COMPLEXITE ET STRUCTURES CONCEPTUELLES :
A PARTIR DU DISCRET ET DU CONTINU MATHEMATIQUES
Les rapports inter-théoriques comme lieu de la signification, et la question de l'expérience[1]

Boris SAULNIER[*] & Giuseppe LONGO[**]
CNRS – ENS et CREA, Paris

1. La biologie et la profusion des modèles

Pour comprendre la complexité du vivant, l'analyser, le rendre *intelligible*, de nombreux modèles sont proposés. On parle ici de *modèle* au sens dans un sens général, sans plus de précision : se donner un modèle consiste en général à définir des *objets*, *opérations*, *propriétés*, *concepts*, à les représenter et à les manipuler mathématiquement[1]. Il existe même des modélisateurs, et on trouve dans leur matériel des outils aussi divers que :

- des *systèmes dynamiques*, à temps continu ou discret, dans des espaces continus ou discrets, topologiques ou mesurés ;
- des automates, éventuellement asynchrones, non uniformes ou probabilistes ;
- des systèmes conservatifs ou bien dissipatifs ;
- des modèles basés sur des *opérations* : fonctions, opérateurs, règles de récriture ;
- des modèles basés sur des *propriétés* comme l'invariance d'échelle et l'universalité, la criticalité, la stabilité structurelle, l'autopoïèse, la clôture sous causalité efficiente, la complexité algorithmique, la terminaison (d'un calcul), la convergence, la minimisation d'une fonction de potentiel;
- des systèmes constitués de particules, ou bien de gènes, de molécules d'ARN, de protéines ;
- des méthodes d'analyse statistique (clustering, essaims particulaires, programmation génétique, analyse bayésienne, réseaux neuronaux) d'immenses bases de données issues du séquençage ou la reconstruction de dynamiques à partir de séries temporelles…

Face à une telle profusion d'outils, on comprend la remarque de Thom : « (…) étant donnée n'importe quelle phénoménologie, on peut toujours construire un modèle qui la décrit »[2]. Et ce d'autant plus qu'un modèle participe pour une bonne part de ce qu'on connaît et comprend : que savoir du chaos, par exemple, sans un modèle du chaos ?

2. Structure causale des modèles

Nous voudrions montrer ici que chaque type de modèle propose un *regard*, une *organisation du monde*, et qu'un même phénomène peut admettre plusieurs modèles dont les *structures causales diffèrent.* En conséquence, un modèle peut parfois *imiter*, correctement d'un certain point de vue, le phénomène étudié, sans pour en autant capturer la structure causale. On expose quelques cas où se manifeste une différence de structure causale.

2.1 Déterminisme n'implique pas approximation finie effective

Premier exemple : Laplace considère une intelligence « parfaite » qui connaîtrait le monde point par point. Il s'agit là du point d'Euclide, sans dimension, du point de Cantor des réels. Il considère en outre une évolution donnée par un système d'équations différentielles. Le système est ainsi défini d'une façon très précise (il est déterminé par un système d'équations) : un être infini pourrait, dit-il fort justement, en connaître toute évolution future. Se posant la question de la stabilité du système solaire, question déjà envisagée par Newton, Laplace amorce le calcul des perturbations et l'analyse variationnelle, annonciateurs de la grande Analyse du 19ème siècle. Il conjecture alors que le déterminisme du système et de sa dynamique implique la prédictibilité, moyennant deux hypothèses : d'une part, le fait que, dans

---

[1] Conférence invitée aux Actes du Colloque "Intelligence de la complexité", Cérisy, Juin 2006, (Le Moigne, Morin, eds.), Editions de l'aube, Paris, 2007.

ce cas, de petites perturbations ne vont pas faire une grande différence (penser par exemple à une bille roulant au fond d'une vallée); d'autre part, le fait que les points critiques, pour lesquels précisément une petite variation de position entraîne des conséquences importantes (penser à une bille au sommet d'une montagne), sont rares.

C'est Poincaré qui montrera que cette conjecture est fausse : l'erreur est de dire que les fluctuations en dessous du niveau de la mesure restent, grosso-modo, en dessous de ce niveau. Le système des trois corps, défini par 9 équations, est non intégrable : il n'admet pas de solution simple, ni de solution analytique. Précisément, Poincaré remarque que les petits diviseurs font diverger les séries de Lindstedt-Fourier.

Dit autrement, le système défini est bien déterministe : cela signifie que les équations déterminent de façon absolue l'évolution de tout point, et ce pour un temps infini dans le passé ou le futur.

Mais, si on considère l'évolution d'un *intervalle*, et non pas d'un point, la situation est nettement moins favorable. En effet les points de l'intervalle, aussi petit que soit cet intervalle, vont connaître des évolutions radicalement différentes : c'est la propriété de « sensibilité aux conditions initiales ». Prenez deux points quelconques de l'intervalle : il est impossible d'avoir une idée approchée de l'évolution de l'un à partir du calcul de l'évolution de l'autre, aussi proches que soient ces deux points. Autrement dit l'approximation du système n'est pas possible. Or prédire implique de mesurer, et cette mesure est une approximation, ne serait-ce qu'à cause du phénomène physique de fluctuation thermique. Et prédire implique également de calculer, ce qui implique également une approximation, puisque nous n'avons pas de représentation effective des réels. En conséquence un système sensible aux conditions initiales peut être à la fois déterministe et imprédictible.

Ce qui change de Laplace à Poincaré, c'est la découverte du phénomène de chaos : le fait qu'une approximation peut ne pas être conservée lors d'une évolution. Avec Poincaré on découvre que pour, certains systèmes, il n'y a *pas d'approximation finie effective* : aussi fine soit la résolution de nos instruments d'observation et de mesure, le découpage de l'espace des états en cellules d'une taille correspondante ne permettra pas le calcul de l'évolution de ces cellules. Une représentation approchée par les mathématiques du discret est possible, mais la *structure causale* du système ainsi représenté est *différente* de celle du système représenté par les mathématiques du continu, puisque l'écart entre un point et une quelconque de ses approximations dépassera au bout d'un temps fini tout seuil arbitrairement petit fixé à l'avance. Une moindre perturbation donc *cause* une évolution différente : pour le dire autrement, la variation/fluctuation locale participe de la causalité globale, *modifie* ou spécifie selon ses valeurs ce qui est *imposé* par la détermination formelle[3].

Turing, dès 1952, a parfaitement compris ce point : dans une machine à états discrets il est toujours possible de prédire les états futurs[4]. Il n'y a pas de sensibilité aux conditions initiales, dans la machine à états discrets, car l'accès aux données est absolu et exact. Il n'y a pas de notion de niveau de l'observation, et rien ne se passe en dessous d'un niveau de l'observable (la structure digitale/discrète). Pour cette raison il voit dans sa machine une *imitation* possible pour le cerveau, et non pas un modèle, car la structure causale est différente. Et il commence alors à travailler sur la morphogenèse : il définit, dans les mathématiques du continu, un système de réaction-diffusion, non linéaire, fortement sensible aux conditions initiales. Il appelle cette propriété l' « exponential drift » et il la considère comme une richesse de son système : des petites variations vont pouvoir engendrer des évolutions - des formes - différentes[5], voilà l'intérêt de son analyse mathématique de la morphogenèse (pour plus sur ces thèmes, voir [Longo, 2002]).

2.2 Géométries non euclidienne: le local diffère du global

Deuxième exemple : la géométrie. La géométrie de Euclide, Descartes, Newton est absolue. Toutes les échelles ont les mêmes propriétés : par exemple, un résultat démontré sur un triangle sera vrai que le triangle soit de la taille des atomes ou bien des étoiles. Or ce n'est pas le cas pour les espaces physiques de Riemann ou Einstein : ils ne sont pas « clos par homothétie » (Klein). Il n'y a donc plus homogénéité de l'espace : les déformations locales sont corrélées aux forces cohésives entre les corps. L'espace physique (géométrie non euclidienne) n'est plus identifiable à l'espace sensible (géométrie euclidienne).

On peut donc dire que les géométries d'Euclide et de Riemann nous proposent un regard différent de l'espace physique. Il en suit donc de que aussi leurs structures causales sont différentes : elle est implicitement donnée chez Newton (la mystérieuse force instantanée d'attraction dans l'espace absolu, sans courbure, qui *cause* le mouvement – l'accélération) ; elle est explicite chez Einstein (et en fait depuis Riemann) : la courbure de l'espace est corrélée causalement aux forces cohésives entre le corps (l'intuition de Riemann) et celles-ci sont a comprendre, d'une façon unifiée, comme inertie *et* gravitation (Einstein).

2.3 Le concept de nombre ne se réduit pas à l'arithmétique en tant que système logique

Troisième exemple : la théorie des nombres. A la fin du $19^{ème}$ siècle, il y a en mathématiques un besoin de certitude, résultant des paradoxes, et du fait que, avec les géométries non euclidiennes, notre rapport à l'espace perd son aspect intuitif et sûr. Avec Frege, l'idée est de chercher la certitude dans l'élémentaire et simple : l'arithmétique et ses nombres entiers. L'idée de Frege c'est que l'arithmétique, en tant que système logique, est *catégorique*, c'est-à-dire qu'elle coïncide avec la théorie des nombres (en termes modernes : tous ses modèles sont isomorphes). Quant à Hilbert, il encode de façon conservative la géométrie dans l'arithmétique (1899), de telle sorte que la cohérence de l'arithmétique prouverait la cohérence de la géométrie. Reste alors à montrer par des moyens arithmétiques la cohérence de l'arithmétique (conjecture de 1900), mais Gödel réfute cette possibilité (1931).

On peut interpréter le deuxième théorème d'incomplétude de Gödel comme résultant d'un décalage entre les principes de construction et les principes de preuve au sein de l'arithmétique[6]. Dit autrement, l'arithmétique en tant que système logique ne capture pas complètement notre rapport aux nombres entiers. On propose de dire dans ce cas que le domaine conceptuel constitué par l'arithmétique comme système logique diffère du domaine conceptuel des nombres entiers (notamment du point de vue de notre rapport géométrique à ce domaine) : en un sens, très particulier, on peut dire qu'on a là deux structures causales différentes.

2.4 Machine logique et géométrisation de la physique

Quatrième exemple : cadre logique et cadre géométrique. Boole et Frege *arithmétisent* la logique et *logicisent* l'arithmétique, respectivement, ce qui se poursuit par l'élaboration des langages formels, logiques et de programmation. L'idée est de dire qu'il y a des lois de la pensée, qu'on peut les écrire dans un langage, et fabriquer des machines qui appliquent ces lois. L'idée se confirme que la nature, comme la machine, suit la règle. La règle logique est règle arithmétique (l'induction arithmétique, cœur de la logique de fregéenne). Le discret arithmétisant se pose à la base des fondements des mathématiques et, en fait, à la source de la connaissance. Quid du continu ?

> « De Leibniz à newton et Riemann, le continu phénoménal avec son infini et ses limites en acte est au cœur de la construction mathématique, du calcul infinitésimal à la géométrie différentielle. (…) toutefois une représentation finie, approximée, mais « effective « devrait être possible. C'est le rêve, implicte dans la conjoncture de Laplace, qui trouvera son prolongement dans la philosophie fondationnelle des formalismes arithmétisant. »[7]

Autrement dit, l'espace, le temps, et les mathématiques du continu qui vont avec, n'entrent pas en jeu dans la machine logique, machine discrète par excellence, depuis Boole et Frege, Churche et Turing. Mais la physique et ses fondements, en même temps que se développe l'idée d'ordinateur, suivent un mouvement de géométrisation, bien éloigné de l'arithmétisation des fondements des mathématiques. La forme de l'accès (la mesure) est prise en compte ; on représente les évolutions sous formes de géodésiques (des vallées dans des paysages) ; certaines transformations préserveront des invariants (symétries). Viennent alors les équations, très importantes, qui permettent d'expliciter le cadre formel, mais qui restent de nature *globale*, et donc causalement incomplètes, puisque la fluctuation est de nature *locale*. La causalité lue de façon géométrique, ses pics, ses vallées, ses paysages, changent le regard sur le monde, et présentent une vision différente de celle en terme d'une règle qui *viendrait d'abord*. Des grands principes géodésiques, des symétries, en physique, remplacent la loi normative, la règle en amont du monde.

3. Structure discrète et topologie continue : la question de la répétabilité

De fait la machine est prédictible, car parfaitement *itérable*. La machine arithmétique-logique est une machine à itérer. La structure discrète permet de redémarrer exactement sur une même valeur, alors que dans une topologie continue, il n'y a pas de borne à l'approximation. Et quand on relance deux fois un générateur aléatoire sur une machine logique, on obtient deux fois la même suite de valeurs : la suite n'est que *pseudo-aléatoire*, parce que la machine logique est hors du temps et de l'espace physique, hors des mathématiques du continu qui en garantissent, jusqu'à présent, l'intelligibilité géométrique.

3.1 Imprédictibilité calculatoire, « calculabilité relative »

De plus, plutôt que de parler d'un système « déterministe imprédictible », on pourrait plus précisément employer les expressions *mathématiquement déterministe et chaotique*, *calculatoirement imprédictible*, voire *calculatoirement non absolument prédictible*. En effet notre capacité de prédiction est relative à la précision de la mesure initiale et à l'erreur de prédiction maximale qu'on s'autorise. Quand on parle d'*imprédictibilité*, dans l'absolu, on désigne une notion qui ne se comprend que dans la relation entre la représentation continue et la représentation discrète : en quelque sorte c'est une notion *mixte*. Par contre la notion de *calculabilité relative* reste circonscriptible à la représentation discrète.

3.2 Imprédictibilité physique et répétabilité

Qu'en est-il alors du système physique ? Considérons un double pendule, dont la représentation mathématique est un système chaotique. Si on mesure, à l'aide d'une caméra à résolution spatiale et temporelle suffisamment fine, le mouvement initial d'un double pendule, on sera en mesure de prédire la trajectoire suivie pendant un temps limité. Mais en réalité ce qu'on appelle système physique ici est plutôt une représentation mathématique. Et la *caméra* réalise une opération mathématique de *discrétisation* : elle transforme une représentation continue en une représentation discrète, dont les éléments sont des couples de fractions décimales. Et la propriété d'imprédictibilité résulte à la fois de la propriété de chaoticité du système continu, et de cette opération de discrétisation. Le double pendule et la caméra sont bien des objets matériels, mais tout ce qu'on peut en dire, du point de vue du chaos et de la prédictibilité, tient dans leur représentation mathématique.

L'ordinateur aussi est un système matériel. Mais la théorie physique que nous avons des transistors, exprimée dans les mathématiques du continu, nous permet de comprendre pourquoi la représentation logique booléenne de leur comportement normal est satisfaisante. Et on sait que dans certains conditions, par exemple une fréquence trop élevée du processeur, ou bien un voltage trop faible, le transistor n'aura plus la réponse attendue : l'ordinateur deviendra un objet matériel au comportement bien différent de celui de la machine logique (et en général très difficile à calculer).

Considérons la bille dans la vallée, soumise à des *fluctuations thermiques*, expression par laquelle on indique qu'on décide qu'il n'est pas possible de replacer exactement la bille au même endroit, ou encore que la représentation adaptée de la position est un intervalle. On sait malgré tout que l'approximation sera conservée. La représentation permet une prédictibilité absolue, et donc, en un sens l'idée de redémarrer dans la même position initiale a un sens. Dans ce cas on pourrait raisonner à partir de la représentation continue, car on montre que l'approximation discrète est satisfaisante.

Prenons maintenant la bille au sommet d'une colline, soumise à des *fluctuations thermiques*. On sait alors que dans cette situation la représentation en termes d'intervalle ne permet pas la prédictibilité. D'un point de vue mathématique, il n'importe pas de savoir si la nécessité d'une représentation en termes d'intervalle vient de l'incapacité pratique de l'expérimentateur, ou bien d'aspects non maîtrisables de l'environnement : seule compte la démonstration que la dynamique va accroître la taille de l'intervalle au-delà d'un seuil donné, quelle que soit la taille arbitrairement petite de cet intervalle.

Ce qu'on montre sur ces exemples très simples, c'est que la discussion de notions comme le hasard, la fluctuation, le chaos, la prédictibilité, le déterminisme, n'a de sens que dans une structure conceptuelle donnée. *L'ambiguïté* dans la discussion résulte d'une *position intermédiaire non explicitée* entre deux structures conceptuelles.

4. Structure conceptuelle

Mais qu'est-ce alors qu'une *structure conceptuelle* ? On a jusqu'ici utilisé les expressions « modèle », « structure causale », « regard », « organisation du monde » et enfin structure conceptuelle, sans plus préciser ce qu'on entend par là. On pourrait en fait construire une foule d'expressions, en choisissant

un terme parmi [*cadre, structure, construction, outil, regard*] et en l'apposant à un parmi [*conceptuel(le), de connaissance, de détermination, théorique, causal(e), mental(e), d'objectivité, d'idées*].
On propose pour l'instant de s'en tenir à l'expression *structure conceptuelle*. On n'essaye pas pour l'instant de plus préciser : un peu comme face à un objet en théorie des catégories, on préfère s'intéresser à *ce qu'on peut faire* avec une structure conceptuelle, plutôt qu'à sa substance.
Jusqu'ici, on a montré sur des exemples, que plusieurs structures conceptuelles pouvaient être candidates pour rendre compte d'un même phénomène. On a vu également que deux structures pouvaient être partiellement compatibles, au sens où certaines notions sont traductibles d'une structure dans l'autre (l'intervalle rationnel est traductible dans les réels), alors que d'autres ne le sont pas (le point réel n'est pas traductible dans les rationnels sans utiliser une lourde machinerie). Il y a également le cas où une notion émerge entre deux structures : par exemple le déterminisme imprédictible a l'apparence d'une notion mixte. On le voit, on pense pour l'instant plutôt à des fragments de théorie mathématique.
On voudrait développer l'idée que ce dernier cas, émergence d'une notion entre deux cadres conceptuels établis, est en réalité paradigmatique du processus de constitution et d'évolution des mathématiques ; on voudrait aussi montrer que c'est le cas plus généralement de tout processus d'élaboration conceptuelle. Et enfin, dans une perspective de réalisme structural, juste esquisser, pour le moment, l'idée que cette émergence dans la relation est également au cœur de toute morphogenèse, c'est-à-dire de la structuration du rapport entre le local et le global.

4.1 Relativité de la non contradiction

On se place à nouveau dans les mathématiques, où on donne un nouvel exemple de *concept interthéorique* : la non-contradiction. Les interprétations diffèrent. Pour nous, la non-contradiction de la théorie des ensembles est avérée (preuve par Girard de la normalisation du système F), mais relative à la donnée de principes de preuves et de construction. La position de Krivine est différente[8], et ce sont là deux conceptions de la logique qui s'affrontent : d'un côté une conception qualifiée par J.-Y. Girard d'*existentialiste*, qui met l'accent sur le calcul, et les opérations qu'on peut réaliser, jusqu'aux principes de preuve et de construction auxquels nous faisions référence plus haut ; de l'autre côté une conception *essentialiste*, qui suppose l'existence de modèles. Mais dans les deux cas, la propriété de non-contradiction est bien là : et elle est, irréductiblement, *relative*. C'est un exemple de concept qui émerge dans le rapport relatif des structures conceptuelles (rapport entre principes de preuve et principes de construction, ou bien rapport entre le modèle de la théorie de Zermelo-Fraenkel et le modèle des nouveaux axiomes). C'est-à-dire qu'on n'a pas une notion absolue de non-contradiction.
Comme dans le cas de l'imprédictibilité, la non-contradiction vient marquer l'autonomie relative de deux domaines conceptuels.
Bien évidemment, cela ne nous mène pas à une conception *relativiste*, pour laquelle *tout irait bien*, ni à une vision du savoir qui serait *sans fondement* aucun, ni origine possible. Il n'y a sûrement pas de fondement, dans le sens absolu des logicistes, origine ou socle définitifs de certitude, mais des renvois à une histoire constitutive possible, jamais définitive ni avec une strate ultime à atteindre une fois pour toutes. Et le *fondement*, qui relativise toujours à un parcours évolutif et historique, serait dans *cette analyse même* des pratiques, gestes, actions, cultures symboliques et constructions conceptuelles dans l'histoire, qui ont produit notre humanité.
D'une part, donc, notre approche est relativisante et non pas relativiste ; c'est-à-dire, nous relativisons toute construction à son cadre de référence, à son système de mesure *à expliciter chaque fois* et dont les principes seront toujours sujet à jugement, à révision, bien motivée, si nécessaire (voir l'approche de Weyl, empruntée à la Relativité einsteinienne et repris dans [Bailly, Longo, 2006]). D'autre part, nous considérons que toute *constitution est contingente* ; c'est-à-dire, que toute construction pratique et conceptuelle, de l'intuition humaine (voir ci-dessous) aux concepts mathématiques, est le résultat d'un parcours constitutif qui s'enracine sur une histoire où les invariants (pratiques et conceptuels) dérivent de la friction spécifique avec ce monde, le monde de nos activités. C'est justement pour cette raison que, dans notre vision, les mathématiques sont *efficaces* et *objectives*, et cela d'une façon tout à fait raisonnable : elles le sont justement puisqu'elles sont contingentes, c'est-à-dire elles résultent de notre action/friction dans et sur ce même monde dont elles sont censées parler.

4.2 Encodage de la géométrie

Autre exemple : on emploie l'expression « encodage conservatif », dans un sens qui semble absolu, alors qu'il est relatif. Par exemple l'encodage d'une image sera dit conservatif si, *relativement* à certaines propriétés particulières de l'image, la distinction entre l'image d'origine et l'image encodée n'est pas possible. L'objet est transformé par encodage, il est traduit, certaines propriétés sont conservées, alors que d'autres ne le sont pas.

De la même façon, si on parle d'encodage conservatif de la géométrie dans l'arithmétique par Hilbert, c'est uniquement relativement à la propriété de cohérence. On pourrait croire qu'il y a LA géométrie, et qu'une fois encodée elle se trouve *réduite* à l'arithmétique.

Pour autant, la formalisation de la géométrie dans un assistant de preuve n'est pas si simple. En particulier, l'axiomatique de Hilbert, considérée comme *complète* et *minimale*, n'est pas constructive, au sens de la logique constructive. La formalisation dans un assistant de preuve doit ainsi révéler clairement les aspects non constructifs des théorèmes. Des axiomatiques constructives ont été proposées[9], mais il est difficile d'énoncer une axiomatique complète et minimale, ce que révèle le nombre des différentes éditions des *Fondements de la géométrie* de Hilbert. Aujourd'hui on n'a pas une axiomatique constructive qui nous permettrait de prouver formellement l'indépendance et la compatibilité des axiomes, ainsi que l'équivalence, classique, des axiomatiques constructives et classiques.

4.3 Le nombre comme construction conceptuelle

Considérons maintenant l'exemple du nombre π, nombre qu'on peut voir en fait comme un concept, voire une structure conceptuelle. En effet, il y a le nombre défini par le rapport des longueurs d'un cercle et d'un diamètre ; c'est une position sur la droite réelle ; c'est aussi la limite de telle ou telle suite numérique. Parler du *même* nombre π signifie qu'on possède des démonstrations qui permettent de **passer** de l'une à l'autre de ces propriétés. Comme le dit Wallet :

> « Autrement dit, il n'y a pas un nombre π « trônant seul dans la solitude « dont on découvrirait peu à peu les propriétés, mais plutôt un concept évolutif de π, s'enrichissant peu à peu par le travail créatif des mathématiciens et dépendant étroitement de ce que les hommes sont prêts à accepter comme constituant une « réelle » démonstration. (…) si le nombre π ne renvoie à aucune réalité indépendante et préexistante, cela ne veut pas dire qu'il n'a pas de sens ou qu'il est arbitraire. Ce nombre, comme tout objet mathématique, a un authentique contenu sémantique : c'est tout ce que nous savons actuellement sur lui et tout ce que nous pouvons faire avec lui. »[10]

Nous souscrivons donc à cette approche pragmatique, qui ne dissocie pas la connaissance et les moyens d'enquête, et qui trouve la signification d'un concept dans l'ensemble de ses conséquences pratiques. L'objectivité et le contenu d'un concept sont dans sa *pratique* ou ils se construisent en le pratiquant. Un nombre comme π, dont la *transcendance* (il n'est pas solution d'une équation algébrique) a posé si longtemps problème, n'est qu'un cas extrême, par sa complexité, de construction qui organise le monde, par nos gestes circulaires et carrés, par des concepts qui ont à leur tour leur propre générativité. Ces concepts engendrent des nouveaux concepts, par des pratiques qui superposent cohérence logique et gestes géométriques (la limite d'une méthode de quadrature).

5. Ambiguïté, univocité et changements de cadre : au cœur de la générativité mathématique

R. Douady[11] a thématisé en didactique des mathématiques, l'idée de « changement de cadres ». Il s'agit de dire qu'une part importante du travail du mathématicien consiste, pour résoudre les problèmes, à changer de point de vue, à les formuler autrement, à les *transporter* d'un cadre dans un autre. Un cadre est constitué des objets d'une branche des mathématiques (algèbre, topologie, géométrie, arithmétique), des *relations* entre les objets, de leurs formulations et des images mentales associées à ces objets et ces relations. Deux cadres peuvent comporter les mêmes objets et différer par les images mentales et la problématique développée. La familiarité, l'expérience peuvent conduire à des conflits entre ce que l'on attend et ce qui se produit effectivement, ces conflits contribuent à renouveler les images ou à les faire évoluer. La notion de cadre est une notion dynamique. Les *traductions* d'un cadre dans un autre aboutissent souvent à des résultats non connus, à des techniques nouvelles, à la création d'objets mathématiques nouveaux.

Poincaré a résumé cette idée en une phrase : « Les mathématiques sont l'art de donner un même nom à des choses différentes ». Et on comprend aisément que, en fait, les *choses* sont *mêmes* uniquement sous un certain angle. Le catégoricien R. Guitart[12] a donné un nom, la *pulsation*, à cette capacité mentale développée par le mathématicien, d'apparence paradoxale, à *fixer* un objet, car la définition mathématique est très précise et rigoureuse, tout en développant une vision nouvelle du même objet.
Ainsi, si le catégoricien travaille d'abord à isomorphisme près, s'intéressant à des propriétés qui justement ne dépendent pas de ces isomorphismes, il se peut que dans un deuxième temps il ne soit plus possible de négliger ces isomorphismes.
On peut donc considérer qu'une certaine forme d'ambiguïté est au cœur de la générativité mathématique, en apparente contradiction avec l'image habituelle de rigueur de la discipline.
Sur ce point, la polyvalence des termes, tout mathématiques et spécialisés qu'ils puissent être, est corroborée par Krivine qui commente les rapports entre les modèles dans la théorie des ensembles et leur contenu proprement mathématique : « (…) comme le vocabulaire mathématique ne possède pas deux noms différents pour chaque notion, on est contraint d'utiliser dans le modèle les mots courants du langage mathématique, évidemment dans un sens tout différent de leur sens habituel (l'exemple classique de ce phénomène est le «paradoxe de Skolem» qui provient du nouveau sens que prend le mot «dénombrable» quand on l'interprète dans un modèle de la théorie des ensembles) »[13].

6. Réduction, relations inter-théoriques : une question fort débattue

De fait, la question des relations entre théories, la question de la réduction théorique, sont des questions fort débattues, en philosophie des sciences, mais également dans les sciences.
En ce qui concerne la biologie, il y a la question du rapport entre génétique moléculaire et génétique classique. Ou encore le rapport entre théorie des états mentaux et états cérébraux. La distinction dans ce cadre entre réduction logique et réduction fonctionnelle, les questions de l'émergence, de la survenance, de la causalité descendante, de la réalisabilité multiple. Ainsi la philosophie de l'esprit a beaucoup développé la question des réductions inter-théoriques[14].
En physique il y a question de la réduction de la thermodynamique à la physique statistique, ou la question du rapport entre mécanique quantique et relativité générale.
En ce qui concerne les mathématiques, il y a eu la question de la réduction des mathématiques à la logique ; puis la discussion du rôle particulier de la théorie des catégories, comme outil de mise en relation des domaines mathématiques.
Pour l'épistémologie, le schéma de réduction de Nagel, sur la base du modèle déductif nomologique de Hempel, devait permettre l'analyse de la structure logique des théories, de la signification des termes théoriques, de la valeur explicative des démonstrations scientifiques, ou encore de la nature du progrès dans les sciences. Plus récemment, on peut faire mention des travaux de Lawrence Sklar[15] (à propos des types de réduction), Batterman[16] (à propos des relations interthéoriques en physique), Nickles[17], Wimsatt[18], Schaffner[19], Rosenberg, Kim[20], le programme des structures partielles de Da Costa et French[21], W. Farmer (représentation informatique des connaissances mathématiques et connexion des sytèmes mathématiques), la théorie du « blending » (intégration conceptuelle) de Fauconnier et Turner[22] en sémantique cognitive…
Derrière ces travaux, on peut certainement voir un désir douteux de grande unification, et ressentir une méfiance pour ces approches générales d savoir en général. Mais pourquoi rejeter *a priori* une tentative de comprendre la façon dont s'élaborent et s'agencent nos constructions conceptuelles ?

Une partie essentielle de la question se trouve dans le rapport *théorie* et *expérience*. Il s'agit de savoir si le double pendule, la caméra, la bille sur la colline que nous avons évoqués plus haut, ou encore un dé qui roule sur une table[23], sont plus pour nous que des représentations mathématiques. Parler de *structure causale* (d'une théorie), et de son *accord* avec la structure causale (d'un phénomène), c'est faire une hypothèse sur le rapport entre théorie et expérience. Or les mathématiques, comme toute structure conceptuelle, ne sont pas isolées de l'expérience.

7. Rôle de l'entre-expression des théories mathématiques, et rapport à la physique

Petitot et Bailly[24] mettent en clairement le rôle de ce qu'ils appellent l'*entre-expression* dans la signification mathématique, en accord avec ce que nous avons déjà indiqué : « En mathématiques la question de la signification apparaît également avec celle de l'intertextualité (l'intertraduction, l'entre-expression des théories). Les théories sont capables de s'interpréter mutuellement et de se traduire partiellement les unes dans les autres ; comme les mythes, elles 'se parlent entre elles' »
Dans le même article, les auteurs suggèrent la possibilité d'avoir des théories *physiquement équivalentes*, mais *non formellement équivalentes*[25]. Ils considèrent en effet que « il n'est en général pas possible d'assigner à chaque étape d'un calcul ou d'un raisonnement un répondant physique précis. Les intermédiaires entre hypothèses et conclusions semblent manquer de pertinence opératoire. Il n'y a manifestement pas de rapport bien défini et bi-univoque entre les procédures de déduction mathématique et l'analyse causale physique, entre les opérations du calcul et les interactions entre éléments de réalité ».

7.1 Rapport entre théorie et expérience : le point de vue pragmatique

C'est la question du rapport entre théorie et expérience qui est ici posée, une dualité qu'on peut exprimer sous d'autres formes (rapport entre idéalisme et matérialisme, ou bien entre corps et esprit, ou encore entre états cérébraux et mentaux). On propose de s'appuyer sur des réflexions propres au pragmatisme, dont on s'est déjà réclamé à propos du nombre □ .
Tout d'abord, on retiendra deux idées à la base du pragmatisme :

- la signification d'une proposition est dans ses effets pratiques concevables, que l'on peut envisager par l'intermédiaire des pensées dérivées de cette proposition et qui ne rencontrent aucune *résistance*,
- la proposition demeure *faillible*.

Par définition, donc, la signification pragmatique renvoie à l'ensemble des conséquences pratiques de l'emploi du terme, dans un contexte donné, pour les membres d'une communauté. Les conséquences pratiques peuvent se situer aussi bien sur le plan des actes concrets que sur le plan des idées. L'expression « membres d'une communauté » identifie la signification pragmatique à la signification intersubjectivement partagée.
La notion de « résistance » est évidemment au cœur du problème du rapport entre théorie et expérience. Chez Peirce, la fonction indexicale/déictique des identificateurs (comme « ceci », « cela »), apporte la garantie du contact réel de la perception et l'affection causale du réel. Pour Peirce, il y a deux processus cognitifs d'échange: échange perceptif avec la nature, et échange interprétatif avec la société humaine. La vérité est alors comme une limite dont on s'approche (la séméïosis est infinie), ce qui permet d'arguer qu'il y a chez Peirce une hypothèse, non explicite, d'un monde qui n'est que pré-structuré, hypothèse qui permet l'idée d'unicité tendentielle de la vérité : sa structuration et son sens sont dans la construction publique (commune) de la connaissance.
Chez Quine, les énoncés sont jugés *collectivement* par le tribunal de l'expérience sensible, du fait d'une conception holiste de la signification, avec laquelle nous sommes en accord. Cependant, il faut compter avec l'aspect internaliste de la conception de Quine, pour qui il n'y a d'appréhension qu'à l'intérieur d'une théorie. Il n'y a donc pas de détermination extra-conceptuelle. Un *système conceptuel* correspond à un appareillage référentiel. La référence est non-sens, sauf relativement à un système de coordonnées. Ce à quoi nous faisons référence est déterminé en même temps que nous mettons en place un certain cadre descriptif. Une théorie fonctionne donc comme une grille de lecture, et il n'y a pas d'input indépendant de tout choix conceptuel[26].
Pour James, il s'agit de se dégager des nécessités supposées, pour s'intéresser aux effets corporels ou idéels d'une idée. L'idée doit donc être vue comme un guide pour l'action (mais aussi pour Preti, *rationaliste critique* italien, « une idée est un plan d'action »). La signification d'un énoncé est alors une proposition conditionnelle générale. Par exemple, « un diamant est dur » = « Si (opérations) alors (effets) ». Une idée est vraie si les actions qu'elle nous conduit à effectuer dans la pratique sont couronnées de succès. Le pragmatiste dit ce qu'est la vérité en nous disant comment on y parvient (idée très présente dans le constructivisme et la théorie de la preuve). Bien au delà de Peirce, pour James, le vrai découle du vérifiable, et non pas le contraire. Il faut comprendre par *pratique* ce qui est concrètement déterminé, l'individuel, le particulier et l'efficace, par opposition à l'abstrait, au général, et

à l'inerte[27]. Une idée détermine/guide un déplacement à travers des expériences intermédiaires, vers un terme, et la signification réside dans le chemin parcouru.
James rappelle l'interdépendance des faits et de la théorie, selon ce qui semble être une relation ascendante d'intégration[28]. Les entités théoriques ne sont que des outils pour agir avec succès.
Reste alors la question de l'intersubjectivité. Un pragmatiste pourra considérer que les physiciens peuvent se mettrent d'accord sur ce qu'ils perçoivent parce qu'ils peuvent se mettre d'accord sur les moyens de connaissance. En employant les mêmes moyens de connaissance ils pourront interagir de la même manière avec le monde. Cela n'empêche pas que chaque consensus est relatif, et contingent. Si deux physiciens ont recours aux mêmes moyens de connaissance, aux mêmes procédures expérimentales, et aux mêmes techniques de traitement des événements, ils peuvent établir la même connaissance et arriver à un consensus.
L'incompréhension ne subsiste que si les physiciens se réfèrent à des moyens de connaissance différents ou font intervenir des représentations non vérifiables en pratique. Ils peuvent examiner leur moyens de connaissance et expliciter leurs différences.

7.2 Naturaliser le concept ?

La notion de structure causale implique implicitement que nos constructions conceptuelles *fonctionnent comme* les phénomènes qu'elles visent à représenter. D'où l'idée que, en quelque sorte, comprendre la nature, c'est comprendre comment nos concepts s'assemblent, se relient et évoluent. Valider cette idée requiert un examen précis de la façon dont se connectent la théorie et l'expérience. Mais l'examen pragmatiste semble venir buter sur la question de l'intersubjectivité : les concepts qu'on met en rapport restent *de haut niveau*, langagiers, et culturels et ils semblent loin d'être contrôlés par la seule expérience. De ce point de vue, l'efficacité des mathématiques peut apparaître comme déraisonnable, à moins d'adopter une position solipsiste ou un constructivisme de la contingence historique (dans le sens le plus vaste d'histoire, y compris évolutive) comme le nôtre.

8. Intuition, concepts et objets en mathématiques

En mathématiques, l'intuition est une partie de notre conception, et peut être un guide ou un critère de validité, mais un travail essentiel en mathématiques est de passer d'une manipulation de *concepts* à une manipulation d'*objets* et opérations, abstraite et rigoureuse. Cela confère une autonomie nouvelle (une nouvelle objectivité, presque *objectité*) à la construction conceptuelle et permet d'en enchaîner une autre.
De fait, on considère usuellement que la définition des concepts, en termes d'autres concepts, crée des cercles. D'où l'idée que seule la construction d'un objet, qui ne soit pas un concept, peut casser la circularité. Alors que la continuité classique renverrait à un concept, le continu post-cantorien lui est un objet mathématique.

> « Une chose est certaine : le continu intuitif et le continu mathématique ne se recouvrent pas (…) entre eux s'est installé un gouffre profond. Mais il y a néanmoins des motifs raisonnables qui, dans notre effort pour comprendre le monde, nous poussent à abandonner l'un pour passer à l'autre (…). Ainsi il y a dans notre construction de l'analyse, si l'on veut, une théorie du continu, qui (au-delà de sa cohérence logique) doit faire la preuve de son caractère raisonnable de la même façon qu'une théorie physique. »[29]

Cependant, il faut compter avec l'objection suivante :

> « (…) Peirce ne considère pas la définition de Cantor comme l'acte de constitution d'un objet, mais comme la description d'un concept qui est donné, à l'avance. »[30]

C'est un point de vue qu'on retrouve chez plusieurs auteurs[31]. Ainsi, pour Harthong, l'analyse des chaînes de définitions chez Cantor révèle une faille dans la rigueur des définitions dans l'expression « associer un élément » :

> « Je voudrais maintenant montrer qu'on peut définir l'expression ``associer un élément à un autre'' de plusieurs manières qui conduiront, à la suite de la chaîne logique proposée par Dedekind, à des infinis différents; c'est-à-dire qu'un ensemble infini si on adopte une manière d'associer un élément à un autre, peut être fini si on en adopte une autre. »[32]

8.1 Objectivation : une opération à deux faces

Représenter un objet, un concept par un symbole c'est réaliser sur lui une double opération.
C'est pour une part, le séparer, le discerner, le rendre visible, palpable, transmissible, le définir de façon à le rendre *opératoire*. C'est faire un choix parmi ses propriétés. Ce choix suppose l'intervention d'un agent extérieur capable de faire ces choix et capable d'attribuer des propriétés.
C'est pour l'autre part, le priver de son contexte, ignorer certaines de ses propriétés, le mettre à distance, réaliser une *coupure* par rapport à la *réalité* de l'objet. Cette coupure est le fait de l'interaction entre l'agent capable de faire des choix et la *réalité* à laquelle appartient l'objet initial.

9. Hypothèse de relativité dynamique des structures conceptuelles

La signification résulte de la mise en relation des structures conceptuelles. Cette hypothèse est simple, mais c'est une hypothèse très forte faite sur la nature de la signification. Ou plutôt le *fonctionnement* de la signification, car on veut souligner l'importance de l'aspect dynamique de la *relation*[33] : la signification ne résulte pas uniquement du *collage*. Elle émerge d'un mouvement de transformation.
Or la signification concerne l'ensemble de notre rapport au monde, que ce rapport soit de l'ordre de la sensation, du rapport sensorimoteur, de la pensée ou du langage.
Nous pouvons donc enchaîner par l'idée que nous n'avons accès au monde qu'à travers la mise en relation dynamique de structures conceptuelles
En conséquence, l'approche de la signification ici proposée est homogène : elle ne fait pas de distinction entre des domaines de savoir comme les mathématiques, la physique, la biologie, le sens commun, la langue naturelle… Quoique, bien évidemment, certaines pratiques de vie, dans leurs formes historiques, aient des enracinements différents, guident notre action ou y participent de manière « plus constitutive » que d'autres ; elles soient plus anciennes, voire partagées par une communauté plus vaste.

9.1 Connaissance, intuition et structures conceptuelles

Nous pouvons déjà apporter quelques remarques. D'abord, au sujet de la nature conceptuelle de toute connaissance, nous reprenons à notre compte une conception connue, clairement exprimée dans ces citations de Le Moigne[34] : « Nous ne raisonnons que sur des modèles « (Paul Valéry) et « Nous ne communiquons que par des modèles « (Gregory Bateson). Il s'ensuit que la connaissance que nous avons, de notre intuition par exemple, est de nature conceptuelle, ce qui ne veut pas dire que l'intuition elle-même est conceptuelle.
Ensuite, nous considérons l'intuition, la sensation et autres modes de connaissance non conceptuels, également comme des structures conceptuelles[35]. Ainsi, une structure conceptuelle se distingue du concept, pris en son acception commune, par les aspects structure et relation dynamique : une structure conceptuelle est structurée, et en relation dynamique avec une structure conceptuelle. Sur ce point, on s'écarte des théories de la connaissance qui s'accordent, généralement, à reconnaître qu'il y a essentiellement, dans l'être humain, deux modes de connaissances de la réalité, l'un qui porte directement sur le concret, saisi dans sa singularité, l'autre qui n'atteint le réel qu'à travers des déterminations de caractère abstrait (séparées des individus concrets en lesquels elles peuvent éventuellement se trouver réalisées). Le premier mode caractérise l'intuition, le second la connaissance par concepts.
Si on oriente une relation établie entre deux structures conceptuelles (relation de SC1 vers SC2), on sera en mesure de désigner SC1 comme une intuititon, relativement SC2 vue comme un concept. La même relation peut être inversée, ce qui permet de comprendre les situations de co-détermination, par exemple entre syntaxe et sémantique, ou bien entre génotype et phénotype, entre signifiant et signifié, forme et contenu. De même la distinction entre objets concrets et objets abstraits devient relative, et pas absolue. Une expérience sera qualifiée de *mentale* à partir d'un certain niveau d'abstraction, mais ce niveau n'est certainement pas absolu. Ainsi un mathématicien expérimenté aura un rapport concret à des objets hautement abstraits.

En conclusion, de notre point de vue, l'intuition aussi est un *constitué*, le résultat d'une activité, d'une praxis, qui va de notre action animale dans l'espace aux pratiques conceptuelles mathématiques les plus "abstraites". C'est ainsi que nous considérons ces intuitions qui réfèrent au geste qui construit un bord, qui range des objets matériels dans un ordre, le résultat d'une *constitution transcendantale*, tout comme notre intuition post-cantorienne du continu. On s'explique.

On a vu ailleurs[36], le rôle de l'ordre (le bon ordre, plus précisément) dans les fondements des mathématiques ; ce bon ordonnancement que l'on partage, pour le petit comptage, avec maintes pratiques animales, mais que nous étendons, par le langage, à une interaction sans borne (l'infini potentiel de l'arithmétique). Dans [Teissier, 2005] on esquisse un fondement cognitif de la notion de ligne, de bord. Mais la constitution de cette intuition de continu que tout mathématicien partage depuis un siècle a des caractéristiques semblables, ayant comme seules différences une différente *épaisseur historique*. Cantor, au sommet de siècles de débats sur le continu, nous a proposé une construction remarquable qui l'engendre à partir du comptage arithmétique, par une infinité non-dénombrables de passages à la limite infinie. Or, cette construction, avec ses gestes infinitaires, est devenue un patrimoine commun, maintes fois itéré, affiné, digéré par la pratique mathématicienne. Et il constitue une intuition de base de toute approche aujourd'hui classique au continu. Voilà une des raisons de l'immense difficulté à se faire entendre de la part des rares mathématiciens qui explorent des variantes de l'approche cantorienne : malgré l'intérêt possible de l'analyse non-standard, voire le charme remarquable de la géométrie différentielle synthétique[37], l'intuition constituée au cours d'un siècle, qui fait *voir* à tout mathématicien entraîné le continu selon la construction de Cantor, est une barrière bien difficile à dépasser. Mais, bien évidemment, le petit comptage animal, qui mène par un long parcours évolutif et historique, par la culture symbolique humaine et le langage au *concept* de nombre entier, donne une bien différente épaisseur historique au concept et à l'intuition partagés de nombre entier que la pratique récente du continu fait de points, mais sans sauts ni lacunes, de Cantor. Pour cette raison du reste, et fort justement, on considère que Cantor a *fondé* sur l'arithmétique l'analyse des réels (tout en ajoutant une infinité « non-arithmétique » de limites infinis).

9.3 La connaissance : hiérarchie dynamique, enracinée dans l'expérience sensible

Puisque la sensation et les gestes constitutifs de notre action dans le monde fonctionnent comme une structure conceptuelle, on peut dire que c'est par définition que notre approche évite le dualisme, c'est-à-dire la séparation du monde et des idées. Mais qu'est-ce alors qu'une idée ? Pour le savoir, il faut voir que dans notre approche l'idée sous-jacente que notre rapport au monde est structuré, y compris notre rapport empirique et sensoriel. Et ce qui importe du point de vue de la connaissance, c'est de *capturer* cette structure, ce qui signifie mettre en relation cette structure de notre rapport au monde, et la structure conceptuelle qui en fait pour nous une connaissance. Remarquons bien que ce n'est pas le monde ou bien nous qui sommes structurés, mais bien le *rapport* au monde : notre position n'est donc pas réaliste (il n'y a pas de structure du monde connaissable en soi et existante indépendamment de nos moyens de connaissance). En particulier, nous sommes structurés (en biologie on dirait plutôt *organisés*), mais cette structuration n'est pas en soi, c'est plutôt la structuration de notre rapport à nous même : cette remarque sera importante pour la compréhension de la notion de *fonction* en biologie.

Par notre approche en termes de structures conceptuelles, nous voyons la raison comme enracinée dans l'expérience empirique, en tant que pratiques évolutives et historiques, via une mise en relation hiérarchique et dynamique des structures conceptuelles. Et la connaissance, sont la mise en relation d'une structure conceptuelle, avec une relation (entre structures conceptuelles).

Références

(Des versions préliminaires ou revues des articles de Longo sont téléchargeables de « http://www.di.ens.fr/users/longo » ou « Google: search : Giuseppe Longo »).

Francis Bailly et Giuseppe Longo, *Mathématiques et sciences de la nature. La singularité physique du vivant*, Hermann, Paris, 2006.

John L. Bell, *A Primer in Infinitesimal Analysis*, Cambridge U.P., 1998, 136p.

John Bickle, *Psychoneural Reduction: The New Wave*, MIT Press, 1998, 372p.

Christiane Chauviré, *Voir le visible, la seconde philosophie de Wittgenstein*, PUF, 2003, 136p.

Jaegwon Kim, *Mind in a Physical World: An Essay on the Mind-Body Problem and Mental Causation*, MIT Press, 1998, 160p.

Giuseppe Longo, « On the proofs of some formally unprovable propositions and Prototype Proofs in Type Theory « (invited lecture) , in Callaghan et al. (dir.), *Types for Proofs and Programs*, Springer, Durham

(UK), Lecture Notes in Computer Science, Vol. 2277, 2002 : p. 160-180
Mioara Mugur-Schächter, « Objectivity and descriptional relativities «, *Foundations of science*, vol. 7, 2002 : p. 73-180.
Marco Panza, « De la continuité comme concept au continu comme objet », in Jean-Micel Salanskis et Hourya Sinaceur (dir.), *Le labyrinthe du continu*, Sprinegr-Verlag, Paris, 1992 : p.16-30.
Willard Van Orman Quine, « Two dogmas of empirism », *The Philosophical Review*, vol. 60, 1951 : p.20-43.
Willard Van Orman Quine, *Quiddities : An Intermittently Philosophical Dictionary*, Harvard, 1987, 262p.
Richard Rorty, *L'Homme Spéculaire*, Le Seuil, Paris, 1990, 438p.
Salanskis J.-M. Et Sinaceur H., Le Labyrinthe du Continu, Springer Verlag France, 1992, 452p.
Bernard Teissier, « Protomathematics, perception and the Meaning of Mathematical Objects », in Pierre Grialou, Giuseppe Longo et Mitsuhiro Okada (Dir.), *Images and Reasoning*, Keio University Press, Tokyo, 2005 : p. 135-146.
René Thom, *Paraboles et Catastrophes*, Flammarion, 1983, 190p.
Alan M. Turing, « Computing Machines and Intelligence », *Mind*, vol. LIX, n°236, 1950 : p. 433-460.
Alan M. Turing, « The Chemical Basis of Morphogenesis «, *Philo. Trans. Royal Soc.*, vol. B237, 1952 : p. 37-72.
Hermann Weyl, *The continuum, a critical examination of the foundation of analysis*, Dover, NY, 1987, 130p.

---

[*] LIENS, CNRS – ENS, http://www.di.ens.fr/BorisSaulnier.html
[**] CNRS – ENS et CREA, Paris, http://www.di.ens.fr/users/longo
[1] On ne parle pas ici de « modèle » au sens de la théorie des ensembles, ni au sens de modèle réduit, ni au sens de modèle analogique (un artefact qui reproduit le fonctionnement d'un système étudié).
[2] René Thom, p.105.
[3] Francis Bailly et Giuseppe Longo, 2006.
[4] Alan M. Turing, 1950 : p.47.
[5] Alan M. Turing, 1952.
[6] Francis Bailly et Giuseppe Longo, 2006.
[7] Idem.
[8] *« il faut (...) abandonner tout espoir de montrer que la théorie des ensembles ne comporte pas de contradiction. On ne sait donc pas si un modèle de la théorie de Zermelo-Fraenkel existe (...). Tout ce que l'on peut obtenir c'est la non-contradiction relative : si l'on admet qu'une certaine théorie (celle de Zermelo-Fraenkel par exemple) est consistante, c'est à dire non-contradictoire, alors elle le reste quand on ajoute certains axiomes supplémentaires (par exemple l'axiome du choix). On le montre en supposant l'existence d'un modèle de la théorie en question, que l'on transforme en un modèle des axiomes étudiés.* » [Jean-Louis Krivine, *Théorie des ensembles*, Cassini, 1998.]
[9] Jan von Plato, "The axioms of constructive geometry", *Annals of Pure and Applied Logic*, vol. 76, 1995 : p. 169-200 ; Li Dafa, Peifa Jia, et Xinxin Li, "Simplifying von plato's axiomatization of constructive apartness geometry », *Annals of pure and applied logic*, vol. 102, 2000 : p.1-26.
[10] Guy Wallet, « Réflexions sur l'objectivité en mathématiques », in Jean-Michel Salanskis et Hourya Sinaceur (dir.), *Le Labyrinthe du continu*, Springer-Verlag, Paris, 1992 : p. 234 et p. 236.
[11] Régine Douady, « Jeux de cadres et dialectique outil-objet », *RDM (Recherches en Didactique des Mathématiques)*, Volume 7.2, 1986.
[12] René Guitart, *La pulsation mathématique. Rigueur et ambiguïté, la nature de l'activité mathématique, ce dont il s'agit d'instruire*, L'Harmattan Condé-sur-Noireau, 2000.
[13] Jean-Louis Krivine, *Théorie axiomatique des ensembles*, P.U.F., 1969.
[14] John Bickle, 1998.
[15] Lawrence Sklar, *Theory and Truth: Philosophical Critique within Foundational Science*, Oxford University Press, 2000 ; Lawrence Sklar, "Types of inter-theoretic reduction", *The British Journal for the Philosophy of Science*, vol. 18, 1967 : p. 109-124.
[16] Robert W. Batterman, *The Devil in the Details: Asymptotic Reasoning in Explanation, Reduction, and Emergence*, Oxford University Press, NY, 2002.
[17] Thomas Nickles, « Two Concepts of Intertheoretic Reduction », *J. of Phil.*, vol. 70, 1973 : p. 181-201.
[18] William C. Wimsatt et Jeffrey C. Schank, *Why Build Models in Biology?*, Addison-Wesley, 1992.
[19] Kenneth F. Schaffner, « Reductionism in biology: Prospects and problems » , *PSA*, 1974 : p.613—632.
[20] Jaegwon Kim, *Mind in a Physical World: An Essay on the Mind-Body Problem and Mental Causation*, MIT Press, 1998.
[21] Steven French et Newton C. A. Da Costa, *Science and Partial Truth: A Unitary Approach to Models and Reasoning in Science*, Oxford University Press, 2003.

[22] Gilles Fauconnier et Mark Turner, *The Way We Think: Conceptual Blending and the Mind's Hidden Complexities*, Basic Books, 2002.

[23] En ce qui concerne le dé, on aura remarqué que la question de la nature purement théorique, ou plutôt théorico-pratique, du dé, devrait avoir un impact non négligeable sur une interprétation encore ouverte du lien entre probabilités et fréquences relatives. On pourra consulter à ce sujet : Mioara Mugur-Schächter, « Probabilités, relativisations descriptionnelles et représentations des complexités et de leurs mesures sans amputation du sens », ce volume.

[24] Francis Bailly et Jean Petitot, « Mathématiques : de la diversité à l'unification », in Encyclopédie Universalis, 2004.

[25] Ils donnent l'exemple des formulations respectivement newtoniennes, hamiltoniennes, lagrangiennes de la dynamique, par exemple, ou encore la mécanique ondulatoire de Schrödinger par rapport à la mécanique des matrices de Heisenberg en théorie quantique.

[26] Ce point est essentiel, concernant notre l'interprétation possible de la notion d'information. Par exemple, selon une interprétation classique, une *information* rentre dans notre cerveau, par exemple par nos yeux, puis elle est *traitée* par différents étages de modules fonctionnels, dont la structure permet le codage et le calcul. La réflexion de Quine à propos des inputs suggère d'une part que l'activité d'un module n'est certainement pas indépendante des modules qui « suivent » dans la chaîne, conformément au schéma de réentrance de Edelman ; et d'autre part que la notion de structure d'un module peut nous induire en erreur, dans la mesure où l'aspect holiste du système peut nous conduire à la voir autant comme cause que comme conséquence d'une activité globale. Cette considération sur une forme de *clôture causale* a d'ailleurs une portée générale en biologie.

[27] Comment savoir cependant ? Par exemple le *point réel* est *concrètement déterminé* pour un mathématicien, mais pas pour une machine.

[28] Il semble manquer une relation *descendante* de régulation, à notre avis essentielle, aussi bien pour les concepts que pour les organismes vivants.

[29] Hermann Weyl, 1918.

[30] Marco Panza, 1992 : p.27.

[31] Voir aussi : Patrick Lecomte, *Quelle Logique pour le vivant* (thèse de doctorat), Ecole Nationale Vétérinaire d'Alfort, 1997.

[32] Jacques Harthong, « Le continu ou le discret, un problème indécidable », in Jean-Michel Salanskis et Hourya Sinaceur (Dir.), *Le labyrinthe du continu*, Springer-Verlag, Paris, 1992.

[33] Déjà Poincaré et Helmholtz avaient insisté sur la notion de relation, notion qu'on trouve au cœur de nombre d'approches dites structuralistes.

[34] Jean-Louis Le Moigne, « Science des Systèmes », Encyclopédie Universalis, 2004.

[35] On se rapproche ainsi de la notion d' « idée sensorielle » de James (William James, *The Meaning of Truth*, Prometheus Books, 1997).

[36] Giuseppe Longo, 2002 ; Francis Bailly et Giuseppe Longo, 2006.

[37] John Bell, 1998.