quello che chiameremo *relazionale.*

L'aspetto fondazionale corrisponde a grandi linee all'approccio formale-insiemistico. Si caratterizza per la ricerca dei fondamenti, i più semplici, i più intuitivi o i più elementari possibili, a partire dai quali è possibile ricostruire l'insieme della matematica alla maniera di un edificio e in modo progressivo e deduttivo andando dal più elementare al più complicato o al più sofisticato. Da questo punto di vista, tale genesi può essere considerata contrassegnata dall'irreversibilità del processo e viene abbastanza naturalmente associata ad una standardizzazione delle tappe. Ciò che si suppone - nei primi programmi formalisti - possa far corrispondere, da una parte, quelli che definiamo principi di prova, dall'altra, quelli di costruzione. E' stato uno degli effetti dei teoremi di incompletezza rivelare che gli uni non coincidevano affatto con gli altri.

Per contrasto l'aspetto relazionale è più di natura intuitivo-categorica: le strutture si sostituiscono reciprocamente le une alle altre in una rete, molto più di quanto non si succedano nell'erezione dell'edificio. L'intertraducibilità si manifesta in maniera diagrammatica ed il fondamentale si riassume nell'isomorfia delle corrispondenze molto più che in una supposta elementarità. Qui, l'inadeguatezza tra principi di prova e principi di costruzione rivelata dai teoremi d' incompletezza, non rappresenta più un vero problema, giacché non è più necessario far coincidere la progressività a partire dal fondazionale e l'elaborazione di strutture. Non è più un problema, come sottolinea ancora Longo, il ricorso a definizioni che non siano predicative, dal momento che la rete in questione non è ritenuta essere concettualmente gerarchizzata come le teorie insiemistiche.

Così, tanto la genesi fondazionale - di tipo insiemistico – dei rapporti tra strutture richiama la corrispondenza con una sorta di temporalità (logica) esterna, unidimensionale, irreversibile, tanto la genesi relazionale - ti tipo categorico – rinvia ad una temporalità propria, interna, caratteristica della rete che contribuisce a tessere. Come si potrebbe definire tale temporalità in un modo appropriato che non sia puramente intuitivo e che genererebbe un processo di oggettivazione?

2.3 Da questa angolazione**,** le genesi di strutture e le genesi di rapporti tra strutture, nonostante le loro profonde differenze, sembrano dunque formare una coppia che articola due temporalità discordanti, l'una definita, in qualche modo, esterna e l'altra derivata (o regolata) da un interno. In questa coppia tali temporalità relative alla vita della matematica offrono delle analogie sconcertanti con determinati aspetti della biologia teorica, fautrice anch' essa dell'unione di due tipi di temporalità: la temporalità fisica dei rapporti esterni dell'organismo con il suo ambiente (temporalità che presenta tutte le caratteristiche del tempo fisico, modulo i rapporti tipicamente biologici tra stimolo e risposta) e la temporalità intrinseca dei suoi ritmi iterativi definiti non più da grandezze fisiche dimensionali (secondi, ore,…) bensì da numeri puri (il numero di pulsazioni cardiache della vita di un mammifero, il numero di respirazioni corrispondenti, etc.). Ed in effetti, nel caso dei rapporti tra strutture il parallelo sembra particolarmente significativo: il "tempo" irreversibile delle derivazioni fondazionali associate alle teorie insiemistiche fa eco al tempo fisico-biologico esterno della successione delle forme del vivente (in una sorta di logica comune del *così…, dunque…*), mentre la temporalità propria dei rapporti categorici di "sistemazioni in rete" risuona piuttosto con il tempo biologico tipico degli " orologi del vivente " [Chaline, 1999] - morfogenesi, attivazioni geniche, funzionamenti fisiologici, … - (stavolta, secondo una logica apparentemente più restrittiva nell'impegno ontologico ma più flessibile nell'apertura delle possibilità del *se…, allora…*).

E' da notare, inoltre, che curiosamente (senza dubbio non si tratta di un caso fortuito, tenuto conto delle rappresentazioni dinamiche che sono spesso all'origine degli approcci intuizionisti e costruttivisti), la costruzione relazionale dei rapporti tra strutture tende a mobilizzare un "semantismo" abbastanza vicino alla versione autoorganizzativa delle teorie biologiche [Varela, 1989]: da una parte, infatti, la tolleranza, limitatamente alla non predicatività e all'autoriferimento, si accorda con l'approccio autoorganizzatore (ed in questo caso, autoreferenziale) dell'organismo (rapporti rivalutati del sé e del non sé, legami tra vita e conoscenza, ricorso alla ricorsività "chiusa",etc.), d'altra parte la fermezza categorica a cui si ricorre in questo stesso approccio costruttivo chiama in causa la chiusura organizza associata al paradigma "auto " per delimitare le identità e definire i cambiamenti. Ecco una delle possibili fonti dei riavvicinamenti cognitivi che ci proponiamo di operare tra fondamenti della matematica e fondamenti della biologia.

2.4 Se si accetta di seguire fin qui questa analisi, si arriva alla conclusione che il termine *costruzione,* la cui importanza si è rivelata fondamentale nell'epistemologia della matematica quanto in filosofia (non sottolinea forse Kant che se la filosofia procede per concetti,da parte sua la matematica procede per elaborazione di concetti?) si ritrova contemporaneamente destabilizzato e arricchito, perché portato a ricoprire due accezioni distinte che non si riducono reciprocamente l'una all'altra.
Da una parte, infatti, si avrebbe una costruzione in qualche modo irreversibile (almeno *a posteriori*) che conduce dalle infrastrutture alle sovrastrutture (è il caso, ad esempio, della costruzione degli ordinali a partire dall'insieme vuoto o dei numeri razionali a partire dagli interi naturali, etc.) come viene presentata dall'approccio formalo-insiemistico (il quale, del resto, implica tale nozione di costruttibilità nel proprio *corpus*, assieme agli insiemi costruttibili, ad esempio). D'altra parte si avrebbe una costruzione molto più vicina a quella che l'intuizionismo ed il costruttivismo propriamente detta tendono a definire, costruzione che investe principalmente le relazioni tra le strutture matematiche cosi come vengono presentate dalla teoria delle categorie: non solamente genesi da strutture a strutture, ma anche restituzioni dei processi effettivi di costituzione.
Se si riprende, sempre in questo ambito, la distinzione introdotta tematizzata più in alto, è da notare che i principi di prova secondo la prima accezione attribuiscono molta più importanza alle derivazioni sintattiche e alle esigenze di predicatività, mentre nella seconda prospettiva essi sono molto più tolleranti di fronte a determinate forme di impredicatività e lasciano grande spazio alle determinazioni semantiche. Quanto ai principi di costruzione propriamente detti, qualora li si consideri in riferimento alla prima versione della costruzione, si direbbe che essi trovino i loro fondamenti piuttosto nelle assiomatiche, al contrario nella seconda versione essi troverebbero le loro dinamiche piuttosto nell'immaginario ipotetico, a costo di regolare quest ultimo attraverso il vincolo di deducibilità (ad esempio la categoria considerata come un sistema deduttivo [Lambeck, Scott, 1986]).

3. Formalizzazione, calcolo, significato, soggettività.

3.1 La “ formalizzazione”.

La prima questione sembra ancora poggiare su aspetti terminologici tuttavia la sua spiegazione coinvolge forse una dimensione epistemologica più estesa [Longo, 1999b; 2002]. In molte discipline, ed in particolare per alcuni fisici, il termine “formalizzazione” (e i suoi derivati) equivale praticamente a quello di “ matematizzazione ” (addirittura, in modo ancora più limitativo, a quello di “modellizzazione”). Non è chiaramente il caso dei matematici e dei logici, per i quali il termine assume un'accezione molto più definita e molto più forte. In effetti, nella tradizione degli attuali programmi fondazionali, il termine è considerato in un'accezione strettamente formalista e, per di più decisamente finitaria, di conseguenza “formalizzabile” è praticamente sinonimo di “meccanizzabile” o di “algoritmizzabile”. Come definire allora le altre “formalizzazioni” che, pur rimanendo nell'ambito della logica, non rispondono in realtà a queste norme così restrittive e, tuttavia, presentano lo stesso rigore nei ragionamenti e nell'amministrazione della prova? Se, come è stato riscontrato in [Longo, 2002] la nozione di prova, in matematica, contrariamente alla certezza di Hilbert, non è necessariamente decidibile, quali saranno esplicitamente (se è possibile precisarli) i criteri “oggettivi” (o almeno condivisi in maniera consensuale, intersoggettivo) che consentono le convalidazioni?
D'altro canto - in un registro di problematica relativamente simile, in quanto distingue questa volta il formale ed il calcolabile - che ne è, rispetto alla questione dell'infinito, della situazione , apparentemente non standardizzata in analisi, in cui si possono avere insiemi formalmente finiti (poiché non equipotenti a nessuna delle loro parti) pur risultando, attraverso i calcoli, infiniti, giacchè, ad esempio, comportano numeri infinitamente grandi? E' abusare del concetto di “formale” (o di “calcolabile”), o si origina forse una commistione abusiva tra caratteristiche logiche distinte, o, al contrario, non è assolutamente grave: basterebbe ridefinire il termine? Del resto ci si può chiedere quale sia il pensiero esatto di Longo in merito al riferimento a (e all'uso di) “ l'infinito attuale” in matematica: i suoi orientamenti intuizionisti e costruttivisti, pare, debbano condurre all'eliminazione di questo concetto, egli sembra convalidarne l'esistenza e l'uso tanto nelle strutture matematiche quanto nelle prove.

3.2 Lo statuto del “ calcolo”.

Quanto alla questione del “calcolo”, notiamo che, in fisica, ogni suo passaggio relazionato al modello matematico che ne è alla base, non richiede necessariamente un correlato “esterno”, nell'oggettività fisica (e del resto si può

passare dalle premesse ai risultati attraverso calcoli molto diversi). In compenso sembrerebbe, da un punto di vista strettamente matematico che, ogni passaggio di un calcolo debba avere un correlato “esterno”(al calcolo propriamente detto), e cioè delle regole logiche e dei ragionamenti che permettono il calcolo stesso.
Al contrario, gli “input” matematici (assiomatiche, ad esempio) e gli “output” corrispondenti (teoremi) appaiono relativamente arbitrari (rispondenti solamente all’implicazione del *se… allora…),* mentre gli “input” fisici (i principi) così come gli “output” (predizioni basate sull’osservazione o sulla sperimentazione) sono strettamente vincolati dall’oggettività e fenomenalità fisiche che coartano il modello matematico.
Da cui le domande: dove si colloca e come si manifesta in matematica la costruzione di senso considerata in rapporto con il calcolo? Che ne è dei “ significati” associati alle regole stesse che coordinano il suddetto?

3.3 Indipendenza di alcuni risultati e ruolo dei significati.

Accanto a ben altre ragioni [Longo, 1999; 1999b; 2002], per criticare il programma formalista ed il percorso da esso introdotto a proposito della struttura (strettamente sintattica) e dell’assenza di significati della prova, sono i risultati di incompletezza e di indecibilità ad essere presi in considerazione. Lo stesso vale per l’indipendenza dell’ipotesi del continuo a cui si fa giocare un po’ il ruolo critico, ma piuttosto rispetto alla teoria formale degli insiemi. Ciò nonostante, non si può evitare di ricordare che la storia della geometria è contrassegnata da problematiche simili, con la constatazione, ad esempio, ricavata dopo secoli di infruttuose ricerche, dell’indipendenza del 5° assioma di Euclide, la cui negazione apre le vie alle geometrie non euclidee. Da cui la domanda: lo stesso genere di critica verrebbe mosso verso l’assiomatica geometrica, o si sarebbe considerato il fatto che, in realtà, si tratta di un processo diverso in quanto tira direttamente in gioco i “ significati” (ed in cosa)?[1]
D’altra parte, tuttavia, si sa bene che tali significati sostenuti principalmente dalla percezione o da abitudini di linguaggio rischiano di essere erronei (illusioni, effetti del linguaggio,…), in che modo, allora conservare tutto ciò che si guadagna dal prendere le distanze da una sorta di semantica spontanea, senza perdere le dimensioni del “ senso ”? A quel punto non si verrebbe condotti a relativizzare questo “senso”, a renderlo tributario della genesi delle strutture matematiche e delle prove, a storicizzarlo, dunque, come storicizzare in stretta connessione con le evoluzioni concettuali l’intuizione matematica (o fisica) le cui forme, contenuti, vie, cambiano in funzione delle acquisizioni accumulate?

3.4 Rapporti tra razionalità, fenomeno emotivo e oggettività.

Se tutti si accordano per riconoscere l’importanza e l’oggettività degli affetti e delle emozioni nell’immaginario e nella creatività scientifici, non sussiste, tuttavia, un duplice processo di separazione tra i due, ai due poli estremi del percorso scientifico? All’origine di questo percorso (anche da un punto di vista storico), la separazione porterebbe tra approccio razionale e magia (o mito), ovvero in una voglia di oggettività e razionalità. Alla conclusione del processo creatore (o di comprensione, vale a dire di ri-creazione, in un certo senso), la separazione porterebbe tra la singolare specificità del soggetto implicato a causa delle proprie emozioni ed il vincolo di comunicazione necessario a stabilire un’intersoggettività che permetta la costruzione di oggettività.
L’eccesso del formalismo, da questo punto di vista, sarebbe stato quello di confondere le condizioni che consentono quest’ultima separazione con l’eliminazione dei significati stessi cercando di ridurre la costruzione oggettiva al gioco di una sintassi “pura”. A questo riguardo, il percorso del formalismo non è esente da un’interessante paradosso storico in quanto inizialmente concepito in relazione con una dimensione etica indubitabile, e dunque ricchissima di significati: Leibnitz, nella sua ricerca di una caratteristica universale, aveva chiaramente come obiettivo, tra gli altri, quello di eliminare la violenza nelle relazioni tra umani, i *calculemus* che devono sostituirsi ai rapporti basati sulla forza, dal momento stesso in cui gli interessi soggettivi venivano messi da parte. E tale preoccupazione - ad eccezione della sua effettiva attualizzazione sotto forma di logicismo - dovrebbe, senza alcun dubbio, essere autenticata. In questo senso, credo che l’unica alternativa, in effetti, risieda nella costruzione e nella determinazione cognitiva di queste *invarianti* menzionate da Longo.
Ma siamo attualmente nella condizione di cogliere le invarianti (cognitive, dunque, e non più solamente disciplinarie) che permetterebbero, da parte loro, di assicurare quella condizione di oggettività mantenendo suddetti significati (o almeno la loro generazione) senza tuttavia includervi le singolari idiosincrasie?. Se la pratica effettiva di numerose discipline - inclusa la matematica in cui il riferimento è puramente concettuale - sembra chiaramente indicare che ciò dovrebbe essere possibile, in compenso un enunciato più preciso dei minimi particolari di queste invarianti cognitive rimane molto più problematico.

[1] Risponde immediatamente Longo: "No, Euclide non fa ipotesi di completezza degli altri quattro assiomi. Al contrario egli dà grande importanza al quinto, preceduto da una definizione ad hoc (rette parallele)".

4. Memoria e oblio in matematica.

In [Longo, 1999c], G. Longo affronta la questione della temporalità matematica attraverso quella della memoria (dei concetti, dei metodi della loro elaborazione, delle loro trasformazioni, etc.) proponendo così una pista volta a delineare le caratteristiche di questa particolare temporalità, legata alla costruzione dell'oggettività matematica che si manifesta nella genesi delle strutture. Ciò che dice a riguardo, in relazione ai significati, ci sembra interessante e convincente. Egli affronta inoltre, molto più brevemente, la questione dell'oblio nella costituzione delle invarianti concettuali e matematiche, richiamando, in particolare, i rapporti tra cosciente ed incosciente. Eppure è su questo punto dell'oblio (e di una certa forma di atemporalità che sembra essere legata ad esso) che si pone una questione che, personalmente, ritengo importante.
Il punto culminante dell'oblio e della atemporalità, quanto ai fondamenti della matematica, risulta come se fosse stato intaccato dal programma formalo-logicista e dall'eliminazione dei significati che esso raccomandava esplicitamente. Così facendo, questo percorso obliò senza dubbio la memoria, ma intendeva offrire, in cambio, il vantaggio della comunicazione completa (indipendentemente dalle diverse culture, dalle tradizioni caratteristiche, dalle singolari soggettività e dunque, nel suo spirito di accostamenti sterili e contemporaneamente di ambiguità concettuali). Senza ritornare sulle questioni precedenti quali la revisione delle invarianti cognitive, ancora teoricamente problematiche ma, sembra, empiricamente appurate, consentirebbe tale percorso di articolare, stavolta, i giochi e le interazioni tra questa memoria costruttiva necessaria e questo oblio che non è da meno, tra questa temporalità propria della genesi della matematica e questo coefficiente di atemporalità, i quali entrambi permettono la convalidazione e la cumulazione interculturale?

II. Concetti matematici e oggetti fisici.

(di Giuseppe Longo)

1. Introduzione

Uno degli obiettivi di questa sezione sarà stabilire un parallelo tra la costituzione dei concetti matematici e degli oggetti fisici, riprendendo le questioni sollevate da F. Bailly. Non si potrà che rispondere parzialmente a questa problematica e piuttosto riflettere sul senso delle costruzioni "relativizzanti" tipiche della matematica e della fisica, in un quadro esplicativo e fondazionale ispirato dai problemi sollevati.
Il progetto, tuttavia, è più vasto e in questo testo lo si sfiorerà appena, poiché si tratta di radicare le due "storie costitutive" nel nostro essere di viventi al mondo, di afferrare questo "io cognitivo", biologico e storico, che noi condividiamo e che ci garantisce l'oggettività delle nostre forme di conoscenza. Non si tratta di unire obbligatoriamente le epistemologie di diverse discipline, ma di "metterle in comunicazione", di evidenziare le dipendenze reciproche, le poche radici in comune.
L'analisi proposta si baserà, dunque, sui principi seguenti:

- Il problema dei fondamenti della matematica è (anche) un problema epistemologico,
- L'intera epistemologia (della matematica) deve fare riferimento ad una genesi concettuale, in quanto processo di conoscenza,

- L'epistemologia della matematica è parte integrante dell'epistemologia delle scienze (almeno di quelle esatte),
- Un elemento costitutivo del nostro sapere scientifico è il rapporto, che si trova nelle diverse scienze, in relazione allo spazio ed al tempo.

In breve, un accorto studio epistemologico della matematica deve cercare di chiarire una "filosofia della natura", termine caro ai grandi sapienti del XIX° secolo. In effetti, la matematica è uno dei pilastri delle nostre forme di conoscenza, aiuta a costituire gli oggetti e l'oggettività stessa del sapere (quello esatto), poiché costituisce il luogo in cui "il pensiero si stabilizza"; da questo lato, il suo fondamento si "amalgama" agli altri saperi e ai fondamenti di questi. Inoltre, la stabilità concettuale della matematica, la sua relativa semplicità (sa andare molto in profondità pur partendo da principi stabili ed elementari, a volte molto semplici) può fornire la connessione che stiamo cercando con i processi cognitivi elementari, quelli che riflettono talune regolarità del mondo nella nostra presenza attiva in questo, come esseri viventi (e viventi nell'intersoggettività e nella storia). Per queste stesse ragioni, le teorie della conoscenza, da Platone a Cartesio, a Kant, a Husserl o Wittgenstein, hanno tutte affrontato le questioni dei fondamenti della matematica, questo sapere "purificato", misterioso e semplice contemporaneamente, sapere in cui le nozioni di "verità" e di "prova" (ragionamento) sono collocate con estrema chiarezza. Occorre dunque analizzare il problema dei fondamenti cognitivi della matematica anche come componente essenziale dell'analisi della cognizione umana. In tale ambito, e allo scopo di rispondere inoltre ad una delle questioni di Francys Bailly, si cercherà di esaminare in che modo "fondamenti" e "origine" (cognitivi e storici) siano strettamente legati. La nozione stessa di "fondamenti cognitivi" giustappone esplicitamente fondamenti e genesi.

In questo studio, le nozioni di spazio e tempo alle quali si fa riferimento non rinviano a delle "entità naturali", ma piuttosto al gioco tra alcune esperienze sensibili e alcuni ambiti concettuali che permettono alle scienze della natura di manifestarsi. Tale era, infatti, la problematica dei grandi geometri (Riemann, Helmholtz, Poicarè, Enriques, Weyl …) i quali hanno cercato di porre il problema dei fondamenti della matematica nell'ambito di una filosofia della natura. Tuttavia, le analisi che hanno successivamente dominato la scena rientrano in una disuguaglianza molto netta tra fondamenti logici (o formali) e problemi epistemologici, in particolare sotto forma di quel rapporto allo spazio e al tempo che la matematica inserisce profondamente nel mondo.

Frege denuncia esplicitamente la situazione di "delirio" in cui si trova il problema dello spazio a causa della nascita delle geometrie non-euclidee ([Frege, 1884]) e propone una "royal way out", gettando, in tal modo, le basi di una nuova disciplina, la logica matematica: i fondamenti della matematica sono logici, la matematica stessa viene ricavata dagli sviluppi di "leggi assolute del pensiero", regole logiche al di là del mondo e indipendenti da ogni soggetto cognitivo. Per questo Frege introduce una differenza molto netta tra "fondamenti" e "genesi", cancella ogni ambizione epistemologica avvicinandosi allo "psicologismo" (di Herbart/Riemann) e all' "empirismo" (di Stuart-Mill). I primi cercano di comprendere quali "ipotesi" (quelle "a priori") permetteranno di rendere intelligibile lo spazio (ed il tempo) fisico al soggetto "che conosce", il secondo ricollega la matematica ad una teoria, ahimè troppo ingenua, della percezione. Di fronte a tutti questi primi tentativi di un' "analisi cognitiva" della matematica, Frege prepone una filosofia incentrata su un dogma molto stabile, il dogma logicista, secondo il quale la matematica non ha né una genesi psicologico-storica, né empirica. Essa è, a suo parere, un sapere costituito, concetti senza un qualcuno che li formuli. Tale filosofia, tale dogma, è all'origine della rottura fondamentale che accompagnerà tutto il XX° secolo, tra analisi dei fondamenti e problema epistemologico, tra matematica e questo stesso mondo che essa ci aiuta a comprendere[2].

Inoltre, per Frege, la stessa geometria, poiché data da rapporti numerici [Frege,1884], si fonda sull'aritmetica; e quest'ultima non è altro che l'espressione di leggi logiche, essendo il concetto di numero un concetto logico e l'induzione, regola chiave dell'aritmetica, una regola logica. Infine, anche il continuo, questo difficile processo dello spazio e del tempo fenomenali, è perfettamente ricostruito, alla Cantor-Dedekind, a partire dall'aritmetica.

Ecco dunque i problemi dello spazio e del tempo, e della loro matematizzazione, cancellati a favore del loro fondamento indiretto, attraverso l'aritmetica, sulla logica; concetti puri, senza rapporto alcuno con l'esperienza sensibile né con la costruzione fisica. Al contrario, questa relazione era il cuore dellas problematica degli inventori delle geometrie non-euclidee: Gauss, Lobachevskij o Riemann non negavano la logicità del V° assioma di Euclide e dei suoi sviluppi formali, bensì proponevano una "nuova fisica", una diversa organizzazione del mondo (vedere [Lobachevskij, 1856], [Riemann,1854]). Capita anche che i rapporti numerici possano probabilmente "fondare" la geometria euclidea, sicuramente non le altre, poiché essa è la sola che "preservi"

2 Per noi, al contrario, il <<dogma onnipotente della frattura principale tra l'elucidazione epistemologica e la spiegazione storica come pure la spiegazione psicologica nell'ordine delle scienze della mente, della spaccatura tra l'origine epistemologica e l'origine genetica; questo dogma, nella misura in cui non limita in maniera inammissibile, come avviene solitamente, i concetti di "storia", di "spiegazione storica" e di "genesi", tale dogma è sconvolto da cima a fondo>>. [Husserl, 1933: p.201]

questi rapporti (è la sola il cui gruppo di trasformazioni- automorfismi- che la definisce contiene le "omotetie")[3].
Ora, non c'è dubbio che la matematica abbia sia un fondamento logico che uno formale (occorrerà distinguerli), tuttavia essa è, in realtà, una costruzione "a tre dimensioni". Si costituisce nell'interazione tra i "se… allora…" logici, assolutamente essenziali (1° dimensione), tra i calcoli perfettamente formali, addirittura meccanici, (2° dimensione), ma anche in una terza dimensione concettuale, queste costruzioni (nello e) dello spazio e del tempo, che la frammischiano, ancora più che le altre due alle differenti forme di conoscenza. Ed il problema epistemologico si pone allora come analisi della costituzione delle invarianti del linguaggio e della dimostrazione, quelle invarianti che chiamiamo "logica" e "sistemi formali", come le invarianti dello spazio e del tempo, sulle quali costruiamo le nostre geometrie, "costruzioni umane… nel nostro spazio d'umanità", se detto alla Husserl. Il problema nasce dunque dall'analisi del processo costitutivo di questa forma di conoscenza assai particolare che è la matematica, a partire dalla sua radice cognitiva, sia essa pre-umana, fino alla sua "esposizione" comunicabile, con i suoi mille livelli intermediari.
Le convenzioni assiomatiche e la prova logico-formale non sono, in realtà, che i punti di arrivo, risultati ultimi di una costituzione di senso, notazioni comuni di concetti profondamente radicati nelle "nostre pratiche di vita", per dirlo alla Wittgenstein, nei "nostri atti di esperienza" (Weyl): l'analisi logico-formale accompagna necessariamente quest'ultima parte del percorso epistemologico, l'analisi della prova, di determinate prove, ma risulta insufficiente (è essenzialmente "incompleta", ci dicono alcuni teoremi). E' dunque necessario estendere le analisi fondazionali della matematica dallo studio della deduzione e delle assiomatiche a quello della costituzione dei concetti e delle strutture; ciò risulta impossibile senza un'analisi parallela della costituzione dell'oggetto della fisica e della percezione.

2. A proposito del "trascendente" in fisica ed in matematica.

Non c'è dubbio che vi sia una realtà al di là di noi, che fa da "frizione" alle nostre azioni verso di essa e per di più le "canalizza". Husserl utilizza un termine di tradizione idealista per definire suddetta realtà, così come per definire i concetti (le idealità) matematici: egli riprende la nozione di trascendenza. Da un'interpretazione molto comune del termine e assolutamente indipendente da Husserl, deriva normalmente la seguente deduzione, prima in fisica, poi in matematica: le "proprietà" del mondo (fisico, dei numeri, della matematica) sono trascendenti e, in aggiunta, non tutte conosciute. Dunque esse sono "gia lì", esse preesistono. Gli oggetti del mondo attorno a noi possiedono delle proprietà ben stabilite, molto stabili ed invarianti rispetto ai nostri sensi: io guardo questa matita, la tocco, il suo stesso odore mi conferma la sua "oggettività", indipendentemente dal senso specifico di cui faccio uso per esplorarla…, *dunque* essa è già lì, è preesistente alle mie esplorazioni con tutte le sue proprietà. In modo del tutto analogo, le proprietà dei numeri, delle strutture matematiche non dipendono dalla notazione (per i numeri: decimale, binario…) o da altri dettagli della rappresentazione, dal soggetto matematico che le esplora, … *dunque* esse preesistono.
Ora, è sul termine "proprietà" - in fisica, in matematica - che bisogna comprendersi anzitutto: una proprietà è "detta", è inizialmente un'espressione di quei linguaggi attraverso i quali cerchiamo di parlare del mondo, di organizzarlo e di dargli un senso, un senso condiviso con gli altri. Tuttavia il mondo canalizza i nostri tentativi di conoscere ed oppone una "resistenza" (fa frizione) alle nostre proposizioni per organizzarlo. Le "proprietà", così come noi le esplichiamo tramite dei termini nell'intersoggettività, non sono per loro natura isomorfe a "fatti" già ben assegnati o che si manifesterebbero sotto forma di strutture linguistiche accuratamente stabilite: attraverso la nostra osservazione attiva, nello scambio con l'altro, proponiamo una struttura agli indizi proveniente da una realtà che è lì. Tramite il linguaggio, la rappresentazione, il gesto, unifichiamo dei fenomeni, disegnamo dei contorni su un velo fenomenale, elemento di collegamento tra noi ed il mondo. Il trascendente è un costituito, è il

3 Hilbert se la caverà ben diversamente, da grande matematico. Grazie all'interpretazione di Feltrami-Klein delle geometrie non euclidee nella geometria di Euclide, egli darà un'immersione (interpretazione) corretta dei suoi assiomi per la geometria interna all'aritmetica attraverso un percorso analitico [Hilbert, 1899]. Tuttavia, per quest'ultimo, non cercherà un "senso logico", contrariamente a Frege. In effetti, una volta interpretata(e) la(le) geometria(e) nell'aritmetica, basterebbe per la su analisi fondazionale, interamente ed esclusivamente basata sul problema della coerenza, una prova finitaria di coerenza (di non contraddizione); peccato che essa non funzioni, poiché l'aritmetica non he una prova finitaria, aritmetica, di coerenza. Al contrario, se ne esce con un ammasso infinito di infiniti o con prove fondate su giudizi geometrici.[Longo, 2002].

risultato di un'attività costitutiva, di un percorso che precede l'individuo o che l'individuo compie, in gran parte, con gli altri. Percorso che possiamo meglio sintetizzare, come risultato di un attività trascendentale (e non trascendente), seconde la lezione che ricaviamo da Husserl.

Non è un caso se i numerosi "esempi di oggetti" proposti dai filosofi "ontologizzanti", in matematica, in fisica, fanno riferimento a degli "oggetti manufatti di media grandezza ", cercando in tal modo di aggirare il problema del relativismo cognitivo. Suddetti pensatori dell'ontologia, dell'essenze, si richiamano molto raramente agli "oggetti" della Fisica Quantistica, ad esempio, al fine di proporre un'ontologia molto più difficile da accettare, ontologia dell'elettrone, del fotone …. Ma anche questi oggetti manufatti di media grandezza, apparentemente così semplici per l'ontologia, se è vero che essi sono proprio lì, possiedono la stessa costituzione del concetto che è loro collegato. La matita nasce, nella storia, contemporaneamente al "concetto" di matita, i due sono associati al disegno, alla scrittura, come attività umane. L'oggetto e il concetto sono preesistenti per il soggetto individuale, non per l'umanità nella sua storia. Non c'era matita, né tavola, né pentola come quella posta sul tavolo di Kurt Gödel, precedentemente al nostro primo pensiero e agire da umani. In compenso, vi era sicuramente già una "realtà" fisica, ma la sua spiegazione come fotone, elettrone… ben solida e stabile, in effetti matematica, non era ancora lì, non più della sua organizzazione in pentole, matite o tavoli. E questo approccio, pensiamo, non corre i pericoli del relativismo, poiché l'oggettività di ciò che è costruito, del concetto, dell'oggetto, è nel percorso costitutivo, oggettivo.

Cassirer, citato da Parrini in un'opera il cui scopo è oltrepassare il divario tra assolutismo e relativismo, riprende parzialmente questo tema [Parrini, 1995; p. 118]: << *se l'oggetto viene determinato non come sostanza assoluta al di là di ogni conoscenza, ma come oggetto che nasce dalla progressione della conoscenza stessa* >> allora << *tale oggetto, dal punto di vista dell'individuo psicologico, può essere definito trascendente* >> sebbene << *dal punto di vista della logica e dei suoi principi supremi* >> esso debba << *essere considerato ' immanente'* >>.

L'idealità, il concetto in quanto "concepito", "ritaglio" operato sul mondo, per dargli dei contorni, per strutturarlo, si allontanerà dunque dalla rappresentazione soggettiva, nonostante essa trovi le sue origini nella comunanza dei soggetti e in ciò che essi condividono: di primo acchitto,corpi e cervelli simili, nello stesso mondo, e tutto ciò che essi costruiscono in comune, nella storia comune. Non si tratta, perciò, di fare una storia degli individui, ma di rintracciare la determinazione di un'idea: non di fare del relativismo storicizzante, ma un riferimento alla storia in quanto esplicazione del nostro "essere insieme al mondo", luogo di costituzione delle nostre forme di conoscenza.

Nel caso degli oggetti della fisica, della microfisica in particolare, questa attività di costruzione degli oggetti attraverso "ritaglio concettuale" è molto chiara: gli elettroni, i muoni, i fermioni, il campo quantistico… non sono già lì. Essi sono dei concetti proposti per unificare, organizzare, comprendere dei segnali molto evidenti che il mondo ci rimanda. Tali segnali non sono arbitrari e, inoltre, sono il risultato di una esplorazione attiva. Per ottenerli è stato necessario riordinare alcuni strumenti di misurazione fortemente complessi, anch'essi esito di una teoria. Tutti gli strumenti di misurazione fisica, e ancora di più quelli della microfisica, vengono costruiti a seguito di un enorme impegno teorico: io voglio misurare questo e non quello, utilizzando questo materiale e nessun altro, io "guardo" qui e non lì. I "fatti" che ne risultano sono, come dice Goodman, essi stessi delle "teorie di piccola taglia".

Consideriamo, ad esempio la dualità onda-particella in Fisica Quantistica. Il fotone, l'elettrone, si presentano come "onda" o "particella" a seconda del "contesto di esperienza ": determinati strumenti di osservazione vengono ordinati, si prepara, in effetti l'esperienza da una teoria… L'oggetto che ne scaturirà, dipenderà sia dall'ambito teorico-sperimentale, che dalla frizione - "canalizzazione del pensiero" imposta dalla natura a e attraverso questi strumenti. Un determinato sguardo ci mostrerà la particella, un altro l'onda. Più precisamente, si otterranno proprietà macroscopiche su uno schermo, su un rivelatore qualsiasi e , grazie ad un lavoro indispensabile, esse verranno interpretate come "sintomi" de "l'esistenza" di una particella o di un'onda. Non esiste *dualità in sé* dell'oggetto fisico, ma un contesto di ricostruzione del mondo in cui siamo presenti quanto lo è l'oggetto dell'osservazione.

Le proprietà allora, sono il risultato "esplicitato" di un' organizzazione di indizi, di un insieme di fatti, anch'essi "piccole teorie". Ma la realtà è lì, senza dubbio, poiché essa canalizza i nostri tentativi di conoscenza in direzioni non arbitrarie, fa frizione, opponendosi alle nostre proposizioni teoriche, grandi e piccole, che nei nostri linguaggi chiamiamo “proprietà”. La trascendenza di queste come se esse fossero già costituite, in quanto “ontologie”, è un “flatus vocis” che non rimanda assolutamente ad uno sguardo attento verso il pensiero di Husserl, poiché è il percorso costitutivo del trascendentale che è in seno alla filosofia. Dobbiamo, facendo riferimento alle diverse forme di conoscenza scientifiche, arricchire e specificare questa parola così incerta, la nozione di “proprietà” del mondo fisico e di proprietà matematica.

2.1 Trascendenza contro costituzione trascendentale: Gödel contro Husserl.

Passiamo dunque alla matematica[4]. Nel suo capolavoro sui fondamenti della matematica, “L’origine della Geometria”, Husserl sottolinea frequentemente il ruolo della costituzione trascendentale degli “oggetti”della matematica. Il problema epistemologico che essi sollevano è, a suo avviso, un “problema di genesi”, un “problema di storia” (vedere la nota più in alto). La geometria, come tentativo (e l’uomo ne fa molteplici) di rendere lo spazio intelligibile è il risultato di un’attività della “nostra comunanza comunicante”; è il “costituito”, il risultato di un percorso non arbitrario, che inserisce profondamente le nostre ipotesi costitutive in determinate regolarità del mondo, regolarità, “donazioni” che s’impongono a noi; tali regolarità, sono “già lì” (la connettività dello spazio, l’isotropia, le simmetrie – per ispirarsi a Riemann e Weyl). Tuttavia siamo noi che scegliamo di vederle.
Ho un amico che proviene da Giove, a cinque gambe, tre occhi e mezzo e nessuna, proprio nessuna parte simmetrica nel suo corpo. Egli non vede e non dà importanza alle simmetrie della luce che si riflette su una superficie, o a quella dei cristalli, ad esempio, quelle simmetrie che stanno sotto i nostri occhi, sotto i suoi occhi; e le sue strutture matematiche non sono imbevute di simmetrie come le nostre (dalla geometria greca fino alle dualità e alle aggiunte così ben descritte nella Teoria delle Categorie). Esse sono piuttosto costruite attorno a degli “zurabs”, una regolarità essenziale per lui, ma che noi non vediamo o trascuriamo. Lo stesso vale anche per i colori : egli vede una fascia al di là del violetto, dove si trovano, in effetti, colori splendidi. Non può dunque apprezzare quella formidabile costruzione umana, ricca di storia, che noi chiamiamo “pittura”: Tiziano è nulla per lui. Esattamente come noi non vediamo i suoi capolavori dai così bei colori ultravioletti.
Le due costruzioni non sono arbitrarie, le lunghezze d’onda (o quel reale che noi categorizziamo così) esistono, sono lì, proprio come le simmetrie dei cristalli o della luce, ma la nostra presenza attiva interagisce con gli tali elementi del reale, per sceglierne, sottolinearne, correlarne alcuni, e non altri, al fine di assegnare dei nomi, non arbitrari poiché ricchi di storia e di significato, a determinate bende di colori e non ad altre. Inoltre, la nostra azione interpola le linee mancanti, propone dei nessi per analogia, delle analogie derivate da altre esperienze; essa integra una varietà di atti di esperienza per produrre una nuova struttura, una rete inesistente tra “le cose” del mondo.
Delineare, tra le regolarità del mondo e tra gli altri fondatori di ogni forma di conoscenza, quelli che sono all’origine della matematica, è uno dei doveri dell’analisi dei fondamenti cognitivi della matematica. L’analisi fenomenale alla Husserl può essere uno strumento per farlo, se non ci si ferma ad una nozione incerta di “trascendenza”, bensì si recupera la ricchezza de “la costituzione trascendentale”. Sfortunatamente, la gran maggior parte dei matematici anti-formalisti, e persino i più grandi della Logica Matematica, come Frege e Gödel, insistono sul “trascendente” (“le proprietà e gli oggetti della matematica sono già lì, allo stesso modo delle proprietà e degli oggetti della fisica”). Effettivamente, Gödel, pur conoscendo Husserl, non fa riferimento alla “genesi”, alla “storia” (come intende[Husserl, 1993]) di questa costituzione che sta in seno alle nostre costruzioni

La discussione seguente prende in riferimento uno dei più ricchi pensatori dalle tendenze "ontologizzanti" (e uno dei più grandi matematici del XX° secolo) Kurt Gödel. Infatti, sebbene a partire da un punto di vista che non è il nostro (una similarità delle "ontologie" o di "esistenza indipendente"), anche Gödel propone uno stretto parallelo tra oggetti fisici e concetti matematici: << Mi sembra che la supposizione di oggetti [matematici] sia abbastanza legittima come la supposizione di corpi fisici ed che esista un motivo abbastanza buono per credere nella loro esistenza>> [Gödel, 1944]… <<le proprietà di questi concetti sono qualcosa di abbastanza oggettivo e indipendente dalle nostre scelte così come le proprietà fisiche della materia… dal momento in cui [le] abbiamo create piccole come proprietà costituenti della materia>> [Gödel, 1947]. Dunque, corpi fisici e proprietà elementari della materia, tutti oggetti precostituiti, ultimi mattoni, indipendenti dal soggetto cognitivo.

concettuali[5]. Ne rimane dunque, in matematica e in fisica, un realismo ingenuo, che non specifica né la nozione di proprietà né la nozione di oggetto: non sono che oggetti e proprietà derivate "dalle sensazioni"; proprietà di una fisica degli "oggetti di media grandezza" (questa tavola, una matita…), una fisica che non esiste più, dopo decenni di lavoro e dibattito in relatività, in fisica dei sistemi critici a in fisica quantistica. Il fallimento di questa epistemologia "realista" della matematica è parallela all'assenza di un epistemologia della fisica[6].

Riassumendo, gli oggetti matematici sono "al di là di noi" (trascendenti) esclusivamente perché appartenenti ad un "costituito" che precede il nostro soggetto: essi sono un co-costituito, contemporanei alla stessa intelligibilità del mondo, attraverso la nostra "comunanza vivente e comunicante". Non sono arbitrari poiché radicati nelle regolarità del reale, regolarità alle quali i nostri esseri viventi nel mondo vengono paragonati.Sono invarianti, dello spazio e del tempo anzitutto, che noi sviluppiamo successivamente costruendo un intero universo derivato da strutture concettuali, con gli strumenti più stabili della nostra comprensione, quelle invarianti del linguaggio e dell''intersoggettività che chiamiamo "logica" e "formalismo".

In questo senso, e non altrimenti, gli oggetti possono avere delle proprietà "che noi non conosciamo", proprio come gli "oggetti" del mondo fisico. Prendete i numeri interi, ad esempio. Una volta presentati, dallo 0 e dall'operazione del successore, come costruzione mentale di una serie infinita, discreta e ben ordinata la vedete bene, allineata da sinistra a destra in un piano mentale, no?) è sicuramente possibile darsi un linguaggio (quello di Peano-Dedekind, ad esempio) ed enunciare innumerevoli proprietà degli elementi di questa serie infinita che "noi non conosciamo". Occorrerà allora esercitare una "frizione" tra queste proprietà, in questo linguaggio, e la costruzione assegnata; verificare attraverso i metodi o gli strumenti più vari (l'induzione aritmetica, ma anche le funzioni olomorfe o della variabile complessa, ad esempio) se esse siano realizzate su questa struttura ben ordinata, infinita. Così si può comprendere l'incompletezza essenziale della teoria formale dei numeri, vedere [Longo, 2002; Bailly, Longo, 2004]. Per nostro suggerimento, dovrebbe solamente essere chiaro che ciò non implica assolutamente che suddetta serie infinita "preesista" come concetto senza un qualcuno che lo formuli: se 5 pietre erano sicuramente già lì, ai piedi di questa montagna, da un miliardo di anni, ciò che non era lì è il concetto del numero 5, che è tutt'altra cosa, come le infinite proprietà di questo numero, ordinato nella serie infinita con gli altri, come, ad esempio, la solvibilità delle equazioni di quinto grado o i risultati di altre numerose costruzioni linguistiche/algebriche che sappiamo fare; costruzioni lontane dall'essere arbitrarie, poiché radicate in un miscuglio creativo di metodi concettuali significanti (logico-formali, risultati di invarianti/regolarità spaziali, etc).

Considerate inoltre una variante del gioco di scacchi che sto immaginando: un quadrato 100x100, con 400 pezzi dai movimenti finiti molto vari, ma non arbitrari, molto simmetrici, ad esempio, alle simulazioni di gesti e movimenti naturali… Sistemo i pezzi a caso: occorre dimostrare se la configurazione così ottenuta sia compatibile con (attendibile per mezzo) le regole fissate. Si può dire che questa configurazione era già lì, da un miliardo di anni? Che senso ha questa frase? Peggio, voglio proporvi un gioco con un infinità di casi, ordinati nelle tre dimensioni in modo molto originale, ma effettivo (spirali, frattali…), li chiamo "numeri spiralous" o "zamburus",

5 Vedere le discussioni riportate in [Wang, 1987], [Follesdal, 1999] compie un notevole sforzo per leggere Husserl presso Gödel. Tuttavia, per Gödel, l'esistenza degli oggetti matematici è esterna a noi quanto quella degli oggettifisici, poiché essi preesistono:<< essi sono indipendenti dalle noste definizione e dalle nostre costruzioni >>; l'intuizione degli oggetti matematici (gli insiemi, in realtà! 9 è una forma di <<percezione fisica >> [Gödel, 1944, supplemento in 1964], nel senso più infantile del termine percezione, un "input" sensoriale che ci giunge tale e quale (si è parlato in più occasioni della profondità della traccia di una teoria della percezione presso Poincarè, ad esempio, in cui è presente un vero tentativo di epistemologia della matematica, radicato in una "filosofia della natura"). Non esiste che trascendendo presso Gödel, anche nelle citazioni scelte da Follesdal, senza tutto il resto dell'analisi fenomenale che caratterizza Husserl; trascendenza senza costituzione trascendentale: si tratta,infatti, di un processo costitutivo di conoscenza, senza questo "io" co-costituito con il mondo, che è in seno alla filosofia husserliana, in particolare nella su maturità.

6 Discutiamo qui soprattutto la posizione "realista" di Gödel, non solo in omaggio al matematico (il cui lavoro sui tipi, 1958, come quello della ricorsività e dell' incompletezza, 1931, ha contrassegnato la logica matematica del XX secolo e… il lavoro dell'autore di queste righe), ma anche perché la sua filosofia e di gran lunga la più profonda tra quelle del realismo/platonismo matematico, Alain Badiov [Badiov, 1990] sottolinea in effetti la ricchezza di questo

platonismo, il solo, in matematica, che si avvicina a quello di ….Platone: pensiero che sviluppa l'oggetto, idea che è "già lì", ma in quanto nome di ciò che viene pensato e che sarebbe impensabile se non si trattasse di un'attività del pensiero…. Per di più, per Gödel, come ricordavamo "l'esistenza oggettiva degli oggetti dell'intuizione matematica… è una risposta esatta alla questione dell'esistenza oggettiva del mondo esterno>>.[Gödel, 1947]. Questo processo, pur riprendendo la *questione* di un'ontologia matematica da quella della fisica, è molto più promettente del realismo attuale in matematica, bel miscuglio di empirismo volgare e d'idealismo, con i peggiori errori delle due filosofie. Tuttavia, la differenza, rispetto all'approccio abbozzato, è data dalla comprensione dell'oggetto come costituito: non è *l'esistenza* degli oggetti fisici e dei concetti matematici ad essere in gioco, *bensì la loro costituzione.* Occorre dunque riprendere la filosofia di Gödel, in quanto essa mette giustamente in relazione matematica e fisica, e la sconvolge da ciam a fondo, e la rimette apposto: non occorre partire " dalla cima", dagli oggetti, in quanto già costituiti (esistenti) bensì dal processo costitutivo di questi oggetti e concetti. Questo richiede un'analisi, che non sia ingenua, dell'oggetto e dell'oggettività fisica, così come una teoria non passiva della percezione.

e vi do delle relazioni infinite su questi oggetti concettuali (descrivo, con dei termini, sotto-insiemi infiniti, relazioni su queste strutture o dispongo i pezzi a caso). Che senso ha dire che tali proprietà/relazioni erano già lì? Forse la compatibilità delle distribuzioni dei pezzi così ottenute era già decisa o da sempre valida? Sicuramente, occorrerà fare una prova per "verificarlo" (io preferisco: controllare se queste distribuzioni siano *realizzate* sulla struttura, o stabilire una frizione, attraverso la prova, tra proprietà date nel linguaggio o la geometria dei casi e i principi di costruzione del gioco). Ma fin quando la struttura infinita, la mia costruzione, realizzata nella storia, un'estensione non arbitraria di una pratica dei casi e dell'ordine, non viene posta con il rigore dei suoi principi di costruzione come luogo in cui realizzare l'altra costruzione assegnata nel linguaggio, che senso ha dire che la struttura concettuale e che queste proprietà dei suoi sotto-insiemi infiniti 'preesistevano'?

Al contrario dei giochi che vi ho appena proposto, e che sono una mia costruzione personale, il radicamento nel mondo, in una assai antica intersoggettività, del concetto di numero, di 0, di successore, di buon ordine infinito… non deve far dimenticare che questi "oggetti" sono dei concetti, risultati di una costruzione concettuale, molto strutturata, determinata dalle sue ipotesi costitutive; essi non sono un' " ontologia preesistente". Il fatto che noi ignoriamo la totalità (?) delle loro proprietà (attenzione a questo termine!) non dimostra affatto questa ontologia che si presta loro così facilmente: li si ignora, proprio come si ignora la totalità delle disposizioni causali dei nostri scacchi fantasiosi sulla scacchiera sopra citata.

Non vi è alcuna trascendenza in matematica, o, piuttosto, non vi è una trascendenza che non sia il risultato di percorsi costitutivi, non arbitrari (ad esempio, la costruzione di enunciati algebrico-formali o del buon ordine degli interi), costruzioni da comparare (realizzare) le une alle altre, tramite questa "frizione" tra e sulle strutture concettuali che è chiamata prova matematica. Più in particolare, tra principi di prova (che si assegnano, per scelta non arbitraria) e principi di costruzione (che partecipano alla nostra determinazione cognitiva nel rapporto con il mondo). E l'intera oggettività si trova nella costruzione. Continuate, per esempio e partite dalla costruzione degli interi per passare ai razionali, in quanto quozienti di interi, modulo un' equivalenza di proporzione; considerate in seguito le serie convergenti (di Cauchy) di questi nuovi numeri, modulo l'equiconvergenza. Ecco i reali, costituiti da un metodo matematico che ricostruisce e ricollega, a suo modo, storie diverse, distillando i concetti chiave. I numeri reali non esistono, in nessun senso riconducibile ad un'ontologia plausibile, ma la loro costituzione è oggettiva quanto numerose altre organizzazioni del mondo che ce lo rendono intelligibile. Ed essi ci propongono una struttura concettuale molto efficace per il continuo fenomenale dello spazio e del tempo.

3. Leggi, strutture e fondamenti

Nella sua problematica, F. Bailly pone altri problemi importanti tra i quali riporto ora quella riguardanti i termini di "struttura" e di "fondamento". Ciò che io nego è che si possa identificare la nozione di struttura matematica con la sua presentazione assiomatica e, in seguito, che l'analisi della prova, in tali ambiti assiomatici, sia un'analisi fondazionale sufficiente. Per discutere su quest ultimo punto, si parlerà anche di "leggi".

I fisici, a volte, confondono "formalizzazione" e "matematizzazione", è un'abitudine del loro linguaggio. La strutturazione matematica che essi propongono del mondo, di un'esperienza fisica, viene spesso chiamata "formalizzazione". Ciò è facilmente comprensibile, poiché rispetto al "molto concreto" al quale essi pensano (la "realtà" fisica), la struttura matematica è sicuramente astratta e simbolica. Tuttavia, se si ha un po' di esperienza nel dibattito sui fondamenti della matematica, in cui questi termini sono utilizzati con rigore (e accanimento filosofico, direi) si capisce bene che "rigoroso", "astratto" e "simbolico" non significano formale (vedere [Bailly, Longo, 2004] per un'analisi più sottile di "rigoroso", "astratto" e "simbolico", come distinti da "formale"). In effetti, un sistema formale deve "reggersi" senza far riferimento al senso: esso è costruito e manipolato esclusivamente grazie a regole meccaniche. Tali regole vengono anche e sicuramente utilizzate in un calcolo fisico-matematico, ma la formula a cui pensa il fisico non ha niente a che vedere con quella del "formalismo" logico: a primo impatto, essa è significante, dal momento che il fisico l' ha costruita basandosi su un permanente riferimento al senso, alla sua esperienza fisica, la inserisce in un ricco contesto matematico in connessioni esplicative. Il fisico propone delle strutture matematiche per rendere intelligibile la sua esperienza, non inventa un gioco di regole formali programmaticamente distaccate dal mondo, come fa il formalista. Egli propone dunque delle strutture matematiche e non dei sistemi formali. Tra i due vi sono almeno i grandi teoremi d'incompletezza, i quali creano una disparità tra principi di costruzioni strutturali e deduzioni formali; cerchiamo per il momento di sviluppare questa distinzione all'interno della matematica stessa.

Cominciamo con degli esempi. Considerate, come "principi di costruzione" le traslazioni e le rotazioni di figure costruite con riga e compasso: se si fissa l'unità di lunghezza, si può facilmente costruire un segmento di lunghezza radice di due. Ed ecco, la primissima sfida per la comprensione matematica: la teoria delle equazioni lineari dai coefficienti interi, con le sue regole formali di calcolo, è dimostrabilmente incompleta rispetto a questa costruzione (il segmento non è un rapporto tra interi). Con gli stessi principi di costruzione, compresa l'assenza di salti e di lacune all'interno del continuo euclideo, costruite il limite dei poligoni iscritti e circoscritti di una circonferenza. Stavolta è la teoria formale delle equazioni algebriche a coefficienti razionali ad essere incompleta di fronte a questa costruzione di π. Se si passa al XX° secolo si dimostra che la teoria formale dei numeri, con i suoi principi di prova è incompleta rispetto al buon ordine degli interi in quanto principio di costruzione. Per analogia al ruolo delle simmetrie in fisica, si potrebbe dire, al riguardo, che la congettura di Hilbert della incompletezza dell'Aritmetica formale era un'ipotesi di simmetria-specchio tra linguaggio formale e semantica ontologizzante (il primo riflette fedelmente il secondo). Il teorema d'incompletezza di Gödel rompe questa pretesa simmetria e avvia la logica moderna. In termini più costruttivi e recenti, la rottura di simmetria tra principi di prova e principi di costruzione, di natura essenzialmente geometrica, ci fa comprendere l'insufficienza del linguaggio logico-formale come unico fondamento della matematica e rimette al centro delle nostre forme di conoscenza una matematica costitutiva dello spazio e del tempo, grazie ai suoi principi di costruzione. Ecco l'incompletezza concreta, versione moderna dell'incompletezza gödeliana, spostamento o rottura di simmetria provabile tra principi di costruzione e principi di prova (vedere [Longo, 2002] per un'analisi dettagliata delle prove di determinati teoremi di incompletezza).

Le strutture matematiche, in realtà, sono il risultato di una ri-costruzione che organizza il reale, partendo da concetti, come il concetto di infinito pre-matematico (teologico, ad esempio) o, anche da pratiche pre-concettuali (le invarianti di memoria, l'esperienza dell'ordine, della comparazione, le strutturazioni dei Gestalt visuali e percettive in generale…, [vedere Longo, 1999c; 2002a]) le quali conducono ad una strutturazione , esplicitata nel linguaggio, di questi (pre)-concetti e delle loro relazioni: il buon ordine degli interi, l'infinito cantoriano, il continuo dei numeri reali, … la nozione di varietà di Riemann. In tutto ciò si confonde il concetto di infinito, poiché risultato di una profonda e remota pratica concettuale, solida quanto numerose altre costruzioni matematiche; tali pratiche non sono affatto arbitrarie ed ognuna va compresa e giustificata attraverso il percorso di costruzione di oggettività scientifica al quale è legata.

A seguito della costruzione di queste strutture astratte, a volte simboliche, ma ricche di senso dal momento che fanno riferimento agli atti d'esperienza pratici e concettuali impliciti, si può proseguire e stabilire degli ambiti assiomatici che cerchino di cogliere un livello formale, la cui manipolazione può prescindere dal senso. Tentativo, quest ultimo, importante, in quanto aggiunge un livello di generalità possibile e soprattutto mette in evidenza alcuni "principi di prova" che permettono di lavorare, su queste strutture, tramite deduzioni puramente logico-formali, in linguaggi ben specificati. Tuttavia suddetti principi sono essenzialmente incompleti, ecco cosa ci dicono i grandi risultati di incompletezza degli ultimi 50 anni. Inoltre, come detto nell'introduzione, l'analisi delle prove, in particolare se questa analisi è esclusivamente formale, non è che l'ultima parte di un'epistemologia della matematica: occorre anche rendere conto della costituzione dei concetti e delle strutture che si "manipolano" in queste dimostrazioni.

Ma vi è di più in queste identificazioni abituali ed erronee degli "assiomi" e delle "strutture", di "fondamenti" e di "leggi logico-formali". Per comprenderlo ritorniamo alla fisica. Husserl, in una straordinaria corrispondenza con Weyl (vedere [Tonietti, 1988]), coglie un cardine della fisica relativista, sottolineato, soprattutto, dal lavoro di Weyl (anche dalle riflessioni di Becker, filosofo della fisica allieva di Husserl, vedere [Mancosu&Ryckman, 2002). Il passaggio dalla fisica classica verso il nuovo ambito relativista si basa, in primo luogo, sul seguente cambiamento di prospettiva: si passa dalle "leggi causali" (causal lawfulness) all'organizzazione strutturale della spazio e del tempo (structural lawfulness), addirittura dalle leggi causali alla "legalità/normatività" delle strutture matematiche (geometriche).

In effetti, Riemann è all'origine di questo cambiamento rivoluzionario (pur sviluppando alcune idee di Gauss). Nella sua dissertazione abilitativa, [Riemann, 1854], questo pilastro della matematica moderna e delle sue applicazioni in fisica, egli mira ad unificare i diversi campi fisici (gravitazione ed elettromagnetismo) attraverso la struttura geometrica dello spazio. Egli lancia l'ipotesi che la struttura locale dello spazio (la sua metratura, la sua curvatura) possa essere << collegata alla forza coesiva dei corpi >>. Una "divinazione", dirà Weyl nel 1921, poiché è proprio Riemann che comincia, almeno, il punto di vista adatto a questa geometrizzazione della fisica, il quale troverà presso Einstein il suo senso fisico e preso Weyl la sua analisi matematica moderna.

Mi sembra dunque che il tentativo di matematizare l'analisi fondazionale della matematica riferendosi esclusivamente alle "leggi del pensiero" sia comparabile ad una ricostituzione dell'unico ambito classico in fisica, con le sue leggi newtoniane. Non sono delle leggi a priori che regolano la matematica, bensì essa si costituisce come struttura, gioco di concetti, non arbitraria. Le “forze coesive” in matematica, corrisponderebbero ad una “dinamica interattiva del senso”, una strutturazione dei concetti e della deduzione stessa.

Teoricamente, delle categorie si propone, ad esempio, una nuova struttura, degli oggetti e dei morfismi, la si collega alle altre strutture tramite dei funtori e la si analizza in termini di trasformazioni (naturali, è il loro nome tecnico), seguendo/ricostruendo la dinamica inaugurata dalla matematica, la cui unità si manifesta in queste traduzioni reciproche di teoria (i funtori d’interpretazione) e nel loro radicamento in motivazioni avvedute. Per di più, alcune di queste categorie hanno forti proprietà di chiusura, un po’ come i numeri razionali sono chiusi per la moltiplicazione e la divisione, i reali per determinati limiti…. Una delle proprietà logicamente interessanti, tra molte altre, è la “piccola completezza”, ovvero la chiusura rispetto a dei prodotti che interpretano la quantificazione universale, in particolare quella di secondo ordine (si quantifica su collezioni di collezioni). Da questo lato, alcune categorie danno un senso matematico alle sfide dell’impredicatività. [Asperti, longo, 1991], grande incubo delle visioni “stratificate” del mondo e della logica (e certezze formali costruite su mattoni elementari e semplici, un piano indipendente dall’altro…). Il mondo, invece, sembra reggersi su circolarità essenziali, a partire dal sistema dinamico inferiore (tre corpi che interagiscono in un campo gravitazionale) o dall’interazione locale/globale (la non-località) in fisica quantistica, fino all’unità “ impredicativa” dell’intero organismo vivente, le cui parti non hanno senso né luogo al di là dell’organismo nella sua totalità (vedere Longo, 2002], [Bailly, Longo, 2003a]). Forse l’emergere di ciò che è nuovo, in fisica, in biologia, ha luogo unicamente nella presenza di forti circolarità, specie di interazioni interne ai sistemi complessi.

Dunque la matematica non è una deduzione logica-formale, ben stratificata a partire da questi assiomi della teoria degli insiemi tanto assoluti quanto l’universo di Newton, ma una strutturazione del mondo, astratta e simbolica, senza dubbio, ma non formale, poiché significante; il suo significato è costruito in una risonanza permanente con quello stesso mondo che ci aiuta a comprendere. Essa ci propone allora delle collezioni di “oggetti”, in quanto invarianti concettuali, ciò che conta delle quali è l’individuazione delle trasformazioni che le preservano, esattamente come gli (iso)-morfismi e i funtori preservano le strutture categoriali (le proprietà degli oggetti di una categoria).

Non un assoluto dato da leggi logiche, al di là del mondo e da ogni soggetto cognitivo, definitive (ma allora perché non quelle della scolastica o la legge chiave di Euclide: “una parte ha sempre meno elementi di un tutto”, false per i nostri insiemi infiniti?), bensì una dinamica di strutture (di categorie), emergenti da una pratica della matematica, collegate in seguito da funtori d’interpretazione che le unificano, che implicano le une attraverso le altre, danno loro un “ equilibrio riflessivo” di teorie (e di categorie, soprattutto quelle che corrispondono a dei sistemi deduttivi [Lamberk, Scott,1986], [Asperti, Longo, 1991]).

Vi è sicuramente una “temporalità” nella costruzione del senso che noi conferiamo al mondo tramite la matematica, proprio come dice F. Bailly nella sua problematica, e si tratta di una temporalità “ricca”, perché non è quella della deduzione sequenziale, delle Macchine di Turing: della stessa natura, tra le diverse forme del tempo evocate da Bailly, della dinamica dei sistemi di tipo critico (vedere [Bailly, Longo, 2003]). Occorre evadere da questo mito delle “leggi del pensiero” preesistenti e immergere la matematica nel mondo apprezzando le sue dinamiche costitutive la cui analisi è una parte integrante del progetto fondazionale. Le leggi o “regole” della deduzione matematica, che sono sicuramente in seno alla prova, sono anch’esse il costituito di una prassi, il linguaggio, poiché invarianti del ragionamento e della pratica della stessa prova.

Fondamento, dunque, in quanto processo costitutivo di un sapere, costruito in risonanza con il mondo, il mondo fisico e quello delle nostre sensazioni. Ma … dove ha inizio questo percorso? Sicuramente non è il caso di risalire << alla mera sostanza di percezione, come asseriscono molti positivisti >> perché gli oggetti fisici sono degli << oggetti intenzionali di atti di conoscenza >> [Weyl, 1918b]. Un’osservazione molto husserliana, una costituzione degli oggetti che abbiamo chiamato “ritaglio concettuale”. E questo ritaglio viene realizzato (e prodotto) dal concetto matematico, gesto mentale cosciente verso il mondo. In seguito, il ragionamento radicato talvolta in tutt’altra pratica, nel linguaggio dell’interazione sociale, quello delle regole della coerenza logica o dell’estetica delle simmetrie, ad esempio, genera nuovi concetti matematici che, a loro volta, possono, ma non necessariamente, proporci nuovi oggetti fisici (può essere il caso dei positroni derivati dagli elettroni per mezzo di una pura simmetria delle equazioni della microfisica).

L’autonomia della matematica, grazie alla generazione del ragionamento, anche formale (il calcolo, ad esempio), non c’è dubbio, è la loro forza predittiva in fisica. Anche l’integrazione di queste diverse dimensioni concettuali, di queste diverse prassi (strutturazione geometrica del mondo, deduzione logica e formale, anche molto lontana da ogni significato fisic), conferisce alla matematica il suo carattere esplicativo e normativo del reale: si passa da un’invariante fisica, dallo spazio, diciamo, ad un’altra per una semplice via logica/formale (una trasformazione algebrica applicata a questa invariante e che la preservi, una simmetria…) e si propone così un nuovo oggetto fisico. La prova fisica sarà una nuova esperienza da inventare con strumenti da costruire.

In questo radicamento delle nostre scienze nel mondo, molto evidentemente, anche la percezione svolge un ruolo essenziale ma occorre a tal punto sviluppare una nuova teoria della percezione, ancorata ad una scienza della percezione che permette di andare ben oltre la "percezione passiva" dei positivisti, di cui parla Weyl. Ci ritorneremo.
L'approccio che noi proponiamo, chiaramente, fa perdere la certezza assoluta della prova logico-formale, decidibile. Ma sappiamo, a partire da Gödel, che ogni teoria formale, alquanto ambiziosa e di cui la nozione di prova sia decidibile, è essenzialmente incompleta. Dunque le "solide certezze" del logicismo e del formalismo (la certificazione assoluta della prova) sono andate perse… da parecchio tempo. Ci rimane il rischio della costruzione di oggettività scientifica, completamente umana, anche in matematica, l'avventura del pensiero che costituisce le proprie strutture dell'intelligibilità del mondo, nell'interazione con quest'ultimo e il pensiero d'altri. Il rischio, ad esempio, di valutare il buon ordine dei numeri interi, dei concetti puri, con un giudizio geometrico, costituito nella storia, il gesto, il linguaggio e l'intersoggettività, al fine di certificare la coerenza dell' Aritmetica, [Bailly, Longo, 2004].

4. Soggetto e oggettività

In diversi scritti, Weyl sviluppa un'analisi filosofica di grande interesse circa il passaggio dal soggettivo all'oggettivo in fisica, sulla base di riferimenti al proprio lavoro matematico sulla relatività. Tale analisi è trattata da [Mancosu, Ryckman, 2002], in cui si fa riferimento soprattutto a [Weyl, 1918b; 1927]. L'importanza delle osservazioni di Weyl va ben oltre i processi filosofici in fisica e in matematica, poiché tocca un aspetto centrale di tutta la filosofia della conoscenza, la tensione tra "culto dell'assoluto" e " relativismo". Husserl mira a superare questo divario attraverso tutto il suo lavoro e ogni sua lettura della storia della filosofia (vedere per esempio [Husserl, 1956]). La fisica del XX° secolo può fornirci gli strumenti per contribuire a questo dibattito, ecco le motivazioni di Weyl.
Per Weyl, l'esperienza immediata è "*soggettiva e assoluta*" o, meglio, essa *pretende* di essere assoluta; il mondo oggettivo, al contrario, che le scienze naturali, << estrapolano dalle nostre vite pratiche… questo mondo oggettivo è *necessariamente relativo* >>. Dunque, è l'esperienza soggettiva immediata che ci propone degli assoluti, mentre relativizzante è il tentativo scientifico verso l'oggettività, poiché << è presentabile solo in una determinata maniera (attraverso numeri o altri simboli) dopo che un sistema coordinato sia stato arbitrariamente introdotto nel mondo. Questa coppia di opposti: soggettivo-assoluto e oggettivo-relativo mi sembrano contenere una delle percezioni epistemologiche fondamentali che può essere estratta dalle scienze naturali >>.
A seguito del suo lavoro sulla relatività, Weyl assegna dunque un ruolo centrale ai sistemi di riferimento. Il soggetto stabilisce, sceglie, un sistema di riferimento e dispone così lo spazio lo spazio ed il tempo. Questa scelta è la primissima mossa del soggetto conoscente. Tuttavia l'operazione di misurazione, per definizione, implica anche il soggetto: ogni grandezza fisica è relativa ad (e fissata da) un "io cognitivo". Il passaggio all'oggettività si ottiene, in fisica quantistica, con l'analisi delle "invarianti di capacità", ad esempio, uno dei grandi contributi matematici di Weyl in quest ambito: esse sono assegnate come invarianti rispetto al passaggio da un sistema di riferimento e di misurazione ad un altro. Più generalmente, il passaggio dal soggettivo all'oggettivo implica la scelta esplicita ed esplicitata di un sistema di riferimento, compreso per la misurazione e le invarianti matematiche.
Weyl sottolinea dunque, alla maniera di Husserl, che ogni oggetto nel mondo fisico è il risultato di un atto intenzionale, di una coscienza "di un io che dà senso ." Per ambedue i pensatori si tratta dell' "io" cartesiano, a cui ricorre spesso Husserl, che "esiste, poiché pensa"; ed esiste, poiché, come coscienza, possiede degli "oggetti di coscienza" (la coscienza è "intenzionale", ha un "obiettivo"). E' il soggetto, questo "io" cartesiano cosciente, che sceglie il sistema di riferimento e che, in seguito, è messo in disparte. Esso stabilisce l'origine, lo 0 e l'unità di misura, e struttura matematicamente lo spazio ed il tempo (in quanto continui alla Cantor-Dedekind, ad esempio, o come varietà alla Riemann con i suoi tensori di curvatura); con questo gesto (la costruzione di uno spazio in quanto varietà matematica), egli stabilisce un quadro di oggettività indipendente dal soggetto, oggettività, tuttavia, coscientemente relativizzata a questa scelta. Poiché la scelta del "punto di vista", del sistema di riferimento, relativizza e cancella l'assoluto tipico del soggetto, prima che esso passi alla conoscenza scientifica; questo passaggio dal soggettivo, che pretende di essere assoluto, all'oggettivo che ha la funzione di relativizzare, è il senso del percorso scientifico in seno alla relatività. Come viene chiaramente detto in [Mancosu, Ryckman, 2002], << Il significato del "problema della relatività" [di Weyl] è che l'oggettività in fisica, quel mondo puramente simbolico del campo tensore della fisica relativistica, è costituita o costruita tramite soggettività, né postulata o dedotta come mente-indipendente o trascendente alla conoscenza>>. Ma questo

mondo simbolico della matematica è, a sua volta, il risultato di un'interazione de(i) soggetto(i) conoscente (i), nell'intersoggettività, con le regolarità del mondo, quelle regolarità che si vedono e che sono oggetti di atti

intenzionali, di uno sguardo diretto con "pienezza e volontà ", dicono Husserl e Weyl [7].

Il soggetto dunque è all'origine della conoscenza scientifica ed è da lui che comincia in particolare ogni costruzione matematica. Occorrerà tuttavia addentrarci maggiormente nell'analisi del ruolo del soggetto: oggi giorno possiamo porre il problema dell'oggettività in seno al soggetto conoscente, dal momento che il soggetto non è il soggetto psicologico al quale si interessano giustamente i cercatori dell'assoluto, delle verità trascendenti, delle configurazioni o delle proprietà che sono già lì, vere prima di ogni costruzione/specificazione, anche sulla mia scacchiera infinita o sulla serie dei numeri interi. In realtà, si tratta del "soggetto cognitivo", di questo "io" che noi condividiamo poiché esseri viventi, biologici e viventi in una storia comune, questo co-costituito con il mondo, contemporaneamente alla sua attività nel mondo. Ecco il prossimo processo a cui dobbiamo far fronte nel dialogo con le scienze della cognizione, a partire da teorie non ingenue (e non passive!) della percezione, dalle teorie della co-costituzione oggettiva del soggetto. L'analisi scientifica della conoscenza deve, da questo lato, mettere in evidenza ciò che è comune alla variabilità soggettiva, psicologica: più che una semplice "intersezione" delle soggettività, si tratta di cogliere così ciò che è oltre le variabilità individuali, ciò che sostiene queste e permette loro di comunicare e di comprendere/costruire assieme il mondo.

L'analisi fondazionale, in matematica ed in fisica, deve quindi proporre un'analisi scientifica del soggetto cognitivo e, successivamente, sottolineare l'oggettività della costruzione della conoscenza nei suoi spazi di riferimento o sistemi di orientamento.

Per quanto riguardo i fondamenti della matematica, un processo analogo a questa "scelta del sistema di riferimento" è reso ben evidente, in Teoria delle Categorie, dalla scelta del buon "topos" (come categoria di riferimento per una logica o con una "logica interna" [Jonhstone,1997]), a cui rapportarsi con dei funtori d'interpretazione, da altre costruzioni categoriche, in una dinamica di quelle strutture attraverso le quali diamo un senso matematico al mondo (categorie algebriche, geometriche, categorie di varietà). Niente a che vedere, come abbiamo già sottolineato, con l'assoluto degli assiomi della teoria degli insiemi, universo newtoniano che ha dominato la logica matematica e contribuito per un secolo a separare l'analisi dei fondamenti della matematica da ogni epistemologia scientifica. In effetti, in quel caso si trattava di un assoluto, gli insiemi, la cui intuizione è paragonata, dai "realisti" nella filosofia della matematica, alla percezione degli oggetti fisici (descritta molto ingenuamente nella sua passività), insiemi ed oggetti ugualmente trascendenti, con tutte le loro proprietà <<preesistenti, poiché sconosciute>> [Gödel, supplemento a 1947]**.** Un esempio tipico di ciò che Husserl di Ideen e Weyl (ripreso da Becker, vedere [Mancosu, Ryckman, 2002] chiamano il "dogmatismo" di coloro che parlano di una realtà assoluta, lista infinita di proprietà già costituite, prima di ogni accesso attraverso la coscienza, attraverso lo sguardo comune della nostra comunanza comunicante.

5. Dall'intuizionismo ad un costruttivismo rinnovato.

Fortunatamente all'interno stesso della logica matematica, si cominciano ad udire forte altre voci: << Realismo: Nessun dubbio che la realtà esista, qualunque cosa essa significhi. Ma il realismo è molto di più che il riconoscimento della realtà, è una semplice spiegazione del mondo, vista come se fatta di solidi mattoni. I realisti credono nel determinismo, nel tempo assoluto, rifiutano la meccanica quantistica: un realista non può immaginare "la segreta oscurità del latte". Nella logica i realisti credono che la sintassi si riferisca ad una semantica preesistente. In realtà, c'è solo una cosa che decisamente non può essere reale: la realtà stessa>> [Girare,2001].

[7] la profondità della filosofia scientifica di Weyl è straordinaria e la sua filosofia della matematica ne costituisce una (piccola) parte. Ho trovato molto fuorvianti, rispetto a questa profondità e alla sua originalità, i molteplici tentativi di alcuni "predicativisti" di farne un predecessore della loro teoria formalista della matematica. In breve, in [Weyl, 1918] (una notevole analisi husserliana del continuo fenomenale dello spazio e del tempo) Weyl si interroga sul problema selle corrette definizioni, un problema che ogni matematico sentiva all'epoca (compresi Poincarè e Hilbert, chiaramente): il XIX secolo era stata un'epoca formidabile per la matematica, ma, così spesso…quella confusione, quella assenza di rigore! In particolare, occorreva prestare attenzione alle definizioni che potevano implicare delle circolarità, come le definizioni non predicative. Weyl si accorge che i tentativi di Russell di dare un quadro di certezze "stratificate" alla matematica, non funziona (<<fa karakiri a causa dell'assioma di riducibilità.>>). Da grande matematico qual è, Weyl propone, in

qualche pagina e “dal suo mignolo”, un approccio “predicativista” che funziona mille volte meglio di quello di Russell con la sua teoria dei tipi. Un approccio - un’interessante esercizio di chiarificazione - che Weyl non seguirà mai nella sua pratica della matematica; al contrario in [Weyl, 1918], egli critica, a più riprese, il formalismo di Hilbert, il cui mito della formalizzazione completa << banalizza la matematica >> e arriva a congetturare l’incompletezza dell’ Aritmetica formale. Feferman, in [Feferman, 1987], ha ripreso alcune di queste idee appena abbozzate da Weyl (e non la grossolanità predicativamente incoerente della teoria dei tipi di Russell), per farne un’elegante e coerente teoria formale e predicativa per l’Analisi. Notevole lavoro tecnico, ma accompagnato da una lettura abusiva e fortemente incompleta della filosofia di Weyl (ho espresso queste opinioni critiche, precedute da una puntuale analisi degli interessanti aspetti tecnici in un resoconto, [Journ. Symb. Logic, 53/3, 1993], vedere anche [Longo, 1989; 1999]); la lettura distorta della storia è stata un punto forte del formalismo, ccminciando dalla presentazione di Euclide come il primo dei formalisti…incapace tuttavia di dimostrare in un modo *formalmente* corretto – in breve, alla Hilbert – il primo teorema del primo libro [Heath, 1908], vedere la prossima nota.

L’influenza di Brouwer, capofila dell’intuizionismo, e di Kreisel, così come l’esperienza matematica nei sistemi intuizionisti, è sicuramente presente nel lavoro matematico e nelle rare riflessioni filosofiche di Girard, senza tuttavia lo scivolamento tipico di Brouwer verso un solipsismo sconclusionato, né la limitazione a priori dei nostri strumenti di prova. Inoltre, lo spazio ed il tempo rientrano nelle analisi della prova alla Girard: la connettività, le simmetrie della prova come rete, il tempo come cambiamento irreversibile di polarità in [Girard, 1987, 2001] non hanno niente a che vedere con il << tempo in quanto scandito dagli orologi>> (sua espressione), questo tempo della prova sequenziale, delle Macchine di Turing, che è fuori dal mondo (vedere [Bailly, Longo, 2003] e [Longo, 2002b]).

L’intuizionismo di Brouwer, tra le diverse tendenze nella filosofia della matematica (formaliste, realiste platoniane, intuizioniste), è probabilmente l’unica analisi fondazionale che abbia tentato di proporre una epistemologia della matematica (ed un ruolo al soggetto conoscente). La serie discreta dei numeri, poiché traccia dello scorrere del tempo nella memoria ([Brouwer, 1948], vedere anche [Longo, 1999c]), viene posta come elemento costitutivo della matematica. E’, giustamente, questa visione della matematica come costruzione concettuale che ha fatto si che Weyl apprezzasse per lungo tempo l’approccio di Brouwer. In effetti, le analisi del continuo matematico presso Brouwer, e Weyl (così come presso Husserl, vedere [Weyl, 1918], [Tonietti, 1988], [Longo, 1999]) sono molto simili. Tuttavia, Weyl è costretto a prendere le distanze da Brouwer, nel corso degli anni 20, quando vedrà che questo ultimo limita smisuratamente gli strumenti di prova in matematica e non è in grado di andare al di là del “soggetto psicologico”, al punto tale da rinunciare al ruolo costitutivo del linguaggio e dell’intersoggettività e di proporre una “matematica senza linguaggio” (tema centrale del solipsismo di Brouwer, vedere [Brouwer, 1948], [vanDalen, 1991]).

Al contrario, e nel modo in cui abbiamo cercato di vederlo, il problema della relatività in Weyl, come passaggio dalla “legalità causale” alla “legalità strutturale” in fisica, o come gioco tra soggettività-assoluto e oggettività-relativo, è interno ad un approccio che colloca il problema della conoscenza nella sua unità, in particolare in quanto rapporto tra l’oggettività fisica e le strutture matematiche che rendono lo spazio intelligibile, grazie, fra altri, al linguaggio. Seguendo Weyl, abbiamo fatto un primo passo verso l’ampliamento “al di qua” dell’analisi fondazionale in matematica, rispetto a quelle analisi puramente logiche: il suo ultimo segmento è senza dubbio costituito dall’analisi logico-formale della prova; all’origine tuttavia sussiste il problema della costituzione delle strutture e dei concetti, un problema che è strettamente legato alla strutturazione del mondo fisico e alla sua oggettività. Il progetto di un’analisi cognitiva dei fondamenti della matematica richiede dunque una spiegazione del soggetto cognitivo. Identità vivente fatta di un corpo e di un cervello, vivente nell’intersoggetività e nella storia; tale soggetto traccia sul velo fenomenale, gli oggetti e le strutture, gli spazi e i concetti comuni alla matematica e alla fisica. In breve, la storia costitutiva parallela in fisica, in matematica, comincia dalla percezione intesa come azione: noi costruiamo l’oggetto attraverso un’osservazione attiva, attraverso la presenza di tutto il nostro corpo e di tutto il nostro cervello, in quanto integratore della pluralità delle sensazioni (“la visione come il toccare per mezzo dello sguardo” di Merleau-Ponty, la percezione come risultato di una comparazione tra input sensoriale e un’ipotesi elaborata dal cervello, [Berthoz, 1997]). Si isolano (“noi selezioniamo”) alcune invarianti della prassi che il linguaggio, lo scambio con gli altri, ci costringe a mutare in concetti, indipendenti dal soggetto costituente poiché comunicabili, invarianti costituite con gli altri, con coloro che sono diversi da noi ma che con noi condividono lo stesso mondo, lo stesso tipo di corpo. A partire dal conteggio, dall’apprezzamento della traiettoria senza spessore - si tratta di una semplice direzione -, si arriva ai concetti matematici di numero, di linea unidimensionale ed, in seguito, di punto [Bailly, Longo, 2004]. Invarianti assolutamente analoghe ai concetti fisici di energia, forza, gravitazione, elettrone…Questi ultimi sono il risultato di percorsi simili, sono invarianti concettuali che conseguono ad una prassi molto ricca ed “oggettiva”, quella della fisica, inconcepibile senza una stretta interazione con la matematica. Esse organizzano gli indizi che noi selezioniamo tramite la percezione e l’azione sul mondo, per mezzo dei nostri strumenti di misurazione; la strutturazione geometrica di tali invarianti è lo strumento chiave di organizzazione perché chiarisce lo spazio della nostra azione e della nostra comprensione.

La memoria individuale e collettiva è una componente essenziale di questo percorso costitutivo delle invarianti concettuali (spaziali, logiche, temporali…). L'oblio in particolare, che è insito nella memoria umana (e animale), ci aiuta a cancellare i dettagli "inutili"; inutili rispetto all'intenzionalità, ad uno scopo cosciente o incosciente. L'oblio contribuisce con questo alla costituzione di ciò che è stabile, che conta per i nostri obiettivi, che si condivide, in breve alla determinazione di queste strutture e di questi concetti invarianti, poiché ripuliti da qualunque cosa sia completamente contingente, [Longo,1999c]. La loro universalità interculturale è il risultato di una prassi condivisa o "condivisibile", nel senso che queste invarianti, questi concetti, possono essere proposti in una cultura specifica (pensiamo alla geometria greca o all'algebra araba), ma il loro radicamento in percorsi cognitivi umani fondamentali (il nostro rapportarci alla misura e allo spazio sensibile, il conteggio…) li rende accessibile ad altre culture. Tale allargamento di una base storica di utilizzazione non è neutro, esso può richiedere l'eliminazione di altre esperienza tipiche della cultura che le assimila, ma conferisce loro quell'universalità che accompagna e deriva dalla stabilità e dalla massima invarianza concettuale tipica della matematica. Ma *universale* è messo in relazione all'esperienza umana e non significa *assoluto*; si tratta anche stavolta di un'invariante culturale, tra culture che si delineano nell'interazione. Giacché tale universale è il risultato di queste comunanze comunicanti e lo stesso oblio storico ne è un fattore; l'oblio o l'esclusione dalla matematica dei numeri magici, delle strutture zombalos…di qualsiasi cosa che non ha la generalità dei metodi e dei risultati che noi chiamiamo, a posteriori, matematici.
Quanto all'organizzazione matematica dello spazio fisico e sensibile, tutto ciò comincia molto presto, probabilmente non appena lo spazio viene descritto da gesti e parole, o nella prospettiva e nello spessore spaziale delle immagini pittoriche di Lascaux, 20.000 anni fa, o a partire dal gioco delle figure rigide di Euclide, il quale struttura lo spazio geometrico. L'assiomatica di Euclide riassume in effetti i gesti più piccoli, indispensabili al geometra, con la sua squadra ed il suo compasso, i suoi strumenti di costruzione e misurazione: "*tracciare* una linea dritta a partire da un punto verso un altro", "*prolungare* una linea finita in una linea, con continuità", "c*ostruire* un cerchio a partire de un punto e una distanza"…Il suo primo teorema è la "visione di una costruzione" (in greco, teorema significa "vedere" o "spettacolo"): esso insegna come "*costruire* un triangolo equilatero a partire da un segmento"[8].
Questa storia trova sbocco sulle simmetrie di Weyl, regolarità del mondo che ci piombano sulla testa (che preesistono o che il reale ci impone), ma che *noi* trasformiamo in concetti e *scegliamo* di porre come criteri di organizzazione del reale, anche in microfisica, ben lontano dallo spazio dei sensi.
Occorrerebbe anche ritornare su alcuni temi trattati in [Bailly, 2003] per comprendere il ruolo, nella costruzione del nostro spazio matematico, e fisico, delle simmetrie e delle loro rotture, in particolare rispetto ai problemi delle misura fisica.

III. A proposito dei concetti matematici e degli oggetti fisici.

(di Francys Bailly)

G. Longo ci suggerisce di stabilire un parallelo ***tra concetto matematico e oggetto fisico.*** La massiccia matematizzazione della fisica da una parte, la fonte delle nuove strutture matematiche che di fatto essa è ormai suscettibile di generare dall'altra, tanto quanto l'inclinazione della matematica ad appoggiare le proprie costruzioni sulla fisicità del mondo,a costo poi di oltrepassare, o addirittura obliare, questa fisicità nel loro movimento di astrazione nella loro generazioni, ci spinge in effetti ad interrogarci sui rapporti che i concetti matematici così costruiti e gli oggetti fisici, altamente formalizzati dalla fisica, sia essa classica o contemporanea, possano conservare. Quali potrebbero dunque essere i tratti storici, o dinamici, adatti a ciascuna di queste determinazioni e di questi metodi che autorizzano un tale parallelo?
Abbiamo già rivelato le analogie e le differenze tra fondamenti della fisica e fondamenti della matematici facendo coincidere i loro principi di costruzione e i loro principi di prova: in breve, esse sembrano condividere principi di costruzione simili e ricorrere a principi di prova distinti – formali per la matematica attraverso la logica, sperimentali o desunti da osservazioni in fisica attraverso la misura- . Possiamo andare più lontano senza attenerci alla semplice constatazione dei loro "transferts" reciproci[9]?

8 E' questo il primo teorema del primo libro e il punto costruito è il risultato delle due linee tracciate dal compasso. La sua esistenza non è stata dimenticata, come pretende la lettura formalista di questo teorema, essa è costruita: la geometria di Euclide presuppone e ingloba una teoria del continuo, senza salti né lacune (vedere Parmenide e Aristotele).

9 E' inutile ritornare sul "transfert"evidente e costitutivo delle strutture matematiche verso la fisica. Il "transfert"nell'altro senso, quello della fisica verso la matematica diventa sempre più sensibile: dopo l'introduzione in fisica della "funzione" di Dirac, la teoria delle distribuzioni, dopo l'introduzione degli integrali di cammino di Feymann, le corrispondenti ricerche matematiche per fondare i suddetti rigorosamente, dopo le algebre delle teorie quantistiche, l'invenzione della geometria non commutativa, ad esempio. Senza parlare delle convergenze tra teoria fisica dei quasi-cristalli e teoria combinatoria in matematica o tra teoria fisica della turbolenza e teoria matematica dei sistemi dinamici non lineari,etc..

1. La "frizione" e la determinazione degli oggetti fisici.

Per affrontare un registro diverso, riscontriamo che nella discussione epistemologica sui rapporti tra fondamenti della fisica e fondamenti della matematica, G. Longo ci propone di considerare ciò che fa da "*frizione*" nel gioco di determinazione dei loro rispettivi oggetti. La frizione fisica, quella che convalida (o funge da prova), si trova in primo luogo proporzionata alla fenomenalità fisica e alla sua misura: l'esperienza o l'osservazione che risaltano in ultima istanza, pur non interrompendo il loro gioco contemporaneo a quello delle frizioni di tipo più astratto, più "cognitive" in relazione con la teorizzazione matematica. Per contrasto, in matematica, sembra proprio che la frizione dominante debba essere proporzionata alle nostre stesse capacità cognitive (in termini di coerenza delle prove, di esattezza dei calcoli), nonostante l'intuizione matematica si alimenti talvolta dalla frizione con la fenomenalità fisica (e, come direbbe Longo, ne viene inoltre canalizzata).
Precisiamo. La "canalizzazione" e la "frizione" nella costituzione dei concetti e delle strutture matematici, di cui parla Longo, sembrano principalmente rapportate ad "*una realtà*" che è il risultato del gioco tra soggetto conoscente e mondo, gioco che impone determinate regolarità, non organizzate. La costruzione matematica, in seguito, fa, di nuovo, da frizione sul mondo a causa del tentativo di quest ultimo di organizzare il reale. In fisica, dove è l' "accecante prossimità del reale" a prevalere, frizione e canalizzazione pare agiscano in ambiti distinti: se la frizione, come abbiamo sottolineato, resta rapportata alle condizioni dell'esperienza, dell'osservazione, della misura - in breve a quelle della fenomenalità fisica - , la canalizzazione, da parte sua, deriva ora molto più dalla natura e dalla generazione delle strutture matematiche che organizzano tale fenomenalità, la "modellizzano" e finalmente permettono di fondarla in oggettività.
Se ci affidiamo all'aforisma secondo il quale "il reale, è ciò che resiste", sembra dunque che, tramite frizione interposta, il reale fisico, pur costituendosi ormai attraverso la matematizzazione, trovi la sua ultima istanza nella funzione di misura della fenomenalità, e che il reale matematico la trovi essenzialmente nell' attività associata ai nostri processi cognitivi e alla nostra immaginazione astratta. Ora, quale è il rapporto tra questa frizione e quella frizione, tra questo reale e quel reale? A primo impatto sembra proprio non esistere: la realtà del mondo fisico sembra totalmente estranea a quella del mondo cognitivo e noi non ricorreremmo alla soluzione più facile che consiste nel discutere che, in un caso o nell'altro, dobbiamo confrontarci con dei supporti materiali, relativi ad un'unica materia. In effetti, anche se si tratta della stessa materia, essa si manifesta a livelli di organizzazione molto diversi e molto lontani gli uni gli altri qualora si consideri la fenomenalità fisica o le nostre strutture cognitive. In compenso, e tuttavia se si è guidati da una visione alquanto monista delle nostre capacità di investigazione, ci si può interrogare, legittimamente, su quell'unione tra questi livelli che consente ad un conoscenza di costituirsi: unione dominata da uno dei due poli che essa tira in gioco (fenomenale o cognitivo) a seconda che ci si riferisca ad un approccio fisico o matematico. Ed è questa stessa unione che, in realtà, sembra costituire la conoscenza, come pure, è la stessa unione, che manifesta la vita [Varela, 1989]. Il rapporto che si potrebbe allora stabilire tra oggetto fisico e concetto matematico dipenderebbe dunque dal fatto che si tratterebbe di prendere in considerazione la medesima unione (tra strutture cognitive e fenomenalità) ma da diverse angolazioni, qualora si tratti della teoria della materia fisica o della teoria delle strutture astratte. Il fatto che si tratti della medesima unione sarebbe a quel punto palese nella comunanza dei principi di costruzione che abbiamo già rilevato, mentre la differenza dei punti di vista disciplinari fondati su questa unione (dal fenomenale al cognitivo-strutturale o viceversa) si manifesterebbe nella diversa natura dei principi di prova, dimostrazione o misura.
Un altro approccio per guidare la comparazione tra oggetto fisico e concetto matematico, approccio che sembra burlarsi della frizione fenomenale caratteristica della fisica, ma che in un secondo tempo è suscettibile di riprendere in modo non troppo artificiale, consiste nel considerare che, come d'altronde abbiamo già sottolineato [Bailly (prossima pubblicazione)], il concetto scientifico, sia esso legato ad un oggetto fisico o ad un'idealità matematica, ha perso molte delle sue determinazioni di "concetto" per divenire una struttura formale astratta: ciò non farebbe che tradurre l'affinità sempre più stretta tra gli oggetti fisici contemporanei e le strutture matematiche

che li “modellizzano”. Un modo, forse di tematizzare il ruolo costitutivo della matematica per la fisica, del quale abbiamo già parlato. Una valutazione che è senza dubbio ampiamente fondata, ma non rende completamente giustizia a quella determinazione particolare degli oggetti fisici presente nella seconda parte dell'espressione “le strutture matematiche *che li modellizzano*”. In effetti, la necessità di aggiungere tale precisazione rimanda a quel “qualcosa” che ha bisogno di essere “modellizzato”, ad un referente che non corrisponde alla struttura matematica stessa. Ed è questa variazione di livello di determinazione, questa eteronomia che contrasta con l'autonomia della struttura matematica, che senza dubbio specifica l'oggettività dell'oggetto fisico e ricorda che tale oggettività è suscettibile di rispondere ad altri tipi di determinazione al di là di quelle legate alla sola struttura matematica, affinché la si possa quindi chiamare una nuova “frizione”.

2. A proposito di assoluto e di relativo in matematica ed in fisica.

Il fisico non può che essere pienamente d'accordo con ciò che sostiene H.Weyl il quale, partendo dalla matematica, critica il preteso assoluto del soggettivo per confrontarlo a quello che egli chiama il relativo dell'oggettivo (vedere il testo di G.Longo). Tutto il suo lavoro, in effetti, consiste nel liberarsi dall'illusione di questa “assolutezza” soggettiva nella comprensione dei fenomeni al fine di giungere a costruire delle invarianti oggettive suscettibili di essere comunicate. Per questo scopo, accostiamo chiaramente le due definizioni di relativo e soggettivo, altrimenti quella di assoluto, per lo meno di invariante stabile, a quella di oggettivo. A tal punto che i risultati di questa costruzione d'oggettività fisica si rivelano, a volte, incredibilmente contro-intuitivi (avviene per la non-separabilità quantistica che impedisce di parlare di due quanti distinti allorché essi hanno interagito; ma già dal tempo di Copernico e Galileo, la sfericità della terra, il suo movimento in rapporto al sole rappresentavano una sfida per la percezione spontanea intuitiva e il senso comune: la lingua ne perpetua le tracce, che persistono nel vedere il sole sorgere, ed esempio).
Il processo dell'analisi che si può fare di questa situazione è, senza alcun dubbio, da ricercare nei rapporti tra l'utilizzazione della lingua naturale da una parte e la matematizzazione che presiede all'elaborazione dei modelli matematici dall'altra. In breve, il relativo del soggettivo è relativo alla lingua ed in essa può risultare assoluto poiché il linguaggio gioca in quel caso un ruolo referenziale, mentre il relativo dell'oggettivo è relativo al mondo stesso che si presenta come origine delle invarianti stabili le quali, conseguentemente, sono suscettibili di ricoprire il ruolo di “assoluti” in quanto (inizialmente) completamente comunicabili. Da cui la possibilità di una sorta di chiasmo nelle definizioni a seconda del primo riferimento, vale a dire anche secondo l'impegno del locutore: nel suo rapimento intuitivo e singolare, egli non vive la relatività al suo “me” e non percepisce che l'assoluto della propria intuizione, ma nella ricostruzione razionale che mira all'oggettività non include la relatività al modello matematico e prende le invarianti oggettive, costruite dalla comunanza intersoggettiva per assoluti quasi “ontologici”. Sono questi giochi di “referenziazione” (alla lingua e al modello matematico) su cui tenteremo di discutere un po' più precisamente.

3. Le due funzioni della lingua nel processo di oggettivazione e la costruzione di modelli matematici in fisica.

Malgrado le constatazioni del carattere sempre più astratto-matematico dell'oggetto scientifico della fisica, sarebbe comunque assurdo dedurre da ciò che il movimento di scientifizzazione corrispondente comporti unicamente un processo di distacco dall'uso della lingua naturale e che screditi l'utilizzo di questa. In effetti, tutto ciò significherebbe negare completamente che, al di là di quanto formali esse possano essere, le intuizioni scientifiche continuino ad essere radicate in questo uso linguistico e che i percorsi d'interpretazione che contribuiscono a rendere tali intuizioni intelligibili, compreso (quello) per l'intersoggettività che costituisce la comunanza scientifica, non possano farne a meno. Non solo nella ricerca della comunicazione con chi non è specialista della disciplina, ma anche nell'euristica della ricerca disciplinare stessa, in particolare nel suo momento immaginativo e creativo, per quanto singolare esso possa essere.
Cosi, ad un'analisi più approfondita la matematizzazione “oggettivante” appare in realtà non come esclusiva della lingua o del suo uso (anche se nel momento della spiegazione tecnica può risultare tale), ma piuttosto come intercalare tra due distinte funzioni della lingua che essa giustamente contribuisce a distinguere articolandole (così facendo la dimensione ermeneutica è reattiva e le componenti di storia e di genesi reintrodotte là dove

dominavano principalmente quelle legate alle pregnanze delle strutture formali e teoriche). E' questo punto che vogliamo discutere e sviluppare sostenendo che così come si è condotti a considerare, per la ragione, un duplice statuto - la ragione costituente e la ragione costituita -, allo stesso modo si è condotti a distinguere per la lingua, limitatamente al formalismo matematico, due funzioni: una funzione "*referenziante*" e una funzione "*referenziata*". Tentiamo di precisare.

Nella sua funzione "referenziante" la lingua fornisce la possibilità di formulare e stabilire, per la fisica (ma vale anche per le altre discipline), i grandi principi teorici attorno ai quali essa si organizza. In un certo senso, in relazione al soggetto che fissa le norme, essa governa in questo modo l'attività "oggettivante". Per contrasto, nella sua funzione "referenziata" relativamente a queste "modellizzazioni", la lingua si esprime più in termini che in parole, in rapporti concettuali che in evoluzioni di significati; dunque essa si subordina alle determinazioni proprie di queste strutture matematiche astratte che ha contribuito a riordinare e di cui ha avviato la generazione. E ciò avviene fin quando il movimento di teorizzazione scientifica si serve, in ripresa, di questo stato "referenziato" della lingua, per conferirgli una nuova funzione "referenziante" in vista dell'elaborazione di nuovi modelli, di nuovi principi, più generali o più astratti, "lo stato finale" di un passaggio che diventa, in qualche modo "lo stato iniziale" del passaggio successivo. In questo processo dialettico continuamente in attività, il modello matematico come tale mantiene il divario e la distinzione - essenziali per la costruzione d'oggettività - tra queste due funzioni della lingua, pur assicurando la mediazione necessaria tra esse. Esso si rinforza e si modifica grazie all'una: non smette di trasformare l'altra a causa della dinamica interna che gli appartiene grazie alla generazione della matematica. Così facendo, il modello matematico contribuisce a generare la lingua della conoscenza, attraverso quelle funzioni che fa adottare alternativamente a quest'ultima e tra le quali assicura una circolazione regolare (poco all'immagine, bensì nel registro del rigore "oggettivante", di ciò che la poesia perviene a creare nel ruolo della scrittura di soggettività).

Un esempio fisico di questo processo, in accordo con le innovazioni di Keplero, Copernico e Galilei, lo si può ritrovare nello statuto della teoria della gravitazione universale di Newton. Lo stato "referenziante" della lingua, un tempo, faceva riferimento ad una rappresentazione ("aristotelica") del mondo, secondo la quale il "sopra lunare" costituiva un *assoluto* della perfezione e della continuità (invariabilità del corso dei pianeti che descrivono cerchi perfetti, e modello corrispondente degli epicicli tolemaici). Eppure è solo a partire da questa funzione "referenziante" (la cui caratterizzazione quasi mitica si ritrova presso lo stesso Newton nei suoi studi di alchimia o biblici [Verlet,1993]) che il modello matematico risulta essere costruito (come voleva Galilei) dalla gravitazione universale che regola tutti i corpi siano essi sotto o sopra lunari. Quanto alle forze di interazione, questo relativizzare in modo così radicale, grazie alla matematizzazione, è accompagnato, certamente, dal mantenimento (addirittura, dal punto di vista concettuale, dall'introduzione) di un altro *assoluto,* quello dello spazio e del tempo, tuttavia esso ridefinisce la lingua del corso dei pianeti, in uno stato ormai "referenziato" a quel modello in cui le orbite ellittiche e le osservazioni empiriche vengono "spiegate" dalla legge della gravitazione universale. Per di più: grazie a questo modello matematico, vengono raccolte le invarianti fisiche pertinenti che faranno da struttura d'appoggio ad ogni ulteriore considerazione e che modelleranno la lingua di questa nuova cosmologia. E' questo stato referenziato (al modello matematico così costruito) della lingua della cosmologia di Newton che fungerà, in seguito, da nuovo fondamento per il proseguimento della ricerca, giocando dunque ormai un ruolo"referenziante", al fine di relativizzare suddetti assoluti di spazio e tempo e concepire la teoria di Einstein della relatività generale.

Riprendiamo questa distinzione da un punto di vista complementare, più affine alle procedure, più affine anche ai formalismi più specificatamente logici. In quanto referenziata, la lingua deve, in un modo o nell'altro, per avere senso e scongiurare i paradossi, piegarsi ad una sorta di teoria dei tipi capace di discriminare tra i diversi livelli dei suoi enunciati. Tuttavia la costruzione di una tale teoria dei tipi richiama la funzione "referenziante" della lingua. Quest'ultima guida, in effetti, l'elaborazione concettuale e la formulazione degli enunciati formali. Quindi, la funzione "referenziante" legittima ed inventa. Essa regola l'attività creatrice ed organizzatrice. La funzione "referenziata" è oggetto di studio e analisi. Esige la mediazione di un linguaggio logico-matematico, che la oggettivizzi e permetta di trattarla rigorosamente secondo la propria funzione "referenziante". Notiamo, a questo stadio, che l'esigenza, talvolta formulata da logici costruttivisti, di una "logica effettiva" poggia dunque sull'aspetto referenziato. Come nell'intuizionismo che vede l'attività del pensiero all'opera nel processo di elaborazione e di costruzione matematica. Ma poiché essa innova e crea, vale a dire poiché essa fa scaturire riferimenti inediti, l'attività di pensiero non risponde a criteri o a norme di costruttibilità: li produce.

In un modo un po' simile, anche la "modelizzazione" della teoria fisica si presenta contemporaneamente come seconda e non di meno come determinante: subentrando alla riflessione (per quanto astratta e rigorosa essa sia già) che enuncia i principi - da "modelizzare"- e la cui anteriorità può conferirgli uno statuto di assolutezza apparente, essa sostiene tuttavia ogni ulteriore passo teorico, quand'anche questo ultimo arrivasse fino a contraddire determinati principi in precedenza ritenuti per acquisiti.

E' senza alcun dubbio questa configurazione concettuale che consente di capire in che modo le situazioni talvolta così contro intuitive trattate dalle teorie fisiche contemporanee possano tuttavia essere "parlate" in una lingua naturale che non smette spontaneamente di pretendere il contrario dei risultati acquisiti: questa cosiddetta lingua naturale non lo è più molto (alle sue parole propriamente dette sono stati sostituiti dei termini) ed in ogni caso essa si appoggia non più sulle proprie strutture linguistiche e sulla propria grammatica (e le mentalità corrispondenti) bensì sulle strutture matematiche del modello che essa interpreta e commenta, senza poter per tanto restituirne la profondità e, soprattutto, la generazione ma assicurando tuttavia la comunicazione culturale.

4. Dalla relatività degli universi di riferimenti a quella di questi stessi universi come generatrice delle invarianti fisiche.

H. Weyl sottolinea dunque come avviene un processo di emancipazione concettuale: liberandosi dall'illusione "assolutista" del soggettivo e di ciò che è proprio del linguaggio, i concetti fisici si oggettivizzano tramite la loro relativizzazione agli universi di riferimento e alla loro matematizzazione. Quello che permette la fisica contemporanea, tuttavia, è , senza dubbio, un passaggio, una transizione, straordinaria in un tale processo di emancipazione rispetto ai vincoli "sensibili". Stavolta, attraverso le teorie di capacità, di cui, del resto, Weyl fu uno dei promotori. In effetti, queste ultime teorie tornano a relativizzare gli stessi universi di riferimento spogliandoli di gran parte delle loro proprietà concepite, fino a quel momento, come "assolute": lo spazio è tale che non vi è origine assegnabile per le traslazioni o per le rotazioni, e da ciò risultano le invarianze dei momenti cinetici o di rotazione; il tempo è tale che non esiste un punto privilegiato che permetta una misura assoluta: l'invarianza dell'energia nei sistemi conservativi è ciò che ne consegue. Questo per gli universi esterni di riferimento. Ma per gli universi quantistici interni funziona allo stesso modo: l'assenza globale di un'origine assegnabile delle fasi di una funzione d'onda elettronica comporta la conservazione della carica elettrica, la sua assenza locale è l'origine del campo elettromagnetico! In questo modo, anche i campi di interazione si trovano associati a variazioni di capacità autorizzate da queste relativizzazione degli universi di riferimento. E tali relativizzazioni intrinseche non sono altro che le simmetrie presentate da questi universi (connettività, isotropia, omogeneità,…). Meno, per volere di queste particelle, si è capaci di specificare questi universi in maniera assoluta e più invarianti fisiche (vale a dire anche determinazioni astratte) si è capaci di ricavare. Con questo aspetto complementare le specificazioni caratteristiche degli oggetti in questione sono ormai sempre più rapportati a delle rotture spontanee di simmetria. Come se, al di là della stessa costruzione di oggettività, fosse *l'identità stessa* dell'oggetto così costruito - nella sua stabilità e nelle sue "proprietà" specifiche - ad essere determinata.

5. Causalità fisica e simmetria matematica.

Allo stesso modo Longo rivela che con la fisica relativista e secondo Weyl, soprattutto, si produce un *"cambiamento di prospettiva: si passa dalle "leggi causali"all'organizzazione strutturale dello spazio e del tempo, persino dalle leggi causali alla "legalità/normatività" delle strutture matematiche (geometriche)".*
Non si può che constatare che tale movimento, da allora, non ha fatto che affermarsi ed estendersi non senza sollevare nuove e complesse questioni epistemologiche. In effetti, con la fisica quantistica, abbiamo assistito, ad uno sviluppo apparentemente paradossale: da un lato i concetti geometrici hanno assunto un carattere onnipresente (che si tratti di topologia, di geometria algebrica e, anche e soprattutto, di simmetrie) e contemporaneamente, dall'altro, come abbiamo abbondantemente sottolineato nella parte "fisica" di questo testo a proposito dello spazio e del tempo, gli sviluppi quantistici trovavano la loro descrizione più adatta in spazi inaspettati, sempre più lontani dal nostro spazio-tempo intuitivo, addirittura dallo spazio-tempo relativista (spazi funzionali di Hilbert, spazi di Folk, etc.) A tal punto che, come è noto, la stessa nozione di traiettoria risulta problematica in fisica quantistica e che, d'altra parte, sempre in questa fisica, la casualità *stricto senso* (quella che si può associare alle teorie relativiste) è profondamente rimessa in discussione, in particolare nel processo di misurazione. Ne derivano in parte, del resto, le difficoltà di unificazione tra relatività generale e teoria quantistica.
E' dunque necessario intendersi: la massiccia geometrizzazione della fisica quantistica nuovamente ricorre ai e si occupa dei concetti di origine geometrica, ma la geometria in questione, è sempre più lontana da quella dei nostri

spazi-tempi comuni, quand'anche essi fossero quadri – dimensionali. In realtà, suddetta geometrizzazione è molto più associata all'uso delle simmetrie e alle rotture di simmetria, le quali permettono, di svincolarsi dalle invarianti e dalle quantità conservate e, contemporaneamente, di costruire, matematicamente e concettualmente, le teorie di capacità, disgiungendo e tuttavia, tentando di articolare, abbiamo visto, spazi-tempi interni e spazi-tempi esterni. Quindi, si assiste in affetti a quella sostituzione, menzionata più in alto, delle "leggi causali" con "organizzazioni strutturali matematiche", eppure sostenute da spazi e temi che presentano caratteristiche inedite.
Tale sostituzione, del resto, è talmente massiccia, come nota C. Chevalley nella sua *Presentazione* all'opera di B. Van Fraassen [Van Fraassen, 1994] che si arriva, nell'analisi della fisica contemporanea e nel suo stesso funzionamento, a "<< >> *sostituire al concetto di legge quello di simmetria*", riprendendo, in tal modo ed accrescendo l'apprezzamento dell'autore il quale, nel momento in un cui adotta quello che chiama "approccio semantico" nell'analisi della fisica, non esita ad affermare, sempre a proposito della simmetria, "*considero suddetto concetto come la principale via d'accesso al mondo che costruiamo nelle teorie".*
E' una radicalità che, a prima vista, potrebbe sorprendere, ma che può essere spiegata in modo soddisfacente qualora ci si accorga che, alla fine, si tratta di considerare alcuni degli elementi essenziali del processo stesso di costruzione dell'oggettività fisica e della determinazione dei corrispondenti oggetti scientifici. In effetti, così come ai principi di relatività e di simmetria vengono associate delle conservazioni di quantità fisiche e tutta la fisica si appoggia sulla misura di quantità rapportate a determinate proprietà che devono rimanere stabili per poter essere osservate, si può arrivare fino a sostenere che tali relatività e simmetrie, quand'anche esse sembrino ridurre le possibili informazioni relative ai sistemi studiati, sono costitutive dell' *identità* stessa di questi sistemi. Come se si trattasse, riprendendo il vecchio vocabolario della scolastica medievale, di liberare le loro qualità primarie (all'occorrenza le loro essenziali strutture identitarie), affidando alle "leggi" l'incarico di regolare le loro qualità secondarie (alle quali corrisponderebbero, in quel caso, i loro possibili comportamenti in esame).Per proseguire brevemente in questa via, si potrebbero anche analizzare più a fondo i rapporti tra simmetria e identità considerando che ogni informazione è una (relativa) rottura di simmetria e che reciprocamente, ogni relativa rottura di simmetria costituisce un elemento oggettivo di informazione. Secondo un tale schema, sarebbe a quel punto pertinente considerare che alla coppia metafisica sostanza/forma, sostituita parzialmente nell'era scientifica dalla coppia energia/informazione (o entropia), corrisponde, in ultima istanza, la coppia simmetria/ rottura di simmetria poiché costitutiva dell'identità dell'oggetto scientifico, che abbiamo menzionato.

Fermiamoci sul nostro discorso sui rapporti tra leggi causali e strutture matematiche delle geometrie. Che le teorie relativiste – la relatività generale in particolare – costituiscano l'ambito privilegiato in cui la sostituzione della pertinenza delle leggi causali ad opera di quella delle organizzazioni strutturali si è manifestata inizialmente, ciò dipende essenzialmente dalla dualità intrinseca esistente tra la caratterizzazione della geometria dell'universo e quella dell'energia-impulso nello stesso universo. Tale dualità più l'attuazione del principio di invarianza sotto le differenziabili trasformazioni dello spazio-tempo fanno si che le "forze" siano relativizzate alla natura di questa geometria: esse arrivano ad apparire o a scomparire secondo la natura geometrica dell'universo che si è scelto *a priori* per descrivere i comportamenti fisici. Lo stesso accade per la fisica quantistica, nelle teorie di capacità ove, stavolta, i gruppi di capacità agiscono su delle variabili interne: come nel caso della relatività la scelta delle capacità locali ed i loro cambiamenti consentono di definire, o al contrario di far dissolvere, la stesse interazioni che caratterizzano gli effetti reciproci dei campi tra loro. Ad esempio, è la scelta della capacità di Lorentz che offre la possibilità di mostrare i potenziali d'interazioni elettromagnetici come correlati dell'invarianza di capacità.
Di conseguenza, se si considera che una delle modalità d'espressione e d'osservazione dei processi causali è da ricercare nell'esatta caratterizzazione delle forze e dei campi che "causano" i fenomeni osservati, è chiaramente visibile che tale modalità viene profondamente rimessa in discussione dagli effetti di queste trasformazioni. Non che la stessa struttura causale ne derivi intrinsecamente sovvertita, bensì è la descrizione dei suoi effetti, che ne risulta fortemente relativizzata. Questo genere di constatazione conduce dunque a crearsi, della causalità stessa, una rappresentazione più elaborata di quella conseguente alla prima intuizione ricavata dai comportamenti classici. In particolare, la casualità della fisica contemporanea sembra molto più associata alla manifestazione di una solidarietà formale tra fenomeni e tra fenomeni e ambiti referenziali scelti per descriverli, che ad una "azione" orientata di un oggetto verso un altro in uno spazio-tempo inerte, come poteva invece avvalorarne l'idea la meccanica classica: dopo Kant, essa non pretendeva già più di restituire il funzionamento della realtà "in se", con i risultati contemporanei essa arriva fino a presentarsi come tecnicamente dipendente dai modelli che danno spiegazione dei fenomeni studiati. Le cause, in questo senso, divengono delle interazioni e sono queste stesse interazioni che costituiscono la trama dell'universo delle loro manifestazioni, la sua geometria: si deformi questa trama e le interazioni sembrano modificarsi, si intervenga sulle interazioni ed è il tessuto che si deforma.

Tali considerazioni possono essere estese alle teorie di tipo critico in quanto specialmente le rotture spontanee di simmetria (indipendentemente dalle loro eventuali origini aleatorie, che, per contrasto con quanto accade con le fluttuazioni quantistiche intrinseche, non rimettono in discussione la casualità propriamente detta, bensì la sua osservabilità) sovvertono, parzialmente, il principio di Curie che voleva che la simmetria delle cause si ritrovasse in quella degli effetti. E se si vuole generalizzare il principio di Curie nel caso degli effetti che manifestano rotture di simmetria rispetto alle cause, si è allora portati a considerare non più semplicemente una singola esperienza che manifesta questa rottura, ma l'intera classe delle esperienze equivalenti e dei loro risultati. Così come le rotture di simmetria vengono singolarizzate in maniera aleatoria da alcune fluttuazioni che le orientano (è l'ipotesi fondamentale che si risparmia l'esistenza di altre "cause" che non sarebbero state prese in esame nel problema), la considerazione di tutte le esperienze possibili contribuisce ad eliminare questo carattere aleatorio mediandolo e a restaurare nell'attuale, ed in media, la simmetria delle potenzialità. Persiste tuttavia, il fatto che il poter predire esattamente il risultato di un'esperienza data resta limitato: se si sa che il suddetto risultato appartiene necessariamente alla classe delle simmetrie autorizzate dal principio di Curie, s'ignora quali possibilità esso attualizzi, precisamente ciò in cui la simmetria si trovi spontaneamente rotta e la casualità usuale turbata.
Per concludere, alla fine risulta dunque, che, mentre le leggi causali si trovano rimpiazzate nella loro fecondità teorica e nel loro valore esplicativo dalle analisi di strutture e di trasformazioni "geometriche", è il concetto stesso di casualità che ritrova il proprio statuto di concetto regolatore e che si allontana dal ruolo costitutivo che ha voluto mettere in azione più o meno coscientemente. Per riprendere alcune osservazioni che abbiamo già formulato da un altro punto di vista, se la spiegazione fenomenale e la descrizione delle *manifestazioni* sensibili continuano a ricorrere, in fisica, al concetto di causa, in compenso la *costituzione* dell'identità o dell'oggettività fisica è sempre più rapportata alle strutture matematiche che la teorizzano e le conferiscono ormai un potere predittivo. Questo rinnova l'attualità delle considerazioni di Weyl e dei suoi amici.

6. Verso il " soggetto cognitivo"

Ritorniamo ad un altro aspetto del testo: "Concetti matematici e oggetti fisici" di G.Longo. Alcune delle osservazioni che sono state fatte in questo ambito possono costituire le basi stesse di un'indagine approfondita della cognizione umana. Cogliamo due di queste indicazioni che hanno quasi valore di programmi di ricerca. Egli scrive: "*L'analisi fondazionale, in matematica e in fisica, deve quindi proporre un'analisi scientifica del soggetto cognitivo e, in seguito, sottolineare l'oggettività della costruzione della conoscenza nei suoi ambiti di riferimento o sistemi di orientamento".* E più avanti, da un angolazione più specifica ed in ciò ancora più precisa: "*Il progetto di un'analisi cognitiva dei fondamenti della matematica richiede dunque una spiegazione del soggetto cognitivo, identità vivente fatta di un corpo e di un cervello, vivente nell'intersoggettività e nella storia, tale soggetto che traccia sul velo fenomenale gli oggetti e le strutture, gli spazi e i concetti, comuni alla matematica e alla fisica".*
Questo percorso, in qualche modo, contraddice il percorso che era prevalso con Boole ed i suoi successori logisti e formalisti, che volevano trovare unicamente nella logica e nel formalismo le "leggi del pensiero", in ogni caso quelle che regolavano il pensiero matematico. Senza rinnegare i passi compiuti nel campo che hanno consentito gli sviluppi di questi ambiti, Longo ci propone, al contrario di vedere e di trovare nello sviluppo della pratica e delle strutture matematiche stesse, elementi essenziali che permettano la caratterizzazione e l'analisi oggettiva del soggetto cognitivo. Egli non fonda questa proposizione esclusivamente sul rigore e la capacità di dimostrazione matematici (prevalenza dei principi di prova), bensì egualmente sulla stabilità concettuale che essi autorizzano e, contemporaneamente, sulla loro capacità di tematizzare e categorizzare oggettivamente i rapporti quasi cinestesici ad esperienze così primitive come quelle associate al movimento, allo spazio, all'ordine (ruolo dei principi di costruzione). Al di là delle spontanee comprensioni dei linguaggi (di cui si sa che variano a seconda delle culture e delle civiltà), le indagini che partono dall'analisi dei "comportamenti" e gli approcci matematici permetterebbero, in qualche modo, di stabilizzare astraendole, di oggettivare universalizzandole, queste esperienze ed intuizioni e di far, in tal modo, uscire alla luce del sole gli impulsi più profondi che le animano.

REFERENCES

(Des versions préliminaires ou revues des articles de Longo sont "téléchargeables" de http://www.di.ens.fr/users/longo).

Asperti A., Longo G. **Categories, Types and Structures**, M.I.T. Press, 1991

Badiou A. **Le Nombre et les nombres**, Seuil, 1990

Bailly F. "*Construction d'objectivité et statut de l'objet-scientifique en physique*", **La Nuova Critica**, **36**, 2000

Bailly F. "*About the emergence of invariances in physics : from "substantial" conservation to formal invariance*", **in Quantum Mechanics, Mathematics, Cognition and Action**, (M. Mugur-Schächter and A. van der Merwe, Eds.), Kluwer 2002

Bailly F. "Invariances, symétries et brisures de symétrie" , to appear in **"New Interactions of Mathematics with Natural Sciences"** (L. Boi ed.), Springer, 2003

Bailly F. "*Le "concept-scientifique" reste-t-il toujours un "concept" ?*" **La Nuova Critica** (à paraître)

Bailly F., Longo G. "*Space, Time and Cognition: From The Standpoint of Mathematics and Natural Sciences*" *in* **Mind and Causality**, (Peruzzi ed.), Benjamins, Amsterdam, pp. 149-199, 2004 (version française à paraître dans la **Revue de Synthèse,** Paris, n. 1, 2004).

Bailly F., Longo G. "*Objective and Epistemic Complexity in Biology*" Invited lecture, Proceedings of the International Conference on **Theoretical Neurobiology**, (N. D. Singh, ed.), National Brain Research Centre, New Delhi, INDIA , 2003, pp. 62 - 79.

Bailly F., Longo G. "*Incomplétude et incertitude en mathématiques et en physique*", actes du colloque **Il pensiero filosofico di Giulio Preti**, (Parrini, Scarantino eds.), Guerrini ed associati, Milano, 2004, pp. 305 - 340 (réimpression en cours aux actes du colloque en mémoire de **Gilles Châtelet**, Presse de rue d'Ulm, Paris, 2005).

Bell J. **A Primer in Infinitesimal Analysis**, Cambridge U.P., 1998

Berthoz A. **Le sens du mouvement**, Od. Jacob, 1997

Bitbol M. **L'aveuglante proximité du réel**, Flammarion 2000

Brouwer L. "*Consciousness, Philosophy and Mathematics*", 1948, *in* **Collected Works** vol. 1 (Heyting ed.), North Holland, 1975

Chaline J. **Les horloges du vivant**, Hachette 1999

van Dalen D. "*Brouwer's dogma of languageless mathematics and its role in his writings*" **Significs, Mathematics and Semiotics** (Heijerman ed.), Amsterdam, 1991

Feferman, S. "*Weyl Vindicated: "Das Kontinuum" 70 Years Later*", **Proceedings of the Cesena Conference in Logic and Philosophy of Science**, 1987

Follesdal D. "Gödel and Husserl", in : **Naturalizing Phenomenology** (J. Petitot, F. Varela, B. Pachoud, J-M. Roy, Eds.) Stanford University Press 1999

van Fraassen B. **Lois et symétrie**, Vrin 1994

Frege G. **The Foundations of Arithmetic**, 1884 (english transl. Evanston, 1980)

Girard J.-Y. "*Linear Logic*" **Theoretical Comp. Sci.**, 50 (1-102), 1987

Girard J.-Y. "*Locus Solum*"**,** *Special issue,* **Mathematical Structures in Computer Science**, Cambridge U.P., vol.11, n.3, 2001

Gödel K. *"Russell's mathematical logic"* in **The philosophy of B. Russell** (Schlipp ed.), 1944; reprinted in **Philosophy of mathematics; selected readings** (Benacerraf, Putnam, eds), Prentice-Hall, 1964

Gödel K. *"What is Cantor's Continuum Problem?",* **Amer. Math. Monthly**, 54, 1947; reprinted in **Philosophy of mathematics; selected readings** (Benacerraf, Putnam, eds), Prentice-Hall, 1964

Heath T.L. **The Thirteen Books of Euclid's Elements**, Cambridge Univ. Press, 1908

Husserl E. **L'origine de la Géométrie**, 1933 (trad. fran. PUF, 1962)

Husserl E. **Erste Philosophie,** M. Nijhoff, 1956 (trad. it. G. Piana, Guerini, Milano, 1989)

Johnstone P. **Topos Theory**. Academic Press, 1977.

Lambek J., Scott P.J. **Introduction to higher order categorical logic**, Cambridge University Press 1986

Lobachevskij N. **Nouveaux principes de la Géométrie**, 1856

Longo G.. "*Some aspects of impredicativity: Weyl's philosophy of mathematics and today's Type Theory*" in **Logic Colloquium 87** (European Summer Meeting of the A.S.L.), pp. 241--274. Invited Lecture (Ebbinghaus et al., eds). North-Holland, 1989

Longo G. "*De la cognition à la géométrie*", **Intellectica** n°**25**, 1997

Longo G. "*The Mathematical Continuum, from Intuition to Logic*" in : **Naturalizing Phenomenology** (J. Petitot, F. Varela, B. Pachoud, J-M. Roy, Eds.) Stanford University Press 1999

Longo G. "*Mathematical Intelligence, Infinity and Machines : beyond the Gödelitis*", **Journal of Consciousness Studies**, vol.**6**, n°11-12, 1999b

Longo G. "*Mémoire et objectivité en mathématiques*" in : **Le réel en mathématiques**, Colloque de Cerisy, 1999 ; (P. Cartier et N. Charrauds Eds.), 2003.

Longo G. "*Cercles vicieux, Mathématiques et formalisations logiques*". Conférence Invitée, parue dans **Mathématiques, Informatique et Sciences Humaines**, n. 152, 2000.

Longo G. "*On the proofs of some formally unprovable propositions and Prototype Proofs in Type Theory*" Invited Lecture, **Types for Proofs and Programs**, Durham, (GB), Dec. 2000; **Lecture Notes in Computer Science**, vol 2277

(Callaghan et al. eds), pp. 160 - 180, Springer, 2002.

Longo G. "*The Constructed Objectivity of Mathematics and the Cognitive Subject*", *in* **Quantum Mechanics, Mathematics, Cognition and Action** (M. Mugur-Schachter ed.), Kluwer, 2002a.

Longo G. "*Laplace, Turing and the "imitation game" impossible geometry: randomness, determinism and programs in Turing's test*". Invited lecture, **Conference on Cognition, Meaning and Complexity**, Univ. Roma II, June 2002. (version française , **Intellectica**, n. 35/2, 2002b).

Longo G. "*The reasonable effectiveness of Mathematics and its Cognitive roots*", to appear in **"New Interactions of Mathematics with Natural Sciences"** (L. Boi ed.), Springer, 2004.

Manacosu P., T. Ryckman, "*Mathematics and Phenomenology. The correspondence between Oskar Becker and Hermann Weyl*", **Philosophia Mathematica** vol. 10, pp. 130-202, 2002.

Parrini P. **Conoscenza e Realta'**, Laterza, 1995.

Riemann B. **On the hypothesis which lie at the basis of Geometry,** 1854 (english transl. by W. Clifford, **Nature**, 1873.

Salanskis J-M. **L'herméneutique formelle**, Ed. CNRS 1991.

Tonietti T. L. "*Four letters of E. Husserl to H. Weyl and their context*" *in* **Exact Sciences and their philosophical foundations**, Peter Lang, Frankfurt, 1988

Wang H. **Reflections on Kurt Gödel**, M.I.T. Press, 1987

Varela F. **Autonomie et connaissance**, Seuil 1989

Verlet L. **La malle de Newton**, Gallimard 1993

Weyl H. **Das Kontinuum**, 1918

Weyl H. **Raum, Zeit, Materie**, 1918b

Weyl H. **Philosophy of Mathematics and of Natural Sciences**, 1927 (english transl., Princeton University Press, 1949).