

# ÇOKSESİLİ MÜZİK NOTALANDIRMASI İÇİN BAĞLAŞIMLI TENSÖR AYRIŞIM MODELLERİ

## COUPLED TENSOR FACTORIZATION MODELS FOR POLYPHONIC MUSIC TRANSCRIPTION

Umut Şimşekli, Y. Kenan Yılmaz, A. Taylan Cemgil

Bilgisayar Mühendisliği Bölümü  
Boğaziçi Üniversitesi, 34342 Bebek, İstanbul  
{umut.simsekli, taylan.cemgil}@boun.edu.tr, kenan@sibnet.com.tr

### ÖZETÇE

*Genelleştirilmiş Bağlaşımli Tensör Ayrışımı (GBTA), ortak tensörler içeren tensör ayrışım modellerinin eşzamanlı ayrışımı için önerilmiş bir algoritmik çerçevedir. Bu çalışmada, çoksesli (polifonik) piyano eserlerinin notalandırılması (transkripsiyonu) için GBTA çerçevesinde tanımlanmış iki model sunuyoruz. Önerilen ilk model Negatif Olmayan Matris Ayrışımı tabanlı olup bağlaşım aracılığı ile spektral bilgiyi modele dahil etmektedir. İlk modele ek olarak, ikinci model notalandırılacak piyano parçasının kaba ve eksik bir notalandırmasını girdi olarak alıp, buradan edindiği zamansal ve armonik bilgiyi de modele dahil etmektedir. Gerçek piyano verisi üzerinde yapılan deneyler sonucunda armonik bilginin dahil edilmesinin notalandırma kalitesini arttığı ve F-ölçüsünde % 23'lük bir artış sağladığı gözlemlenmektedir.*

### ABSTRACT

Generalized Coupled Tensor Factorization (GCTF) is a recently proposed algorithmic framework for simultaneously estimating tensor factorization models where several tensors can share a set of latent factors. This paper presents two models in this framework for transcribing polyphonic piano pieces. The first model is based on Non-negative Matrix Factorization where the coupling provides the spectral information to the model. As an extension to the first model, the second model incorporates temporal and harmonic information by taking a rough, incomplete transcription of the piece as input. Incorporating harmonic knowledge improves the transcription quality as the experimental results show that we get around 23 % F-measure improvement on real piano data.

## 1. GİRİŞ

Ayrışım tabanlı ses modelleme teknikleri hesaplama gücünün artmasıyla ve istatistiksel modelleme tekniklerinin gelişmesiyle birlikte popülerlik kazanmıştır. Bu modelleme yaklaşımı içinde

Bu çalışma Türkiye Bilimsel ve Teknik Araştırmalar Kurumu (TÜBİTAK) tarafından 110E292 nolu araştırma projesi kapsamında desteklenmektedir. Umut Şimşekli'nin çalışması TÜBİTAK BİDEB 2211 bursuyla desteklenmektedir.

978-1-4673-0056-8/12/\$26.00 ©2012 IEEE

müziksel bilgi çıkarımı, içerik analizi, müzik notalandırması, kaynak ayrıştırma ve ses onarımının da bulunduğu bir çok dalda yaygın olarak kullanılmaktadır. Smaragdīs ve Brown'ın [1]'de Negatif Olmayan Matris Ayrışımı (NOMA) üzerine yaptığı öncü çalışmada ayrışım tabanlı modelleme teknikleri ile pratik ve kullanışlı uygulamaların geliştirilebileceği gösterilmiştir. Ayrıca Févotte v.d.'nin [2]'de yaptığı çalışmada müzik analizi için NOMA modeli geliştirilmiş ve bu model üzerine çeşitli eklentiler sunulmuştur.

Çoksesli (polifonik) müzik notalandırması müzik işleme alanın en temel problemlerinden biri olup, ayrışım tabanlı ses işleme modellerinin en sık uygulandığı problemlerden biridir. Burada amaç çoksesli bir müzik verisinde çalınan notaları ve bu notaların ne zaman çalındıklarını, ne kadar uzunlukta çalındıklarını doğru bir şekilde kestirebilmektir. Literatürde farklı varsayımlara sahip birçok ayrışım tabanlı model ve bunlara ilişkin çıkarım algoritmaları sunulmuştur [3, 4].

Bu çalışmada, çoksesli piyano eserlerinin notalandırılması için Genelleştirilmiş Bağlaşımli Tensör Ayrışımı (GBTA) [5] çerçevesi dahilinde tanımlanmış iki farklı bağlaşımli ayrışım modeli sunuyoruz. Önerilen ilk model Negatif Olmayan Matris Ayrışım modeli tabanlı olup bağlaşım aracılığı ile spektral bilgiyi modele dahil etmektedir. İkinci modelde ise ilk modele ek olarak notalandırılacak piyano parçasının kaba ve eksik bir notalandırması girdi olarak alınıp, buradan edinilen zamansal ve armonik bilgi de modele dahil edilmektedir.

## 2. GENELLEŞTİRİLMİŞ BAĞLAŞIMLI TENSÖR AYRIŞIMI

Yılmaz ve Cemgil [6]'da tensör ayrışım modelleri için genel bir çerçeve olan Olasılıksal Saklı Tensör Ayrışımı (OSTA) çerçevesini sunmuşlardır. Bu çerçevede, gözlemlenen  $X$  tensörü,  $Z_\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, |\alpha|$ ) bileşenlerinin çarpımı cinsinden, aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$X(v_0) \approx \hat{X}(v_0) = \sum_{\bar{v}_0} \prod_{\alpha} Z_\alpha(v_\alpha). \quad (1)$$

Burada,  $X$  gözlemlenen tensör,  $\hat{X}$  model tarafından oluşturulan yaklaşık tensör,  $Z_\alpha$  ise tensörü oluşturduğu varsayılan bileşenlerdir. Modeldeki indis kümeleri aşağıdaki gibi

tanımlanmıştır:

$v \in V$	Modeldeki bütün indisler,
$v_0 \in V_0$	Modeldeki gözlemlenen indisler,
$v_\alpha \in V_\alpha$	$Z_\alpha$ bileşeninin tanımlı olduğu indisler,
$\bar{v}_i \in \bar{V}_i$	$V - V_i, i \in \{0, \dots, N\}$ .

Küçük harfle gösterilen indisler ilgili indis kümesinin bir emanı olarak tanımlanmıştır. Bu modeldeki temel mantık şu şekilde özetlenebilir:  $X$  tensörü,  $Z_\alpha$  bileşenlerinin bütün indisler üzerinden çarpıldıktan sonra, saklı indisler üzerinden toplanmasıyla oluşmuştur.

Bu simgelemin daha iyi anlaşılması için matris ayrışım modeli örneğini verebiliriz. Matris ayrışım modeli şu şekilde tanımlanmıştır [7]:

$$X(f, t) \approx \hat{X}(f, t) = \sum_k D(f, i)E(i, t).$$

Burada  $X$  gözlemlenen matristir ve  $D \equiv Z_1$  ve  $E \equiv Z_2$  olarak görülebilir. Bu modeldeki indis kümeleri ise şu şekildedir: tüm indisler  $V = \{f, t, i\}$ , ilk bileşenin indisleri  $V_1 = \{f, i\}$ , ikinci bileşenin indisleri  $V_2 = \{i, t\}$ , gözlemlenen indisler  $V_0 = \{f, t\}$  ve gözlemlenemeyen indis  $\bar{V}_0 = \{i\}$ .

Genelleştirilmiş Birleşik Tensör Ayrışımı (GBTA) çerçevesi, OSTA çerçevesinin genelleştirilmesiyle oluşturulmuş bir tensör ayrışımı çerçevesidir [5]. OSTA çerçevesi tek bir gözlemlenen tensörün ( $X$ ) bulunduğu modellerde kestirim yapabilirken, GBTA çerçevesi birden fazla gözlemlenen tensörün ( $X_\nu, \nu : 1 \dots |\nu|$ ) bulunduğu modellerde eş zamanlı kestirim yapmaya olanak sağlamaktadır. GBTA modeli aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$X_\nu(v_{0,\nu}) \approx \hat{X}_\nu(v_{0,\nu}) = \sum_{\bar{v}_0, \nu} \prod_{\alpha} Z_\alpha(v_\alpha)^{R^{\nu, \alpha}}. \quad (2)$$

Bu çerçevede OSTA çerçevesinden farklı olarak gözlemlenen tensörler ve bu tensörlerin indis kümeleri  $\nu$  indisi üzerinde tanımlanmıştır. Bileşenler gözlemlenen tensörlerle  $R$  matrisi vasıtasıyla aşağıdaki gibi ilişkilendirilmiştir:

$$R^{\nu, \alpha} = \begin{cases} 1 & X_\nu \text{ ve } Z_\alpha \text{ bağlı ise} \\ 0 & X_\nu \text{ ve } Z_\alpha \text{ bağlı değil ise} \end{cases}. \quad (3)$$

GBTA çerçevesini daha iyi açıklamak için aşağıdaki örneği verebiliriz:

$$\hat{X}_1(i, j, k) = \sum_r A(i, r)B(j, r)C(k, r) \quad (4)$$

$$\hat{X}_2(j, p) = \sum_r B(j, r)D(p, r) \quad (5)$$

$$\hat{X}_3(j, q) = \sum_r B(j, r)E(q, r) \quad (6)$$

Bu örnekte üç farklı gözlemlenen tensör bulunmaktadır ve bileşenler  $A : E \equiv Z_{1:5}$  şeklinde görülebilir. Dolayısıyla aynı anda birbirine bağlı üç farklı ayrıştırma problemi çözülmeye çalışılmaktadır. Bu örnek için oluşturulan  $R$  matrisi ise aşağıdaki gibidir: ( $|\alpha| = 5, |\nu| = 3$ )

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Tablo 1: Değişik iraksaylar için güncelleme denklemleri. KL ve IS kısaltmaları sırasıyla Kullback-Leibler ve Itakura-Saito iraksaylarını temsil etmektedir.

$p$	Iraksay	Güncelleme Denklemi
0	Öklid	$Z_\alpha \leftarrow Z_\alpha \circ \frac{\sum_\nu R^{\nu, \alpha} \Delta_{\alpha, \nu}(M_\nu \circ X_\nu)}{\sum_\nu R^{\nu, \alpha} \Delta_{\alpha, \nu}(M_\nu \circ \hat{X}_\nu)}$
1	KL	$Z_\alpha \leftarrow Z_\alpha \circ \frac{\sum_\nu R^{\nu, \alpha} \Delta_{\alpha, \nu}(M_\nu \circ \hat{X}_\nu^{-1} \circ X_\nu)}{\sum_\nu R^{\nu, \alpha} \Delta_{\alpha, \nu}(M_\nu)}$
2	IS	$Z_\alpha \leftarrow Z_\alpha \circ \frac{\sum_\nu R^{\nu, \alpha} \Delta_{\alpha, \nu}(M_\nu \circ \hat{X}_\nu^{-2} \circ X_\nu)}{\sum_\nu R^{\nu, \alpha} \Delta_{\alpha, \nu}(M_\nu \circ \hat{X}_\nu^{-1})}$

## 2.1. Çıkarım

GBTA çerçevesinde çıkarım yapabilmek için, diğer bir deyişle  $X_\nu$  tensörlerini gözlemledikten sonra  $Z_\alpha$  bileşenlerini kestirebilmek için aşağıdaki ifade çözümlenmelidir:

$$Z_{1:N}^* = \arg \min_Z \left( d(X \| \hat{X}) \right). \quad (8)$$

Burada  $d(\cdot)$  seçilen iraksayıdır ve uygulamaya bağlı olarak çeşitli ölçütler seçilebilir. Gözlemlerin ve bileşenlerin negatif olmadığı modellerde çıkarım yapmak için gerekli algoritmaya aşağıda tanımlanan güncelleme denklemleri yinelemeli olarak uygulanarak ulaşılabılır [5]:

$$Z_\alpha \leftarrow Z_\alpha \circ \frac{\sum_\nu R^{\nu, \alpha} \Delta_{\alpha, \nu}(M_\nu \circ \hat{X}_\nu^{-p} \circ X_\nu)}{\sum_\nu R^{\nu, \alpha} \Delta_{\alpha, \nu}(M_\nu \circ \hat{X}_\nu^{1-p})}. \quad (9)$$

Burada  $\circ$  Hadamard çarpımıdır (iç çarpım) ve  $M$  ise ikili bir maske olup şu şekilde tanımlanmıştır:

$$M_\nu(v_{0,\nu}) = \begin{cases} 0 & X_\nu(v_{0,\nu})' \text{ nün değeri gözlemlenememişse,} \\ 1 & X_\nu(v_{0,\nu})' \text{ nün değeri gözlemlenebilmişse,} \end{cases}$$

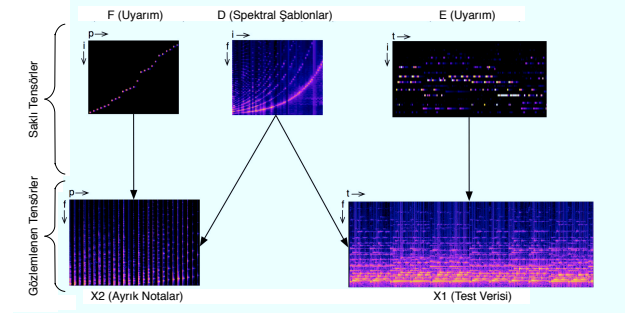
ve  $p$  kullanılacak iraksayı belirlemektedir:  $p = \{0, 1, 2\}$  değerleri sırasıyla  $\beta$  iraksayının özel durumları olan Öklid, Kullback-Leibler ve Itakura-Saito iraksaylarına denk gelmektedir.  $\Delta_\alpha$  fonksiyonu ise (10) numaralı denklemdeki gibi tanımlanmıştır:

$$\Delta_{\alpha, \nu}(A) = \left[ \sum_{v_{0,\nu} \cap \bar{v}_\alpha} A(v_{0,\nu}) \sum_{\bar{v}_0 \cap \bar{v}_\alpha} \prod_{\alpha'} Z_{\alpha'}(v_{\alpha'})^{R^{\nu, \alpha'}} \right]. \quad (10)$$

Burada,  $A$  tensörü bu fonksiyonun argümanıdır ve gözlemlenen indisler üzerinde tanımlanmıştır. Yani, (9) numaralı denklemde belirtilen güncelleme denklemleri hesaplanırken,  $\Delta_\alpha(\cdot)$  fonksiyonu  $A = M_\nu \circ \hat{X}_\nu^{-p} \circ X_\nu$  ve  $A = M_\nu \circ \hat{X}_\nu^{1-p}$  için hesaplanmalıdır. Örneğin KL-NMF için [7]'de sunulan güncelleme denklemi 9 numaralı denklemin bir özel durumudur.

## 3. ÇOKSESLİ MÜZİK NOTALANDIRMASI İÇİN TENSÖR AYRIŞIM MODELLERİ

Bu bölümde çoksesli müzik notalandırması problemi için iki farklı bağımlı tensör ayrışımı modeli sunuyoruz. Mod-



Şekil 1: İlk ayrışım modelinin görselleştirilmesi. Bloklar modelde tanımlanan tensörleri ifade etmektedir ve blokların yanındaki oklar ve semboller o tensörün indislerine denk gelmektedir. Temel fikir spektral bilgiyi modele dahil ederek notalandırma kalitesini artırmaktır.

ellerdeki temel amaç notalandırılacak ses verisinin genlik spektrumunun ( $X_1$ ) notalara ait spektral şablonlar ( $D$ ) ve bu şablonların uyarımı ( $E$ ) şeklinde ayrıştırılmasıdır. Kestirim sonucunda elde edilen uyarım matrisi  $E$  hangi notanın hangi zamanda ne yüksekliğe çalıştığı bilgisini içerdiği için  $E$  kestirildikten sonra üzerinde yapılacak basit bir eşiklemeyle müziğe ait notalandırmaya ulaşılabilir.

İlk ayrışım modelimizde, spektral şablon matrisini ( $D$ ) paylaşan iki farklı Negatif olmayan Matris Ayrışımı modelini birleştirerek elde ediyoruz. Burada temel amaç bağlaşım aracılığı ile spektral bilgiyi modele dahil ederek notalandırma kalitesini artırmaktır. Bu model aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$\hat{X}_1(f, t) = \sum_i D(f, i)E(i, t) \quad (11)$$

$$\hat{X}_2(f, p) = \sum_i D(f, i)F(i, p)T(i, p) \quad (12)$$

Burada  $f$  frekans indisi,  $t$  ve  $p$  zaman çerçevesi indisleri ve  $i$  spektral şablon indisi.  $X_1$  notalandırılacak sesin genlik spektrumu,  $X_2$  ise art arda birleştirilmiş ayrık piyano seslerine ait genlik spektrumudur. Ayrıca  $T$  ikili bir matris olup  $p$ 'inci zaman çerçevesinde  $i$  notası çalışmışsa (çalışmamışsa)  $T(i, p) = 1$  ( $T(i, p) = 0$ ) olarak tanımlanmıştır ve  $F$  ayrık notaların zaman içinde değişen genliklerini göstermektedir. Şekil 1 bu modeli görselleştirmektedir ve bu modele ait  $R$  matrisi aşağıdaki gibidir:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

İkinci ayrışım modelimizde ise ilk modele ek olarak uyarım matrisi  $E$  de sıradüzensel olarak akor şablonları ( $B$ ) ve bu şablonların uyarımı ( $C$ ) olarak ayrıştırılmaktadır:  $E(i, t) = \sum_{k, \tau} B(i, \tau, k)C(k, t - \tau)$ . Bu modeldeki temel fikir ise, akor şablonlarını ( $B$ ) notalandırılacak piyano parçasının kaba ve/ya eksik bir notalandırması ( $X_3$ ) ile paylaşarak modele notaların evrimindeki zamansal ve armonik bilgi de dahil etmektir. Bu model aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$\hat{X}_1(f, t) = \sum_{i, \tau, k} D(f, i)B(i, \tau, k)C(k, t - \tau)$$

$$= \sum_{i, \tau, k, d} D(f, i)B(i, \tau, k)C(k, d)Z(d, t, \tau) \quad (14)$$

$$\hat{X}_2(f, p) = \sum_i D(f, i)F(i, p)T(i, p) \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \hat{X}_3(i, n) &= \sum_{\tau, k} B(i, \tau, k)G(k, \overbrace{n - \tau}^m) \\ &= \sum_{\tau, k, m} B(i, \tau, k)G(k, m)Y(m, n, \tau) \end{aligned} \quad (16)$$

İlk modelden farklı olarak bu modelde  $X_3$  notalandırılacak parçanın yaklaşık bir notalandırmasıdır. Ayrıca bu model evrişik bir yapı içerdiği için (Denklemler 14 ve 16), bu modelleri GBTA çerçevesinde tanımlayabilmek için yapay  $d$  ve  $m$  indisleri tanımlanmış ve  $Z(d, t, \tau) = \delta(d - t + \tau)$  ve  $Y(m, n, \tau) = \delta(m - n + \tau)$  olarak sabitlenmiştir (evrişik tensör modellerinin daha detaylı anlatımı için bkz. [8, 9]). Şekil 2 bu modeli görselleştirmektedir. Bu modele ait  $R$  matrisi aşağıdaki gibidir:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Bu model daha önce ses spektrumlarının onarımı problemi için kullanılmış ve başarılı sonuçlar elde edilmiştir [5, 10].

## 4. SONUÇLAR

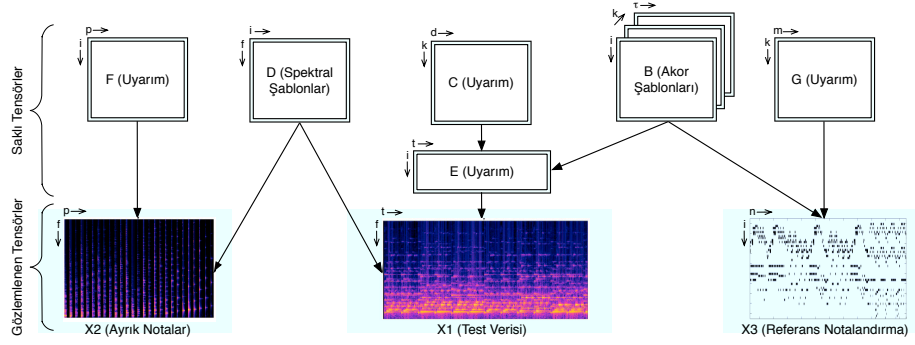
Bu bölümde modellerimizi değerlendirmek için düzenlediğimiz çeşitli deneyleri ve sonuçlarını sunuyoruz. Deneylerimizde "MIDI Aligned Piano Sounds" (MAPS) veritabanını kullandık [11]. Bu veritabanında bulunan 16 bit, 44.1 kHz piyano örneklerini 11.025 kHz'e düşürerek çevirdikten sonra modelleri 6 klasik müzik örneği üzerinde değerlendirdik. Bütün deneylerimizde ses verisinin ilk 30 saniyelik kısımlarını kullandık ve 93 milisaniyelik örtüşmeyen çerçevelere böldük.

Çoksesli müzik notalandırmasının kalitesini ölçmek için birçok yöntem ve ölçüt önerilmiştir. Biz bu çalışmada bu ölçütlerden en çok kullanılanlardan biri olan "F-ölçüsü"nü kullanıyoruz. F-ölçüsü, geri getirme oranı ve kesinlik oranı cinsinden Tablo 2'deki gibi tanımlanmıştır.

Tablo 2: Çoksesli notalandırmasını değerlendirmek için kullanılan ölçütler. Doğru kestirilen nota sayısı, kestirilen nota sayısı ve gerçek nota sayısı her zaman çerçevesinde hesaplanıp daha sonra zaman eksenini üzerinden toplanılarak aşağıdaki nicelemler elde edilmektedir.

	$\frac{\text{Toplam doğru kestirilen nota sayısı}}{\text{Toplam kestirilen nota sayısı}}$
Kesinlik	
Geri getirme	$\frac{\text{Toplam doğru kestirilen nota sayısı}}{\text{Toplam gerçek nota sayısı}}$
F-ölçüsü	$\frac{2 \times \text{Kesinlik} \times \text{Geri getirme}}{\text{Kesinlik} + \text{Geri getirme}}$

Tablo 3 ve 4'te sırasıyla birinci ve ikinci ayrışım modellerinin çoksesli piyano verisindeki başarımları gösterilmektedir.



Şekil 2: İkinci ayrışım modelinin görselleştirilmesi. Bloklar modelde tanımlanan tensörleri ifade etmektedir ve blokların yanındaki oklar ve semboller o tensörün indislerine denk gelmektedir. Temel fikir yaklaşık bir notalandırma kullanarak modele müziğin zamansal ve armonik bilgisini dahil etmektir.  $E$  üzerinde yapılacak basit bir eşikleme işlemiyle istenen notalandırmaya ulaşılabilir.

Tablo 3: İlk ayrışım modelinin gerçek veri üzerindeki başarısı. Değişik ıraksaylar ( $p$ ) için F-ölçüsü değerleri (%).

$p = 0$	$p = 1$	$p = 2$
25.30	39.57	28.07

Tablo 4: İkinci ayrışım modelinin gerçek veri üzerindeki başarısı. Değişik ıraksaylar ( $p$ ) ve değişik uzunluktaki referans notalandırmaları için F-ölçüsü değerleri (%).

	$p = 0$	$p = 1$	$p = 2$
10 sn	57.61	63.41	49.89
5 sn	48.32	57.51	47.46
1 sn	41.65	50.11	38.94

İlk modelde en iyi F-ölçüsü KL ıraksayıyla yaklaşık % 40 olarak elde edilirken, ikinci modelde 10 saniyelik notalandırma kullanıldığında bu ölçü yaklaşık % 63'e çıkmaktadır. Sonuçlardan da görülebileceği üzere, referans notalandırmasının uzunluğu artırıldıkça notalandırma kalitesi artmaktadır.

## 5. VARGILAR

Bu çalışmada çoksesli müzik notalandırması için iki farklı ayrışım modeli sunulmuştur. İlk model spektral şablon matrisini paylaşan iki farklı Negatif Olmayan Matris Ayrışımı modelini birleştirerek elde edilmiştir. Burada temel amaç bağlaşım aracılığı ile spektral bilgiyi modele dahil ederek notalandırma kalitesini artırmaktır. İkinci ayrışım modelimizde ise ilk modele ek olarak notalandırma için gereken uyarım matrisi de sıradüzensel olarak akor şablonları ve bu şablonların uyarımı olarak ayrıştırılmıştır. Bu modeldeki temel fikir akor şablonlarını notalandırılacak piyano parçasının yaklaşık bir notalandırması ile paylaşarak modele notaların evrimindeki zamansal ve armonik bilgi de dahil etmektir.

Modeller üzerinde çıkarım yapmak için gereken algoritma, modellerin GBTA çerçevesinde tanımlanması sayesinde açık bir şekilde elde edilebilmektedir. Önerilen yöntemler gerçek

piyano verisi üzerinde denenmiş, zamansal ve armonik bilginin F-ölçüsünde yaklaşık % 24'lük artış sağladığı gözlenmiştir.

## 6. KAYNAKÇA

- [1] P. Smaragdis and J. C. Brown, "Non-negative matrix factorization for polyphonic music transcription," *WASPAA*, 2003, pp. 177–180.
- [2] C. Févotte, N. Bertin, J. L. Durrieu, "Nonnegative matrix factorization with the Itakura-Saito divergence. with application to music analysis," *Neural Computation*, vol. 21, pp. 793–830, 2009.
- [3] E. Vincent, N. Bertin, ve R. Badeau, "Harmonic and in-harmonic nonnegative matrix factorization for polyphonic pitch transcription," in *ICASSP*, 2008.
- [4] P. H. Peeling, A. T. Cemgil, S. J. Godsill, "Generative spectrogram factorization models for polyphonic piano transcription," *Trans. Audio, Speech and Lang. Proc.*, vol. 18, no. 3, pp. 519–527, 2010.
- [5] Y. K. Yılmaz, A. T. Cemgil, U. Şimşekli, "Generalised coupled tensor factorisation," *NIPS*, 2011.
- [6] Y. K. Yılmaz, A. T. Cemgil, "Probabilistic Latent Tensor Factorization", *LVA/ICA 2010*
- [7] D. D. Lee, H. S. Seung, "Learning the parts of objects by non-negative matrix factorization.," *Nature*, vol. 401, pp. 788–791, 1999.
- [8] U. Şimşekli, Y. C. Sübakan, A. T. Cemgil, "Negaif Olmayan Evrişik Yapılar İçin Tensör Ayrışımı Çerçevesi", *SIU 2011*
- [9] A. T. Cemgil, U. Şimşekli, Y. C. Sübakan, "Probabilistic tensor factorization framework for audio modeling," *WASPAA*, 2011.
- [10] U. Şimşekli, Y. K. Yılmaz, A. T. Cemgil, "Score Guided Audio Restoration via Generalised Coupled Tensor Factorisation" in *ICASSP*, 2012.
- [11] V. Emiya, R. Badeau, B. David, "Multipitch estimation of piano sounds using a new probabilistic spectral smoothness principle," *IEEE TASLP*, vol. 18, no. 6, pp. 1643–1654, 2010.