

Rapport de stage de M1 à Cambridge, UK

Ulysse Marteau-Ferey

13 décembre 2017

Introduction

Avant toute chose, je souhaite remercier Raphaël Cerf de m'avoir conseillé de faire ce stage et mis en contact avec Nathanaël Berestycki, et surtout N. Berestycki lui-même ainsi que le département de mathématiques de Cambridge (DPMMS) de m'avoir si bien accueilli à la fois humainement et matériellement. L'université et le département m'ont permis de m'installer très rapidement et ont toujours été très réactifs et conciliants sur toutes mes questions pratiques et administratives. J'ai pu grâce à eux me concentrer totalement sur mon stage. N. Berestycki m'a très vite intégré à son équipe et a toujours été très disponible à la fois pour des questions mathématiques mais aussi sur mes interrogations plus générales sur la recherche ou la suite de mon cursus. Je tiens à le remercier encore pour sa disponibilité, sa bienveillance et son aide ; en me laissant assez libre, il m'a permis de profiter pleinement de cette expérience.

Ce rapport de stage est organisé en deux parties. La première présente le déroulement du stage, du point de vue mathématique mais aussi en dehors du laboratoire, ainsi qu'une forme de bilan du stage. La deuxième présente mon travail avec N. Berestycki sous forme d'article en anglais puisque tous les supports de ce travail sont en anglais. Ce n'est pas un article proprement dit (il n'a pas vocation à être polié) mais plutôt une synthèse à posteriori de la documentation que j'ai été amené à lire pour creuser les deux axes de recherche successifs conseillés par N. Berestycki, ainsi que les résultats de ces recherches.

Première partie

Présentation du stage

Mon stage à Cambridge s'est déroulé du 20 mars au 19 juillet. Il a été très intense, à la fois du point de vue social et professionnel, même si cette expérience a parfois été dure. Dans ce rapport, j'ai dissocié (malgré les limites évidentes d'une telle dissociation) mon expérience de Cambridge selon les points de vue professionnel et extra-professionnel.

1 Installation et expérience à Cambridge

Je me suis très vite installé définitivement à Cambridge. Par les réseaux de l'université mis à disposition des *visiting students*, j'ai trouvé un logement en moins de deux jours situé en centre ville et distant du CMS (département de maths) de deux kilomètres et demi. De manière générale, l'installation a été facile : location de vélo comme moyen de transport, inscription aux salles de sport par l'université ; tout est très efficace.

De nombreux éléments ont fait de mon séjour à Cambridge une expérience personnelle très positive.

Tout d'abord la ville de Cambridge est un cadre magnifique et agréable. On pense évidemment aux différents *college*, toujours impeccablement entretenus, mais la ville en elle-même est très propre et aérée. Les différents parcs, la rivière Cam, les marais autour de Cambridge, ainsi que le calme de cette ville lui confèrent un côté campagnard ressourçant lorsque l'on vient du centre de Paris. Bien-sûr, cet aspect idyllique de la vie à Cambridge est indissociable de l'influence de l'université et des entreprises de pointe qui y siègent ; ce n'est pas une ville diversifiée socialement et elle ne reflète absolument pas l'Angleterre, si ce n'est par les inégalités que l'on sent très marquées. Mais pour celui (moi en l'occurrence) qui a la chance d'y habiter, c'est un cadre beau, apaisant et dynamique. Tout est accessible en vélo très facilement, et les installations sportives sont bonnes et abordables pour les étudiants : j'ai pu pratiquer la natation, la course à pied et l'escalade quasiment quotidiennement. La proximité de la ville avec Londres en train (quarante-cinq minutes de trajet) permet de palier à tout manque culturel ou de dynamisme que l'on peut ressentir le week-end (expositions, théâtre et sorties en général peu chères) dans cette ville très tranquille voire endormie pendant les vacances scolaires.

J'ai également beaucoup apprécié la diversité des étudiants à Cambridge. Que ce soit au sein des équipes de recherches ou de ma collocation par exemple, les gens font tous quelque chose de différent. J'ai ainsi pu découvrir certains aspects de chimie, biologie, philosophie que seule une rencontre avec un étudiant en la matière peut révéler. En parallèle, la présence de beaucoup de français venant de formations proches de la mienne (ENS, polytechnique, centrale etc...) m'ont permis de socialiser rapidement, chose peu évidente, à en croire l'expérience d'autres camarades, dans certains pays étrangers.

Cambridge a donc été pour moi un cadre de vie très agréable au sein duquel j'ai été stimulé intellectuellement en dehors du cadre professionnel, et où j'ai été très vite à mon aise socialement.

Il y a cependant quelques éléments qui ont rendu la vie à Cambridge parfois frustrante, sinon solitaire.

En premier lieu, en tant que *visiting student*, je n'ai pas pu loger dans un *college*. La vie de Cambridge est structurée autour de ces établissements fermés (le plus connu en sciences est Trinity) qui font partie de l'université mais qui possèdent un véritable esprit de corps : chacun vit dans son *college*, mange dans son *college*, va en conférence dans son *college*, a sa salle de sport dans son *college*... En somme, la vie d'un étudiant de Cambridge se passe dans son *college* et le fait de ne pas y avoir

accès est un immense obstacle pour sociabiliser avec des gens qui ont fait leurs études à Cambridge. Et cette difficulté n'est pas seulement physique (au sens où les gens vivent dans leur *college*) mais celui-ci est également un moyen d'identification/de reconnaissance sociale. Sans *college*, on n'a pas fait Cambridge. Cependant, grâce à un ami qui lui faisait partie de l'université, j'ai pu avoir un aperçu de ce qu'est la vie d'un *college*, partie intégrante du charme de la ville.

Cette impression de ne pas être intégré à la vie étudiante de Cambridge est renforcée par l'ambiguïté du statut que nous avons en faisant un stage. Nous ne sommes pas en cours à Cambridge (même si on peut y assister) et donc n'avons pas du tout l'emploi du temps ni le même rythme qu'un étudiant. À leurs yeux, je n'étais pas vraiment un étudiant en master et donc l'un des leurs. De plus, de manière générale, je n'ai côtoyé dans les équipes de recherche que des gens beaucoup plus âgés que moi ; la plus jeune devait avoir vingt-cinq ou vingt-six ans et finissait sa thèse. Cette différence d'âge avec mes collègues, couplée au fait de ne pas être vu comme un étudiant non plus par les autres étudiants a rendu cette expérience parfois très solitaire. J'ai regretté de ne pas avoir pu beaucoup sociabiliser avec des anglais par exemple.

En plus de cette solitude "structurelle", celle liée au fait d'habiter dans une ville où il y a peu d'activités culturelles et peu de gens différents (au sens social, presque toutes les personnes avec lesquelles on discute on fait ou veulent faire une thèse) et la partie la plus négative et peut être la plus inattendue de mon stage. Je n'avais pas pleinement pris conscience de la chance d'être dans une grande ville pour se changer les idées, rencontrer des gens différents qui ne font pas forcément d'études brillantes mais qui ont une vision de la vie moins "tour d'ivoire" que celle que j'ai trouvée à Cambridge (Il y a évidemment le même type de phénomène à l'ENS). C'est cette absence de diversité sociale, qui malgré ses effets évidents sur la propreté de la ville, son bon entretien, m'a le plus dérangé et a contribué à l'impression que j'ai parfois eu d'être enfermé à Cambridge. Pour échapper à cela, je suis rentré très souvent à Paris le week-end, comme beaucoup de français qui ont fait le même type de stage que moi.

Ce stage a donc été une expérience très riche et apaisante, dans un cadre confortable et reposant. j'y ai rencontré des gens passionnant et passionnés par ce qu'ils faisaient. Mais j'ai eu beaucoup de mal à me sentir vraiment chez moi ; j'étais un étranger (au sens social) et ai vécu la solitude qui est associée à cet état.

2 Une première expérience de la recherche

2.1 Travail effectué au cours du stage

À mon arrivée à Cambridge, M. Berestycki m'a proposé deux sujets et j'ai choisi de travailler sur les cartes aléatoires et plus précisément à partir d'un article de S. Sheffield (voir [?]).

Durant le premier mois et demi, j'ai travaillé sur cet article, pour le comprendre

et en faire une présentation, et acquis certaines connaissances dans des domaines connexes.

Cet article traite de modèle FK critique infini. Grâce à une bijection entre cartes aléatoires de taille n et mots aléatoires à $2n$ lettres dans l'alphabet $\Theta = \{c, h, C, H, F\}$ suivant une certaine loi (qui dépend uniquement d'un paramètre $p \in [0, 1]$) et vérifiant une certaine condition de "réductibilité", il définit ce modèle infini comme limite en loi de modèles FK critique de taille n . Du point de vu "mot", une carte aléatoire infinie est un mot bi-infini $\omega \in \Theta^{\mathbb{Z}}$. Ces mots aléatoires sont une façon très commode et facile à définir, et mon travail n'a ensuite porté que sur eux et non sur les cartes aléatoires elle-même. Sheffield prouve ensuite la convergence en loi d'un certain rescaling d'une quantité $A_n = (C_n, D_n)$ issue de ce mot bi-infini, qui a des correspondances géométriques importantes avec la carte aléatoire associée (nombre de boucles autour d'un point par exemple). C'est sur cette convergence et ses conséquences que j'ai principalement travaillé tout au long de mon stage.

En plus de la compréhension de cet article, j'ai également lu d'autres cours et articles sur des sujets connexes, utilisés par le groupe de M. Berestycki, notamment les SLE et le champ libre gaussien (GFF). J'ai également du faire un cours de calcul stochastique en parallèle (j'ai suivi le livre de cours de Le Gall). Durant ce premier mois et demi, j'ai donc travaillé pour appréhender un peu les thématiques de mon groupe et plus spécifiquement celles de l'article à partir duquel j'ai travaillé durant l'ensemble de mon stage.

Les deux semaines suivantes (fin avril-début mai), j'ai pu commencer à travailler sur l'objectif fixé avec M. Berestycki au début du stage. Dans son papier, Sheffield montre une convergence en loi "intéressante" en régime sous-critique (lorsque le paramètre du modèle vérifie $p < 1/2$). M. Berestycki pense qu'il y a également une convergence intéressante dans le cas $p = 1/2$ mais avec un autre rescaling. J'ai donc cherché à trouver ce rescaling en faisant un modèle auto-consistant, i.e. en supposant vraie la convergence que l'on anticipait et voir quelles fonctions de rescaling pouvaient correspondre. Ce travail m'a permis d'établir une conjecture (dont la formulation exacte peut être trouvée dans la deuxième partie de ce rapport).

La suite logique eut été de prouver cette conjecture. Au bout d'un mois d'essai (jusqu'à début juin), cela nous a paru hors d'atteinte. En effet, j'ai eu beaucoup de mal à comprendre en profondeur l'article de Sheffield, que j'ai beaucoup retravaillé pour comprendre plus en détail les raisons/mécanismes de cette convergence. Il aurait fallu ensuite comprendre pourquoi la fonction de rescaling que j'avais conjecturé était la bonne, ce que je n'ai pas non plus réussi à faire.

Alors que je butais sur la preuve de cette conjecture, j'ai travaillé sur deux autres projets. J'ai fait un groupe de lecture avec un camarade de l'ENS sur de l'analyse de Fourier (à partir du livre *Fourier Analysis* par Javier Duoandikoetxea) et j'ai également continué mes lectures sur les SLE et le champ libre gaussien à partir des notes de cours de N. Berestycki et W. Werner.

Le dernier mois et demi de mon stage (début juin-mi juillet), N. Berestycki m'a suggéré de m'intéresser aux exposants du nombre de boucles dans les cartes aléatoires infinies en cas sous-critique en utilisant le résultat de Sheffield. En effet, cet exposant

a déjà été obtenu par des moyens différents par Borot, Bouttier et Duplantier (voir [?]), mais la vision géométrique apportée par Sheffield et déjà utilisée par Berestycki, Laslier et Ray dans [?] permettait une approche intéressante. C'est donc sur cela que je me suis concentré sur la fin de mon stage et j'ai obtenu quelques résultats présentés dans la deuxième partie de ce rapport.

L'aspect purement professionnel de mon stage peut donc se résumer en deux parties toujours traitées en parallèle : l'une concentrée autour de l'article de Sheffield, de sa compréhension et de son utilisation, et l'autre moins ciblée pour appréhender le domaine de recherche de l'équipe de N. Berestycki et pour poursuivre mes intérêts mathématiques personnels.

2.2 Vie d'universitaire et de chercheur à Cambridge

Au delà des aspects théorique et de travail effectif, ce stage m'a permis pour la première fois de voir ce qu'était le quotidien d'un chercheur/universitaire. Malgré un an et demi à l'ENS, il m'était difficile de concevoir ce que faisait un chercheur, comment il organisait son temps, les événements qui rythmaient son travail. J'en ai eu un bon aperçu à Cambridge.

Le premier élément qui rythmait la vie des chercheurs de Cambridge (et la mienne d'une certaine façon) était les cours. Même si les "trimestres" (il y a trois *terms* qui durent deux mois chacun) sont courts, le cumul des cours proprement dits et des tutorats remplissent déjà beaucoup l'emploi du temps pendant ces périodes (Clément Mouhot par exemple donnait environ 15h de cours par semaine dans divers endroits de Cambridge!). En tant que *visiting student*, j'ai suivi quelques cours. L'esprit est assez différent des cours que j'avais eu pour l'instant ; de manière générale, chaque cours se voulait plus une introduction à son sujet que quelque chose de très rigoureux et précis comme on en a eu pour l'instant à l'ENS. Ce sera peut-être plus le cas en M2.

Le deuxième, qui est probablement celui auquel je m'attendais le moins, est l'importance pour les chercheurs d'une certaine expérience (et même de certains post-docs et thésards) des publications et des arbitrages de publications. Je n'avais pas mesuré le temps nécessaire pour faire tourner les journaux mathématiques et qu'il y avait finalement (pour les revues de probabilité en tout cas) peu de revues qui avaient de réels salariés. Plus généralement, les fonctions plus administratives de beaucoup de chercheurs plus âgés (postes au sein de comités divers de l'université par exemple) sont beaucoup plus chronophages que ce que j'avais imaginé.

Le troisième, auquel je m'attendais plus mais dont je voulais découvrir la forme, est le temps passé à échanger avec d'autres chercheurs, que ce soit informellement ou au travers de conférences. J'ai notamment pu assister au séminaire de géométrie aléatoire de Cambridge, qui a duré une semaine, et où l'on voit à la fois la diversité et les rapprochements possibles entre différents sujets. De même, les rapports entre thésards et maître de thèse rythme aussi le travail de ces derniers. De façon plus informelle, les thés de N. Berestycki avec son équipe permettaient de débloquer certaines situations, de voir certains problèmes sous différents points de vue, que

l'on peut ensuite recréer par soi-même. Je pense d'ailleurs que c'est une des choses qui m'a manqué dans ce stage, la capacité à demander de l'aide à certains moments sur des éléments précis ; savoir quoi demander n'est pas si évident.

Bien sûr, le travail personnel et solitaire a une grande part dans la vie des chercheurs que j'ai côtoyés, mais j'ai été content, voire surpris de voir à quel point cette vie était rythmée par des tâches moins "abstraites" ou des échanges ; cela permettait d'aérer les journées qui m'auraient semblé sinon très longues et encore plus difficiles.

2.3 Vécu personnel du stage : une confrontation à la recherche

J'ai vécu ce stage comme une véritable confrontation à la recherche. Même si je l'attendais, j'ai trouvé mentalement très éprouvante cette première rencontre avec la vie de chercheur. Très instable même émotionnellement, cette période a néanmoins été très riche à la fois scientifiquement et personnellement et m'a été indispensable pour faire un choix d'orientation pour le master deux.

La première phase du stage a été une forme de mur à franchir : je ne comprenais rien à mon sujet, à celui des thésards et post-docs autour de moi, je ne connaissais rien au domaine, je ne suivais pas du tout aux conférences où j'étais perdu au bout de cinq minutes. La quantité de connaissances à accumuler et le temps nécessaire était un premier obstacle, et forçait l'humilité ; il fallait accepter que même à la fin du stage, je ne comprendrais pas grand chose. Pour cela, la thésarde de N. Berestycki m'a apporté de précieux conseils. Mais cette période de rattrapage rapide sur un domaine où je ne connaissais rien a été une première épreuve longue et très solitaire.

Au bout d'un mois, après cette partie plutôt passive (même si elle a continué en parallèle, je m'y suis plus habitué), est venue une deuxième phase active totalement différente : celle de la recherche de résultats. Je n'en avais encore jamais fait à cette échelle, sur des sujets où peu voire rien n'est connu, et où il fallait que je me débrouille tout seul. Cette partie de mon travail m'a beaucoup affecté mentalement ; le sujet étant passionnant, j'ai eu des pics de travail très intenses, mais les déceptions étaient d'autant plus grande lorsque ce que je faisais ne marchait pas, ou que je me rendais compte que je me compliquais beaucoup trop la vie et que ce que je cherchais n'était qu'une forme bête d'un résultat bien connu. Surtout, le fait de ne pas avoir de résultats du tout pendant un mois a été très démoralisant même si le processus a été très riche.

Cette expérience de la recherche fondamentale m'a fait prendre conscience que je préfère l'esprit des mathématiques appliquées ; j'ai besoin de produire quelque chose ; et si je bloque sur un problème, j'ai besoin de pouvoir faire des simulations, d'avoir un objet tangible sur lequel travailler et sur lequel je peux faire quelque chose de plus mécanique. Ma grande frustration de ce stage est mon manque de productivité ; j'ai parfois eu du mal à trouver du sens dans ce que je faisais, à aimer assez mon sujet pour me battre dans le vide. Ce stage a été pour moi d'une aide

très précieuse pour me décider à m'orienter vers les mathématiques appliquées en ayant eu un aperçu des mathématiques théoriques.

Deuxième partie

Textes écrits pendant le stage

In this paper, we summarize the mathematical content of our 4-month internship under the direction of Nathanaël Berestycki. This work is centered around random planar maps in the critical-FK model, and more specifically around a theorem due to Sheffield (see [?]) which describes the infinite critical-FK random map by a scaling limit to a two-dimensional Brownian motion. From this theorem, we tried to investigate two problems.

The first was to find a conjecture for the convergence of the critical-FK random map in the critical case (see section 1 for the definition of the critical case). The aim was to have a self consistent model which would allow us to guess the appropriate rescaling function. This is only a conjecture as we considered the proof was out of reach for us.

The second was to find certain loop exponents using Sheffield's results. These exponents have already been computed using partition and characteristic function methods (see [?]), but we tried to use a different methods using the properties of Brownian motion. These ideas and certain results originally came from a paper by Berestycki, Laslier and Ray (see [?]).

This paper is therefore organised as follows. In the first section, we present the infinite critical-FK random map and the important result by Sheffield. In the second section, we express and motivate our conjecture for the critical case. In the third, we calculate certain critical exponents.

3 Random planar maps and the Sheffield bijection

3.1 Finite random planar maps in the critical-FK model

In this section, we follow the definitions given in the article by Chen (see [?]) which presents the critical-FK model in a very clear and concise way.

Finite planar maps

A *finite planar map* M is a proper embedding of a finite connected graph in the sphere \mathbb{S}^2 (or alternatively $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$) up to orientation preserving homeomorphisms. A map can have multiple edges and loops (see figure ?? for example).

Given a finite planar map M , its *dual map* M^\dagger is the map whose vertices (called the *dual vertices*) correspond to the faces of M (the connected components of the complementary of the graph). Each edge in M separates two faces, i.e. is in between two dual vertices in $V(M^\dagger)$. Therefore, for each edge in M , one can define a dual

edge whose incident points are these two faces, i.e. dual vertices; these dual edges are the edges of the dual map (see figure ??).

Since in M we ask for the graph to be connected, we have duality : $(M^\dagger)^\dagger = M$.

We will use the following conventions in all our examples of maps :

- red vertices and edges are for the (primal) map M ;
- blue vertices and edges are for the dual map M^\dagger ;
- black edges are the edges of the quadrangulation $\mathcal{Q}(M)$ (see figure ??).

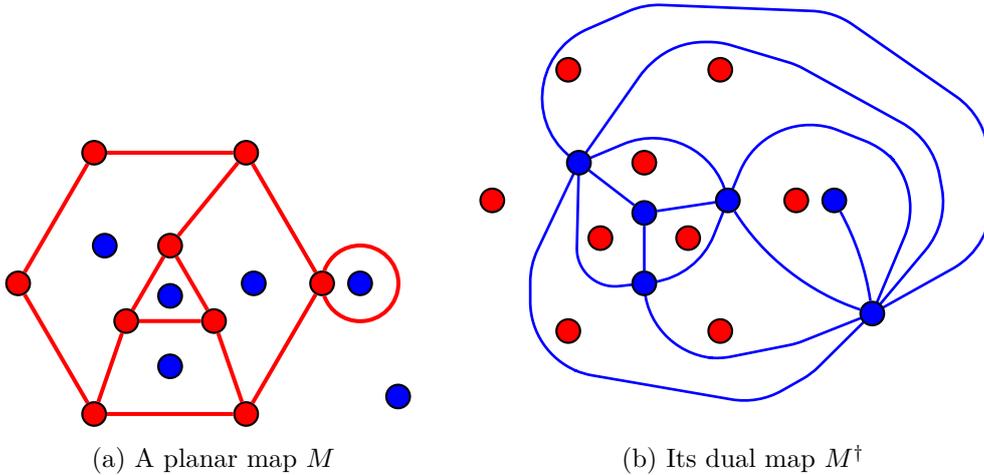


FIGURE 1 – Examples of graphs

If we have a finite planar map M and its dual map M^\dagger , define $\mathcal{Q}(M)$ to be the map where $V = V(M) \cup V(M^\dagger)$ and where, for each edge e of M , for each endpoint v of e and each face w adjacent to e , there is an edge between v and w in $\mathcal{Q}(M)$. The resulting map is a quadrangulation and a bipartite graph (see figure ??). It is interesting to note what happens in case of a loop.

Note that each quadrangle in the quadrangulation corresponds to one primal and one dual edge (its diagonals, see figure ??).

Given a planar map M , a root is an edge of $\mathcal{Q}(M)$ which we orient from the dual vertex to the primal one. We shall note this root r . Equivalently, one can choose a primal vertex and a face adjacent to that vertex. From the root, we can define the primal root edge which is the first primal edge in the clockwise direction from r , and the dual root edge which is the first dual edge in the counter-clockwise direction from r (see figure ??). Note that both the primal root edge and dual root edge are in the same quadrangle in the quadrangulation $\mathcal{Q}(M)$. All this makes sense because of our invariance by orientation preserving homeomorphism. A planar map endowed with a root is called a *rooted planar map*.

If r is a root of M , reverting the orientation of r , we get a natural root of M^\dagger .

A *subgraph rooted map* is a rooted planar map M , and a subgraph G of the map M (note that G no longer needs to be connected, see figure ??). We usually write

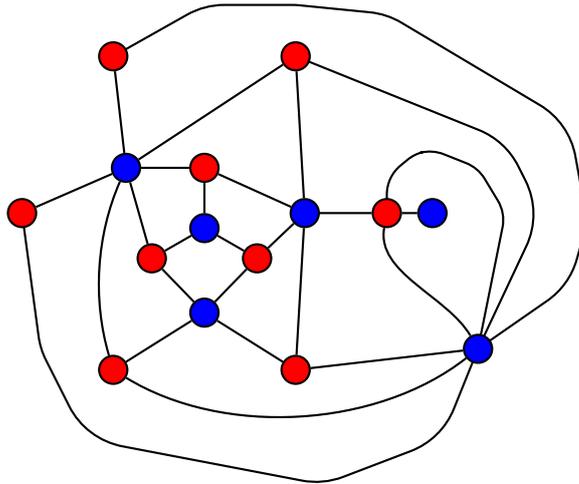
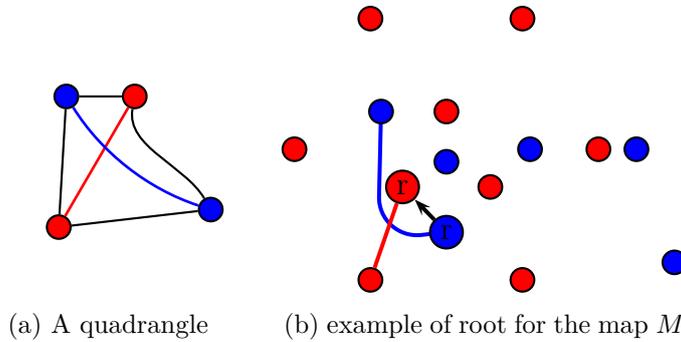


FIGURE 2 – The quadrangulation $\mathcal{Q}(M)$



(a) A quadrangle (b) example of root for the map M

FIGURE 3 – Some more details on the map M

(M, G) or simply G if the underlying map is evident (the underlying root is always assumed).

If G is a subgraph rooted map, then we can define G^\dagger its dual subgraph rooted map as the subgraph of M^\dagger (with the natural root) whose edges do not intersect edges of G , see figure ??.

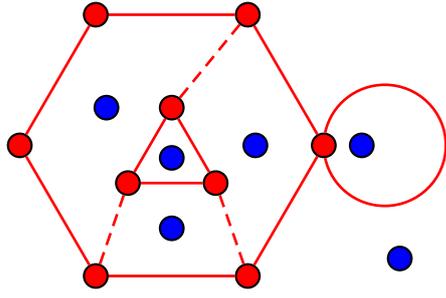
Note that if G is a subgraph rooted map, adding the edges of G and G^\dagger to $\mathcal{Q}(M)$ forms a triangulation $\mathcal{T}(G)$ (see figure ??). This triangulation will be important in the next section.

Local distance, local limit

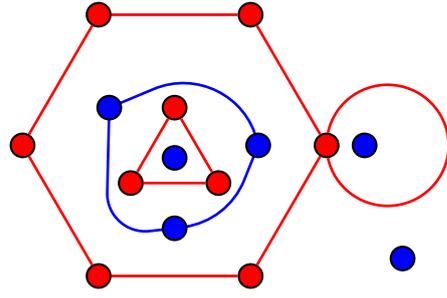
Given a subgraph rooted map (M, G) and $R \in \mathbb{N}$, define $\mathcal{B}_R(M, G)$ to be the subgraph rooted map whose root is the primal root vertex, whose map is the submap of M whose vertices are at graph distance less than R from the primal root vertex and with the edges between these vertices, and whose subgraph is induced by G .

We can define the *local distance* between finite subgraph rooted maps :

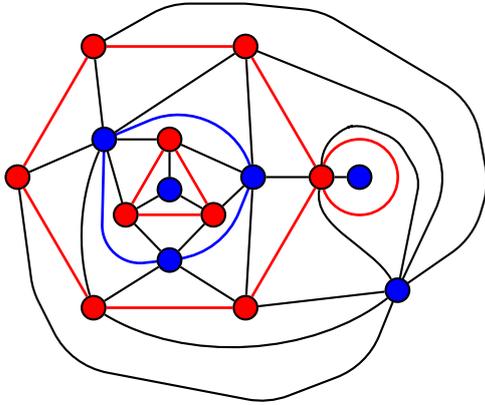
$$d_{loc}((M, G), (M', G')) = \inf \{2^{-R} : \mathcal{B}_R((M, G)) = \mathcal{B}_R(M', G')\}$$



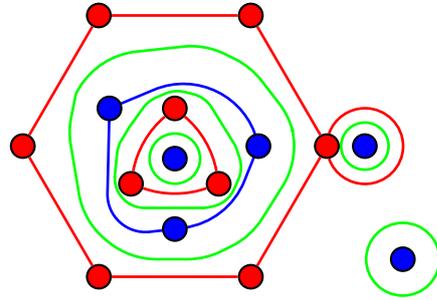
(a) A subgraph rooted map G



(b) G and G^\dagger



(c) The triangulation $\mathcal{T}(G)$



(d) Loops separating G and G^\dagger (in green)

Note that the set of finite subgraph rooted maps is not complete with respect to the local distance; we will note \mathcal{M} its Cauchy completion. The elements of \mathcal{M} which are not finite subgraph rooted maps can be seen as a limit of growing (in terms of distance to the root) finite subgraph rooted maps (one could take growing balls), and therefore as infinite subgraph rooted maps; these maps are locally finite.

cFK random maps

Fix $n \geq 1$ and let \mathcal{M}_n be the (finite) set of all subgraph rooted maps with n edges (which means the underlying map M has n edges). For a subgraph rooted map (M, G) , recall that by definition, G and G^\dagger do not intersect. Let $l(M, G)$ be the number of loops separating G and G^\dagger (see figure ??). It is easy to see that $l(M, G)$ is the number of connected components of $\mathbb{S}^2 \setminus (G \cup G^\dagger)$ or that $l(M, G) = c(G) + c(G^\dagger) - 1$.

For $q > 0$, we define $\mathbb{Q}_n^{(q)}$ to be the probability distribution on \mathcal{M}_n defined by

$$\mathbb{Q}_n^{(q)}(M, G) \propto \sqrt{q}^{l(M, G)}$$

a *critical-FK random map* of size n and of parameter q is a random variable whose law is $\mathbb{Q}_n^{(q)}$. Our goal is to determine a random variable whose law is a limit

in law of the $\mathbb{Q}_n^{(q)}$ for the local distance (q being fixed). In principle, this object will have the local properties of the finite critical-FK random maps; its law will depend on the local number of loops.

3.2 The Sheffield "hamburger-cheeseburger" bijection for finite maps

In this section we will describe a bijection between finite subgraph rooted maps and certain words in the alphabet $\Theta = \{h, c, H, C, F\}$.

Around words in the alphabet Θ

Let $w \in \Theta^I$ be a word indexed by an interval I of \mathbb{Z} . One can see such a word as a succession of burgers and orders in a restaurant that produces cheeseburgers (c -s) and hamburgers (h -s). Customers can order either a cheeseburger C , a hamburger H or the burger on top of the stack, not knowing a priori its type F (the customers must be served immediately or not at all, they only take burgers if they have it in stock).

A word can therefore be seen as a series of burgers and orders. Given a word w , one can create an association function $\phi : I \rightarrow I \cup \{+\infty, -\infty\}$ where ϕ matches every burger index either to the index of the order that consumes it or to $+\infty$ if it is never consumed, and every order to the burger it consumes or $-\infty$ if there were no burgers left.

For a word w , let \bar{w}^λ (resp \bar{w}^Λ) be the word (in this case we do not care about the indexation, only the order) made of burgers (resp orders) whose image by ϕ is not in I (they are not associated to another order resp burger). If w is finite, then one can define the reduced word $\bar{w} = \bar{w}^\Lambda \bar{w}^\lambda$. For any word w , we write $\bar{w} = \emptyset$ if $\bar{w}^\Lambda = \emptyset$ and $\bar{w}^\lambda = \emptyset$ ie if every burger is associated to an order and vice versa.

We will now introduce some random words who will be the equivalent of our random maps.

For $n \in \mathbb{N}$, define $\mathcal{W}_n := \{w \in \bigcup_{k=0}^n \Theta^{[-k, 2n-k)} : \bar{w} = \emptyset\}$ and $\mathcal{W}_\infty := \{w \in \Theta^{\mathbb{Z}} : \bar{w} = \emptyset\}$. If $p \in [0, 1)$ define $\theta^{(p)}$ to be the law on Θ such that

$$\theta^{(p)}(h) = \theta^{(p)}(c) = \frac{1}{4}, \quad \theta^{(p)}(H) = \theta^{(p)}(C) = \frac{1-p}{4}, \quad \theta^{(p)}(F) = \frac{p}{2}$$

For $n \in \mathbb{N}$, let $\mathbb{P}_n^{(p)}$ be the probability measure on \mathcal{W}_n such that

$$\mathbb{P}_n^{(p)}(w) \propto \prod_{i \in \text{supp}(w)} \theta^{(p)}(w(i)) = \left(\frac{1}{4}\right)^n \left(\frac{p}{2}\right)^{\#F} \left(\frac{1-p}{4}\right)^{n-\#F} \propto \left(\frac{2p}{1-p}\right)^{\#F+1}$$

and $\mathbb{P}_\infty^{(p)} = \theta^{(p)\otimes\mathbb{Z}}$ a measure on $\Theta^{\mathbb{Z}}$. It is easy to prove that $\forall p \in [0, 1]$, $\bar{w} = \emptyset$ as

It is possible to show (see [?]) that $\mathbb{P}_n^{(p)} \xrightarrow{(d)} \mathbb{P}_\infty^{(p)}$ with respect to a certain local distance $D_{loc}(w, w') = \inf \{2^{-R} : w|_{[-R, R] \cap \text{supp}(w)} = w'|_{[-R, R] \cap \text{supp}(w')}\}$

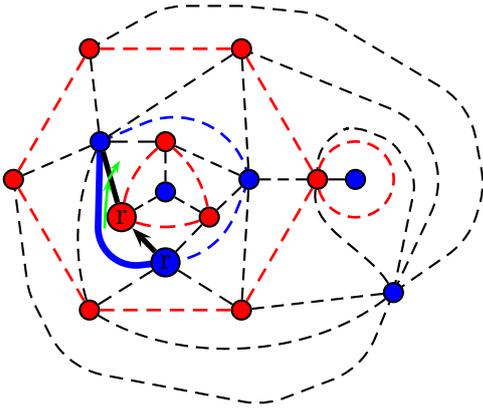
We will now show a bijection between words w of size $2n$ such that $\bar{w} = \emptyset$ and subgraph rooted maps of size n .

From a subgraph rooted map to a word

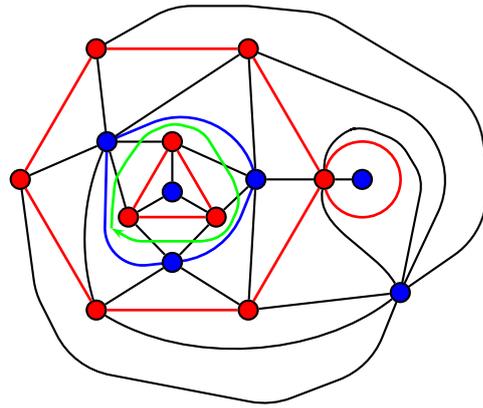
Let $n \in \mathbb{N}$ and $(M, G) \in \mathcal{M}_n$ be fixed. The idea is to create an exploration path through the triangulation $\mathcal{T}(M, G)$ starting from the root and associate a letter to each triangle in the order of visit.

Note that in the triangulation $\mathcal{T}(M, G)$, there is exactly one triangle containing the root (edge of $\mathcal{Q}(M)$) and either the primal or dual root edge (since they are in the same quadrilateral). This is the starting triangle of our exploration path, and we will go in the direction of the adjacent triangle **opposed** to the root (see figure ??)

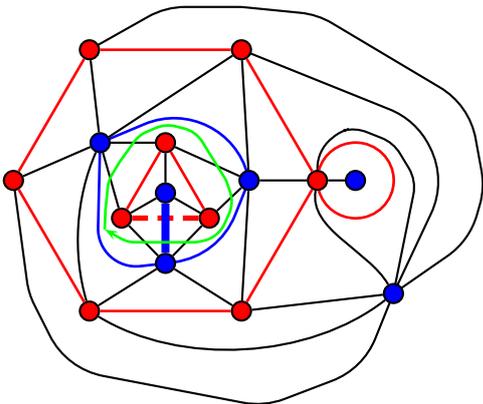
The idea is therefore to go from one adjacent triangle to the other starting the way stated above. There are two types of triangle; they are either associated to a primal (red) edge, or a dual (blue) one. We construct the associated word as follows : if it is the first time we encounter a primal edge, we mark it h , if it is the first time we encounter a dual edge, we mark it c , and if it is the second time we use the capital letters H and C respectively. But as we see in figure ??, doing this, we can only go along one loop, without necessarily exploring all triangles.



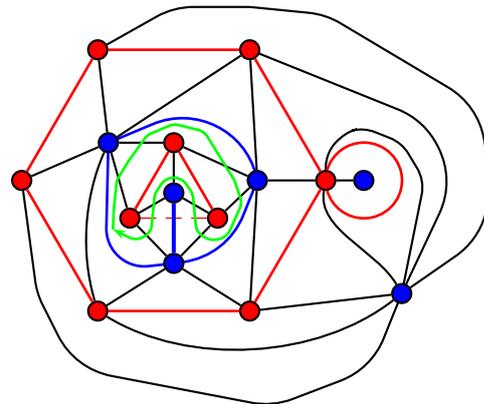
(a) Starting triangle (bold) and direction



(b) First loop ($chchch$)



(c) First flip



(d) Second loop ($chchccHHF$)

We therefore need to modify our map to have only one loop separating the subgraph and dual subgraph (that is when both the subgraph and dual subgraph are spanning trees), in a natural, reversible way. To do this, we will progressively

incorporate the different loops to the main one, while somehow keeping track of the place we incorporated these loops using the "flip" letter F .

We proceed recursively as follows. We start from the first triangle and follow the triangulation in the direction stated above. We obtain a word (in our example $chchch$). If one triangle has not been visited (which means one of the loops has not been visited), we look at the last triangle adjacent to a triangle that is *not* been visited by our exploration path (the last edge adjacent to an unvisited loop). We then look at the corresponding quadrangle and *flip* the edge; we turn a primal edge in a dual one and vice versa (see figure ??). This will allow us to visit one more loop. Then we try doing the exploration path again, but for the flipped edge, instead of putting a capital H or C the second time we visit it, we will put a capital F . While the exploration path doesn't cover the whole of the triangulation, we repeat this operation (see figure ?? for the whole process for our example; in the end we get $chchhhhChhhCcHHHhCFFFcHHF$).

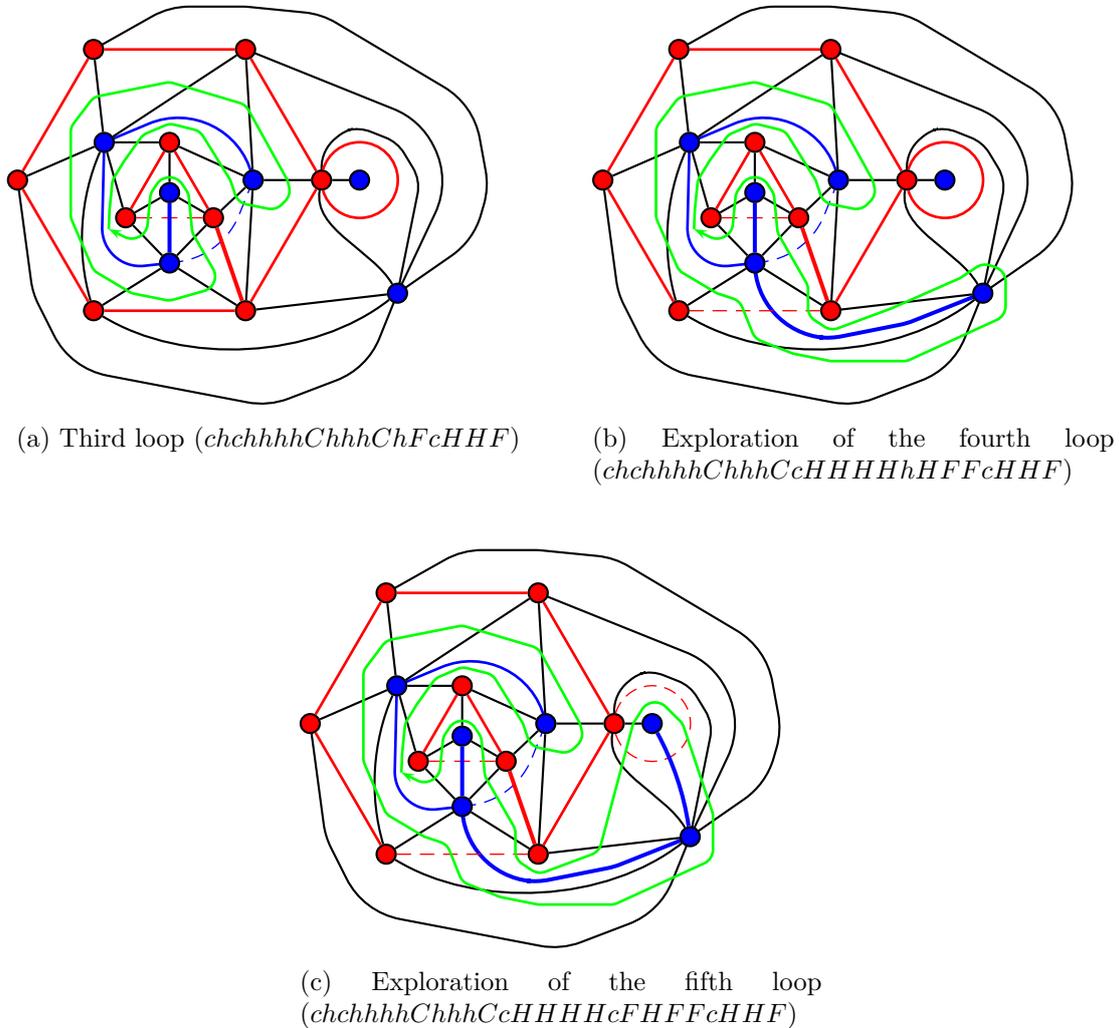


FIGURE 4 – Next steps to construct the exploration path and the associated word

Note that the resulting word w satisfies $\bar{w} = \emptyset$ and that ϕ associates the two triangles of each quadrangle (the two times the exploration path passes around one

same edge). We will not prove this; the principle arguments are given by Chen in [?].

From word to subgraph rooted map

Reverting this bijection is, in principle, fairly simple. First, given a word w such that $\bar{w} = \emptyset$, one computes the association function ϕ and replaces the F s by the order of the same type as the burger the F is associated to. This will give us a word with no F s. Then we can glue triangles following this word in order to get the triangulation of a spanning tree. Then we flip the edges that were originally marked with an F . This is very clearly explained by Chen in [?].

We therefore have, for all n , a bijection between \mathcal{M}_n and \mathcal{W}_n (up to the choice of the indexation interval; one can for example choose a second fictive root for a subgraph rooted map, see [?] for details). Note that since $l(M, G) = \#F + 1$, we have preservation of measure between $\mathbb{Q}_n^{(q)}$ and $\mathbb{P}_n^{(p)}$ if $\frac{2p}{1-p} = \sqrt{q}$ ie $p = \frac{\sqrt{q}}{2+\sqrt{q}}$.

There is a similar way of associating an infinite subgraph rooted map to a word in \mathcal{M}_∞ and vice-versa. Taking the image law of $\mathbb{P}_\infty^{(p)}$, we obtain a law $\mathbb{Q}_\infty^{(q)}$ which is the limit in distribution of the $\mathbb{Q}_n^{(q)}$ s with respect to the local distance (for more proof, see [?] or [?]). A random variable with law $\mathbb{Q}_\infty^{(q)}$ is called an infinite cFK random map. Since the law $\mathbb{P}_\infty^{(p)}$ is very easily defined, it is very useful to study bi-infinite words with this law for $p \in [0, 1]$.

3.3 Sheffield's theorem

In this section, we cite Sheffield's theorem, around which we worked during our whole internship. There is a lot more to paper [?] than this lone result, but it is the most important for the rest of this paper. Not only is the result important in itself, it also allows to have a "clear" geometric understanding of the problem.

In this section, X is a random variable of law $\mathbb{P}_\infty^{(p)}$. For $i \leq j$, $X(i, j)$ is the reduced word $\overline{X(i) \dots X(j)}$. Define Y to be the word X where all $F = X(i)$ s have been replaced by the order corresponding to $\phi(i)$.

Define the burger count \mathcal{C} (resp the discrepancy \mathcal{D}) as follows.

First for letters, $\mathcal{C}(c) = \mathcal{C}(h) = 1$ and $\mathcal{C}(H) = \mathcal{C}(C) = \mathcal{C}(F) = -1$ (resp $\mathcal{D}(c) = \mathcal{D}(H) = -11$ and $\mathcal{D}(h) = \mathcal{D}(C) = 1$)

Then, for $i, j \in \mathbb{Z}$, define $\mathcal{C}(i, j) = \sum_i^j \mathcal{C}(X(i))$ (resp $\mathcal{D}(i, j) = \sum_i^j \mathcal{D}(Y(i))$). We will simply note $\mathcal{C}_n = \mathcal{C}(1, n)$ and $\mathcal{D}_n = \mathcal{D}(1, n)$.

The burger count \mathcal{C}_n is not very interesting in itself, it is a SRW and its behavior is well known. However, the discrepancy \mathcal{D}_n is much more complicated. For one, it is not a Markov chain; the value of $\mathcal{D}(Y(i))$ depends on the past if $X(i) = F$. The discrepancy measures the local inequalities between primal and dual edges; therefore it is linked to the size of loops. We can feel that \mathcal{D}_n depends strongly on p . If p is big, there will be more F s, which, by taking the last burger, have a tendency to reduce the discrepancy.

Theorem 3.1 (Sheffield). *Let $\alpha = \max\{1 - 2p, 0\}$ and $\mathcal{A}_t = (\mathcal{C}_t, \mathcal{D}_t)$ the linear interpolation of the discrete process $\mathcal{A}_n = (\mathcal{C}_n, \mathcal{D}_n)$. Then with respect to the L^∞ convergence on every compact subset of \mathbb{R}_+ ,*

$$n^{-1/2} A_{nt} \xrightarrow{(d)} (B_t^x, B_{\alpha t}^y)$$

where B^x and B^y are two independant standard Brownian motions.

Note that there is a critical value $p = \frac{1}{2}$. If $p < \frac{1}{2}$, with the same rescaling as a SRW, the discrepancy looks like a Brownian motion. If $p \geq \frac{1}{2}$, the F symbol reduce the discrepancy a lot more and balances the two types of burgers.

4 A conjecture for the critical case

The aim of this section is to provide a conjecture for a Donsker type result in the critical case. Simulations show there is hope for such a scaling limit to exist and of having a result of the form :

Conjecture 1. *Suppose p to be the critical value $p = \frac{1}{2}$.*

Let \mathcal{C}_n and \mathcal{D}_n be the burger count and discrepancy as defined above. Then

$$\left(\sqrt{n}^{-1} \mathcal{C}_{\lfloor nt \rfloor}, f(n) \sqrt{n}^{-1} \mathcal{D}_{\lfloor nt \rfloor} \right) \xrightarrow{(d)} (B_t^x, B_t^y)$$

where (B^x, B^y) is a two dimensional Brownian motion with a certain covariance matrix.

Actually, just assuming that $\left(\sqrt{n}^{-1} \mathcal{C}_{\lfloor nt \rfloor}, f(n) \sqrt{n}^{-1} \mathcal{D}_{\lfloor nt \rfloor} \right)$ converges to some two-dimensional brownian motion, the covariance matrix is necessarily of the form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & ? \end{pmatrix}$$

Indeed, the cross terms are to be zero by symmetry if we exchange cheeseburgers and hamburgers (c -s and h -s), and $\mathcal{C}_{\lfloor nt \rfloor} \xrightarrow{(d)} B_t^x$ a normal one dimensional brownian motion by Donsker's theorem for a simple random walk.

The goal is to conjecture what $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ looks like. In the sub-critical case ($p < \frac{1}{2}$), f is a constant ($\frac{1}{\sqrt{1-2p}}$, see [?]). As p grows towards $\frac{1}{2}$, \mathcal{D}_n grows smaller ; the increased probability of having an F balances the discrepancies more and more until, for $p \geq \frac{1}{2}$, the order of \mathcal{D}_n is no longer \sqrt{n} . We will therefore assume that f is an increasing function which tends to infinity.

The idea to conjecture what f looks like is fairly simple : we will assume convergence and approximate the variance of \mathcal{D}_n in two different ways using this assumption. The first way is straightforward and yields $\mathcal{D}_n \approx \frac{f(n)^2}{n}$. The second way is given in the following subsections.

4.1 A variance calculation

The following calculation is mainly due to Sheffield, see [?], **3.1**.

Recall that in this case $p = \frac{1}{2}$. In his paper, Scott Sheffield defines $J = \inf \{j \geq 1 \mid X(-j, -1) \text{ contains a burger}\}$ and $\chi := \mathbb{E}(|X(-J, -1)|) = \mathbb{E}(|\mathcal{D}(-J, -1)|)$ and proves that $\chi = 2$ if $p \leq \frac{1}{2}$.

We can show $\mathbb{E}[\mathcal{D}(-J, -1)\mathcal{D}(0)] = -\frac{1}{2}$. Indeed :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathcal{D}(-J, -1)\mathcal{D}(0)] &= \frac{p}{2} \mathbb{E}[\mathcal{D}(-J, -1)\mathcal{D}(0) \mid X(0) = F] \\ &= -\frac{p}{2} \mathbb{E}[|\mathcal{D}(-J, -1)| \mid X(0) = F] \\ &= -\frac{p}{2} \mathbb{E}[|X(-J, -1)| \mid X(0) = F] \\ &= -\frac{p}{2} \mathbb{E}[|X(-J, -1)|] \\ &= -\frac{\chi p}{2} \end{aligned}$$

A small variance calculation gives us :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathcal{D}_n^2] &= \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=1}^n \mathcal{D}(i) \right)^2 \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \underbrace{\mathbb{E}[\mathcal{D}(i)^2]}_{=1} + 2 \sum_{i=2}^n \mathbb{E}[\mathcal{D}(1, i-1)\mathcal{D}(i)] \\ &= n + 2 \sum_{j=1}^{n-1} \mathbb{E}[\mathcal{D}(-j, -1)\mathcal{D}(0)] \quad (\text{translation invariance}) \\ &= n + 2 \sum_{j=1}^{n-1} \mathbb{E}[\mathcal{D}(-J, -1)\mathcal{D}(0)\mathbf{1}_{J \leq j}] + 2 \sum_{j=1}^{n-1} \mathbb{E}[\mathcal{D}(-j, -1)\mathcal{D}(0)\mathbf{1}_{J > j}] \\ &= -2 \sum_{j=1}^{n-1} \mathbb{E}[\mathcal{D}(-J, -1)\mathcal{D}(0)\mathbf{1}_{J > j}] + 2 \sum_{j=1}^{n-1} \mathbb{E}[\mathcal{D}(-j, -1)\mathcal{D}(0)\mathbf{1}_{J > j}] \\ &= -2 \sum_{j=1}^{n-1} \mathbb{E}[|\mathcal{D}(-J, -1)|\mathbf{1}_{J > j}] + 2 \sum_{j=1}^{n-1} \mathbb{E}[\mathcal{D}(-j, -1)\mathcal{D}(0)\mathbf{1}_{J > j}] \end{aligned}$$

If we look empirically at the second term, we can imagine that if $J \gg j$, then $\mathcal{D}(0)$ and $\mathcal{D}(-j, -1)$ are pretty much decorrelated and furthermore $|\mathcal{D}(-J, -1)| \gg |\mathcal{D}(-j, -1)|$ so that the second term is negligible. If J is close to j , that event being of small probability, we can still suppose that the whole term is of same order as $2 \sum_{j=1}^{n-1} \mathbb{E}[|\mathcal{D}(-J, -1)|\mathbf{1}_{J > j}]$. That is the assumption we will make in the rest of this reasoning.

4.2 Finding the renormalisation

Suppose we have

$$(n^{-1/2}\mathcal{C}_{nt}, n^{-1/2}f(n)\mathcal{D}_{nt}) \rightarrow B_t^{2D}$$

Denote by $(h_n), (c_n)$ the hamburger and cheeseburger counts and $V_n = (V_n^x, V_n^y) = (\mathcal{C}_n, \mathcal{D}_n)$

We have of course $h_n = \frac{V_n^x + V_n^y}{2}$ and $c_n = \frac{V_n^x - V_n^y}{2}$.

Then $(h_k)_{1 \leq k \leq n}$ looks like $\frac{B_k^1 + \frac{B_k^2}{f(n)}}{2}$ and $(c_k)_{1 \leq k \leq n}$ looks like $\frac{B_k^1 - \frac{B_k^2}{f(n)}}{2}$

If $J = \inf \{j \geq 1 | X(1, j) \text{ contains an order}\}$, we find that $J > n$ iff $h_k, c_k \geq 0 \forall k \leq n$ "iif"

$$\forall t \leq n, B_t^1 \geq -\frac{1}{f(n)}B_t^2 \text{ and } B_t^1 \geq \frac{1}{f(n)}B_t^2$$

Therefore the event $\{J > n\}$ corresponds with a Brownian motion staying in the cone previously defined whose angle at the origin is $\theta_n = 2 \arctan(f(n)) = \pi - 2 \arctan\left(\frac{1}{f(n)}\right)$. The probability of staying in this cone for time greater than n is of order $n^{-\alpha}$ where $\alpha = \frac{\pi}{2\theta_n} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{\pi} \frac{1}{f(n)} + o\left(\frac{1}{f(n)}\right)\right)$ (see [?] 4.1).

Then we have :

$$2 \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{E}[|\mathcal{D}(-J, -1)| \mathbf{1}_{J>i}] = 2 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{f(i)} i^{-\frac{1}{\pi f(i)} + o\left(\frac{1}{f(i)}\right)} = \frac{n}{f(n)^2}$$

Since $f(n)$ is very slow growing before n (we think it is of order $\log n$), this makes us think that we should have $n^{-\frac{1}{\pi f(n)}} = \frac{1}{f(n)}$ which is true for something that resembles $\frac{\log n}{\log \log n}$

5 Computation of exponents in the subcritical case

In this section, we just introduce the quantities and briefly present one result we think we have obtained. By lack of time, we were not able to draw satisfactory conclusions from these results nor find exactly what we wanted. But as a possibly interesting part of our work, we would like to share the little we have with the reader.

The idea is to look at the number of loops around 0 in the subcritical infinite cFK random map. More specifically, we wish to see how this number grows, depending on p . Our approach was to see what happens in local distance ; we wanted to find an exponent γ such that the number of loops around 0 in the word $X(-n+1) \dots X(n)$ is of order n^γ (the number of loops being the number of times an F after 0 in $X(-n) \dots X(n)$ eats a burger before 0 in $X(-n+1) \dots X(n)$). This exponent can be interesting in linking these infinite cFK models to certain nesting fields like the CLE.

Define, for $k \in \mathbb{Z}$,

$$J_k := \min \{j \in \mathbb{N}, X(k-j, k-1) \text{ contains a burger}\}$$

if $X(k)$ is a F symbol, the burger corresponding to this F order will be in the $k - J_k$ position. We will often denote J_0 simply by J , it is clear by invariance by translation that all the J_k have the same law (which is the law of J).

Let $A_n :=$ number of loops around 0 in the word $X(-n), \dots, X(0), \dots, X(n)$. The goal is to compute the exponent of A_n , i.e. a number γ such that $\mathbb{E}[A_n] = n^{\gamma+o(1)}$.

With our notations, we have :

$$A_n = \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{\{X(k)=F \text{ and } n+k \geq J_k > k\}}$$

using the independance of $X(k)$ and J_k , we get

$$\mathbb{E}[A_n] = \frac{p}{2} \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(k < J \leq k+n) = \frac{p}{2} \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(k < J)(1 - \mathbb{P}(k+n < J))$$

Using the same type of results that we find in [?], 4, we can show that

$$\boxed{\mathbb{E}[A_n] = n^{1-\beta+o(1)}}$$

where $\beta = \frac{\pi}{2\theta_0}$ and $\theta_0 = \pi - 2 \arctan(\sqrt{1-2p})$. Intuitively, that is because $\mathbb{P}(k < J) = k^{-\beta+o(1)}$.

Sketch of the proof

Recall that the hamburger cheeseburger bijection gives us a sequence $(X(i))_{i \in \mathbb{Z}} \in \{h, c, H, C, F\}^{\mathbb{Z}}$. Let S_0 be the burger stack at time 0, define $(Y(i))_{i \in \mathbb{Z}} \in \{h, c, H, C\}^{\mathbb{Z}}$ the sequence in which we have replaced every F symbol by the corresponding H or C symbol.

We define the algebraic burger count U_n^x :

$$U_0^x = 0 \text{ and } U_{n+1}^x - U_n^x = \begin{cases} 1 & \text{if } Y(n+1) = c, h \\ -1 & \text{if } Y(n+1) = C, H \end{cases}$$

and the algebraic discrepancy U_n^y :

$$U_0^y = 0 \text{ and } U_{n+1}^y - U_n^y = \begin{cases} -1 & \text{if } Y(n+1) = c, H \\ 1 & \text{if } Y(n+1) = h, C \end{cases}$$

Then the random walk $U = (U_n)$ lies in the lattice $E = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2, x + y \in 2\mathbb{Z}\}$
Recall the theorem due to Sheffield :

Theorem 5.1 (Sheffield). *We have*

$$n^{-\frac{1}{2}} \left(U_{\lfloor nt \rfloor}^x, \frac{U_{\lfloor nt \rfloor}^y}{\sqrt{1-2p}} \right) \Rightarrow (X_t, Y_t)$$

where p is the parameter of the FK model and (X_t, Y_t) has the law of a 2D non correlated brownian motion.

Define the new random walk

$$V = (V_n) = (V_n^x, V_n^y) := \left(U_n^x, \frac{U_n^y}{\sqrt{1-2p}} \right)$$

whose value lie in the lattice

$$\Lambda := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, y\sqrt{1-2p}) \in E \right\}$$

Our interest here is to estimate the value of $\mathbb{P}(J > n)$.

Define $\tilde{J} = \inf \{j \geq 1, X(1, j) \text{ contains an order}\}$. It is trivial that \tilde{J} has the same law as J . Let us note that if h_n, c_n are the algebraic hamburger and cheeseburger counts respectively, than $\tilde{J} = \inf \{n \geq 1, h_n < 0 \text{ or } c_n < 0\}$. By definition of the random walks U and V , we see that

$$\tilde{J} = \inf \{n \geq 0, U_n^x + U_n^y < 0 \text{ or } U_n^x - U_n^y < 0\}$$

$$= \inf \left\{ n \geq 0, V_n^x + \sqrt{1-2p}V_n^y < 0 \text{ or } V_n^x - \sqrt{1-2p}V_n^y < 0 \right\}$$

If we define the cone $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y\sqrt{1-2p} > 0, x - y\sqrt{1-2p} > 0\}$ then

$$\tilde{J} = \inf \{n \geq 0, V_n \notin \bar{C}\}$$

For questions of convenience, it is easier to study

$$\hat{J} = \inf \{n > 0, V_n \notin C\}$$

It is easy to see that there is no big difference between the two approaches :

Lemma 1. *For $\beta > 0$, the following are equivalent*

- $\mathbb{P}(\tilde{J} > n) = n^{-\beta+o(1)}$
- $\mathbb{P}(\hat{J} > n) = n^{-\beta+o(1)}$

The proof of the result itself is harder, moreover we need to be a bit more specific in order for it to work correctly. For full detail, see [?], 4.

The key idea is to get submartingale and supermartingale properties from the convergence to brownian motion, and then apply them to harmonic functions which open up the cone.

Références

- [1] SHEFFIELD, S., *Quantum gravity and inventory accumulation*, .
- [2] Chen, L., *Basic properties of the infinite critical-FK random map*
- [3] Berestycki, N.; Laslier, B.; Ray, G., *Critical exponents on Fortuin–Kasteleyn weighted planar maps*
- [4] Borot, G.; Bouttier, J.; Duplantier, B., *Nesting statistics in the $O(n)$ loop model on random planar maps*