ECOLE NORMALE SUPERIEURE

Théorie des domaines, espaces métriques et systèmes dynamiques

Rapport de stage du DEA Sémantique, Preuves et Programmation

Gabriele SANTINI

LIENS - 97 - 15

Département de Mathématiques et Informatique

CNRS URA 1327

Théorie des domaines, espaces métriques et systèmes dynamiques

Rapport de stage du DEA Sémantique,

Preuves et Programmation

Gabriele SANTINI

LIENS - 97 - 15

Décembre 1997

Laboratoire d'Informatique de l'Ecole Normale Supérieure
45 rue d'Ulm 75230 PARIS Cedex 05

Tel : (33)(1) 44 32 30 00

Adresse électronique : santini@dmi.ens.fr

Rapport de stage du DEA
Sémantique, Preuves et Programmation

Théorie des Domaines, Espaces Métriques et Systèmes Dynamiques

Gabriele Santini

Directeur de Stage: **Giuseppe Longo**

Etablissement: **LIENS (CNRS-ENS)**

Table des matières

Notations

On a cherché à utiliser les notations les plus universellement reconnues (et à chaque fois on a donné des références spécifiques). Mais comme le lecteur n'est pas supposé connaître les notations de toutes les théories impliquées, on a trouvé utile de recueillir ici quelques notations spécifiques à chaque théorie que l'on rencontrera dans la suite, sans chercher à être exhaustif.

Théorie des ensembles

$A^{\complement}$	Complémentaire de A
$\mathcal{P}(X)$	Parties de X
$Im(f)$	Image de la fonction f

Théorie des domaines

$x \ll y$	x way-below y (y way-above x)
$\bigsqcup^{\uparrow}\Delta$	Extrême supérieure du dirigé Δ
$\uparrow(\downarrow)x$	Ensemble des majorants (minorants) de x
$\twoheaduparrow(\twoheaddownarrow)x$	Ensemble des éléments way-above (way-below) x
$\mathcal{I}(B)$	Completé par ideaux arrondi de B
$\mathbf{B}X$	Espace des boules formelles de X
$\mathbf{P}D$	Domaine puissance de D

Topologie

(X, τ)	Espace topologique de topologie τ
ΩX	Topologie de X
U_x	Voisinage de x
$\overset{\circ}{C}$	Intérieur de C
$\mathbf{C}X$	Espace des boules fermées de X
$x_n \rightarrow x$	x_n converge vers x

Théorie de la mesure

$\Box A \subseteq \mathcal{P}(X)$	Ensembles des parties de X contenues dans A
$\Diamond A$	Ensemble des parties de X que rencontrent A

Analyse fonctionnelle

$BC(X)$	Ensemble des fonctions continues et bornées sur X
$x_n \rightharpoonup x$	x_n converge faiblement vers x

Chapitre 1

Introduction

1.1 Remarque historique

1.1.1 L'étude des systèmes dynamiques

On peut affirmer que l'effort majeur des mathématiciens durant ce siècle pour résoudre un problème "pratique" (j'entends un problème non engendré "à l'intérieur" des mathématiques) a été dirigé vers la compréhension partielle ou mieux qualitative des systèmes dynamiques non-linéaires. Les branches existantes de la mathématique (la géométrie avec l'étude des variétés, l'analyse et les probabilités avec la théorie ergodique) ont essayé chacune de donner une formalisation, un langage au problème avec l'espoir d'en éclaircir certains aspects. De nouvelles branches, comme la topologie, ont eu une impulsion fondamentale quand on a découvert leur capacité d'exprimer certaines propriétés du phénomène. Avec l'introduction de la discrétisation des systèmes dynamiques (et surtout dans le cas monodimensionnel) même une théorie comme la combinatoire, qui semblait éloignée du problème, a trouvé des applications surprenantes.
Dans ce mémoire, on essaie d'exposer une partie du dernier acte de cet effort: l'application des théories des ordres (développées comme "théories des domaines sémantiques" en informatique) à l'étude des systèmes dynamiques. Comme toujours en mathématiques (et pas seulement en mathématiques), la fertilité de l'application a donné lieu à un approfondissement de la théorie et donc à de nouvelles applications, à savoir dans la théorie de la mesure et de l'intégration, ainsi que dans l'étude des espaces métriques.

1.1.2 La théorie des ordres

La théorie des ordres nous semble aujourd'hui une des branches les plus injustement négligées de la mathématique jusqu'aux années 60. Dans le troisième livre de Bourbaki, elle occupe encore une place très limitée, réduite à une partie de la théorie des ensembles, avec des résultats quasi-triviaux si l'on exclut la partie sur les filtres et les ultrafiltres (due notamment à Cartan). La seule exception a été le travail de Birkhoff sur les treillis [Bir48].
La revalorisation des mathématiques discrètes et l'étude de la calculabilité effective ont ramené l'attention sur l'étude des relations transitives et donc des ordres (car on peut toujours définir un ordre a partir d'une relation transitive: il suffit la complémentation par idéaux pour avoir la réflexivité et le quotient par la relation $\leq \cup \geq$, pour avoir l'antisymétrie).
En fait, pour tenter de formaliser l'approximation effective d'un résultat, point crucial pour l'établissement d'une sémantique dénotationnelle des langages de program-

mation, naît autour de l'année 1970 la théorie des domaines, qui se développe avec le logicien et mathématicien Scott en collaboration avec l'informaticien Stratchey. Dans cette théorie on combine la théorie des ordres pensée comme formalisation du concept de meilleure approximation du résultat, avec l'idée de continuité et donc de topologie qui venait de l'étude de la mathématique constructive de A. A. Markov (et en dernière analyse de la démonstration de Brouwer que les fonctions constructives sur les réels ne peuvent qu' être continues) et du théorème de Myhill-Shepherdson. D'une façon essentiellement indépendante, Ershov, dans une série d'articles parus dans Algebra and Logic (1975-78), développe une théorie des domaines équivalente à celle de Scott pour l'analyse de la récursivité dans les types supérieurs.
L'introduction des problématiques de l'informatique dans la théorie des ordres amène un nouvel "insight" dans cette dernière. Aux alentours de l'année 1980 un groupe de travail sur les treillis continus comprenant Scott produit le livre fondamental "A Compendium of Continuous Lattices"[GHK+80]. Dans cet ouvrage on analyse les rapports entre treillis continus et topologie, comprenant une approche catégorielle. La topologie d'un ensemble est un treillis complet, tandis qu'à un domaine on peut associer des topologies standard (Scott, Lawson). Il s'agit d'une petite révolution épistémologique: désormais les "lunettes des ordres" sont prêtes et en Angleterre Abramsky, Vickers et surtout Smyth se posent des questions essentielles sur le rapport entre semi-décidabilité, observabilité finie, topologie.

1.2 Intérêt du travail d'Edalat

Je me propose ici de jeter un regard panoramique sur les résultats récents obtenus dans ce contexte par l'informaticien et mathématicien anglais Abbas Edalat, collaborateur de Smyth. Comme cette branche est vraiment nouvelle, pour l'instant les résultats théoriques ne sont pas de grand relief mathématique, mais l'intérêt vers ce travail est, à mon avis, bien justifié:

- Edalat a réussi à redémontrer et à généraliser le théorème de Hutchinson, [Huc81], fondamental dans la théorie des systèmes dynamiques appelés IFS (voir chap.4 du mémoire), qui dans la démonstration originale requérait beaucoup de résultats d'analyse fonctionnelle. On peut donc espérer avoir trouvé un "raccourci" pour traiter des questions fondamentales des systèmes dynamiques.

- L'approche des boules formelles (décrite dans le chapitre 5) utilisée par exemple pour redémonstrer un résultat très classique comme le théorème du point fixe de Banach, ou pour souligner la symétrie entre les concepts de la théorie des domaines et ceux de la théorie classique des espaces métriques, semble montrer que l'on a découvert une bonne direction pour une formalisation ultérieure de la pensée mathématique: quelque méthode démonstrative utilisant les boules qui faisait partie du "bagage du bon mathématicien" va être explicitée dans le langage de la théorie des ordres. Si on lit la nouvelle démonstration du théorème de Banach, on retrouve sans problème l'ancienne, justifiée avec les domaines.

- Le fait que la théorie utilisée pour cette application soit aussi celle qui a été développée pendant ces dernières années pour la sémantique des langages de programmation a permis de trouver immédiatement toute une série d'applications concrètes dans l'approche informatique des systèmes dynamiques, à son tour l'un des domaines les plus fertiles des applications informatiques (il suffit de penser aux fractales, ou au fait que chaque simulation est la "solution" de la discrétisation d'un système dynamique modèle du problème).

En fait, il suffit de regarder la bibliographie de Edalat pour comprendre l'amplitude et l'importance des applications possibles:

- Dans la décompression des images fractales, où l'on a trouvé des algorithmes plus efficaces [Eda96a], [Eda95c].
- Dans le modèle de Ising pour les champs random dans la physique statistique, où l'on a fourni une méthode de calcul pour des nombreuses quantités physiques, comme la densité d'énergie et la densité de magnétisation [Eda95a].
- Dans les réseaux neuronaux, où l'on a calculé le taux de décroissance de la force d'immersion des patterns mémorisés [Eda95b].
- Pour le calcul des intégrales par rapport à la mesure invariante d'une application de Feigenbaum et l'étude de la bifurcation périodique [Eda96b].
- Pour une nouvelle représentation exacte des réels où l'on a pu trouver des matrices de chiffres pour le calcul dans une base quelconque [EP97].

1.3 Ce mémoire

1.3.1 Résumé

Dans ce mémoire, après ce chapitre d'introduction, on expose les points essentiels sur les liens entre topologie et domaines en suivant surtout les travaux de [Smy92] [AJ94]. Ces travaux sont à la base de l'étude d'Edalat, et permettent de redécouvrir les hyperespaces d'un point de vue "théorie des domaines" (idée de Smyth reprise et développée par Edalat).
Dans le deuxième chapitre on montre le lien créé par Edalat entre la théorie de la mesure classique et la théorie des évaluations continues, développée par Saheb-Djaromi [SD80] et Jones, Plotkin [JP89] pour donner une sémantique dénotationelle aux langages non-déterministes. Avec des hypothèses particulières (que nous allons bien justifier) sur l'espace X de départ, on voit que chaque mesure régulière peut être vue comme une extension d'une évaluation continue maximale. Avec les mêmes hypothèses on voit que l'espace des évaluations continues est un dcpo ω-continu avec comme base certaines évaluations simples et donc on peut approximer la mesure avec une suite croissante d'évaluations simples. Cela permet de définir une nouvelle notion d'intégrale, généralisation de l'intégrale de Riemann. On montre encore que, en raisonnant avec les hyperespaces, les "bonnes hypothèses" précédents sont vérifiées des qu'on trouve une immersion topologique d'un espace métrique séparable X dans son hyperespace et si ce dernier peut être vu comme un dcpo ω-continu. De plus, l'immersion des mesures dans les évaluations continues est une immersion topologique si l'on donne à l'espace des mesures $\mathbf{M^1}X$ la topologie faible (la plus connue des topologies sur les espaces fonctionnels); autrement dit, si l'on identifie $\mathbf{M^1}X$ avec son image dans l'hyperespace, la topologie de Scott est une extension de la topologie faible de $\mathbf{M^1}X$. On va esquisser enfin une méthode générale (mais non-constructive) pour trouver la chaîne d'évaluations simples approximant une mesure donnée.
Dans le troisième chapitre on rappelle d'abord les définitions fondamentales des systèmes dynamiques discrets en suivant l'approche de Devaney [Dev89], et celle de IFS; on voit ensuite comment on peut assez naturellement adapter la théorie des hyperespaces au traitement des systèmes dynamiques et que dans ce contexte les procédures connues de calcul de l'attracteur sont exactement une application du théorème du point fixe de la théorie des domaines. On rappelle le théorème de Hutchinson avec une esquisse de démonstration pour le comparer avec le même résultat obtenu avec la théorie des domaines, et on donne aussi une généralisation du

théorème.
Dans le dernier chapitre on voit l'application aux espaces métriques. Ici on se base surtout sur [EH96]. Si X est métrique on introduit un nouvel hyperespace $\mathbf{B}X$ (espace des boules formelles), qui est une "variante" de l'espace des boules fermées $\mathbf{C}X'$. Il est seulement un po continu, mais ses propriétés croissent d'une façon étonnamment symétrique à celles de X: on démontre que $\mathbf{B}X$ est un dcpo ssi X est complet, ω-continu si X est séparable, et que si l'on complète par idéaux $\mathbf{B}X$ on obtient un espace homéomorphe à $\mathbf{B}\overline{X}$, avec $\overline{X}$ le complété métrique de X. On découvre que $\mathbf{B}X$ n'est qu'un sous-espace de l'espace $\mathbf{C}X'$, où X' est un espace de Banach dans lequel on peut toujours immerger X isométriquement. On démontre l'égalité $\mathbf{B}X = \mathbf{C}X$ si X est un espace vectoriel normé non-trivial. On redémontre le théorème du point fixe de Banach avec la théorie des domaines appliquée à $\mathbf{B}X$. On voit que si X est complet et séparable on peut trouver une immersion d'Edalat dans $\mathbf{B}X$ et donc donner un modèle computationnel ω-continu pour la théorie de la mesure sur X.

1.3.2 Contributions personnelles

Dans la section 3.3.2 je propose, par rapport à [Eda96b], un raccourci pour la démonstration de $Im(e) \subseteq max(D)$ 3.30. En effet, j'extrais de la démonstration faite par Edalat de la prop. 4.1.(i) le "lemme de coupage partiel", 2.24 (en proposant au même temps la définition de *coupage partiel*). Ainsi 4.1.(i) devient le corollaire 3.21 de ce lemme. Puis je place la démonstration 3.30 après celle qui prouve que $e : \mathbf{M^1}X \to \mathbf{P}D$ est une immersion topologique, en en faisant un autre corollaire du lemme de coupage partiel.
Je propose la définition d'*immersion d'Edalat*, parce qu'elle me semble contenir synthétiquement les hypothèses nécessaires pour l'application des résultats de théorie de la mesure. De plus, on peut penser que c'est une immersion d'Edalat qu'il faut chercher si l'on travaille avec des nouveaux espaces.
Je souligne la non-constructivité de la construction de la chaîne d'évaluations approximantes dans ([Eda96b], par. 3) parce qu'elle est présentée comme "construction explicite" et cela peut induire en erreur [1] J'espère développer dans le futur le contrexemple proposé.
Je propose l'interprétation de $\mathbf{B}X$ comme le sous-espace de l'espace des boules fermées d'un Banach dans lequel on peut immerger X isométriquement (en particulier l'espace de Banach $BC(X)$), parce que cela me semble donner une intuition "géométrique" 5.3 du choix de l'hyperespace $\mathbf{B}X$, qui dans [EH96] semble être justifiée seulement *a posteriori* pour les résultats obtenus. Pour ce faire je repropose le résultat 5.5 qui n'est pas très connu même des analystes (je n'ai pas trouvé de références et j'ai dû le redémontrer!).
Enfin, j'ai corrigé certaines petites erreurs dans les démonstrations d'Edalat, et j'ai rendue plus agile la démonstration de 5.2.5 en utilisant les concepts et la terminologie des espaces vectoriels normés.

1. En effet, la recherche d'hyperespaces pour les espaces classiques dans l'espoir d'en extraire une structure constructive qui puisse fournir des nouveaux algorithmes pour ces espaces, me semble reformuler implicitement la question de la mathématique constructive: qu'est qu'il y a de constructif dans la mathématique classique?

Chapitre 2

Topologie et domaines

2.1 Théorie des domaines

Pour les développements suivants il faut une bonne connaissance de la théorie des domaines. On ne peut pas ici donner avec leur démonstration tous les résultats nécessaires. On donne plutôt une référence fondamentale qui est le chapitre sur la théorie des domaines de Abramsky et Jung ([AJ94]), valable également pour les notations, et l'on suppose bien connue la théorie qu'on peut trouver dans ([ACon]). Mais, étant donné que l'objectif de ce mémoire est de présenter un résumé du travail d'Edalat en soulignant et en expliquant les idées fondamentales qui en sont à la base, il faut présenter au moins la notion de "way-below".

Déf. 2.1 (Way-below) *Soit D un ordre partiel. On dit que x est une approximation de y ($x \ll y$) si l'on a:*

$$\Delta \text{ dirigé, } y \leq \sqcup^{\uparrow}\Delta \text{ (qui existe) } \Rightarrow \exists d \in \Delta \; x \leq d.$$

On appelle $\Downarrow x \stackrel{\text{def}}{=} \{y \mid y \ll x\}$ *(et d'une façon analogue on définit* $\Uparrow x$*).*

Comme cela les compacts deviennent les éléments way-below eux-mêmes.

Prop. 2.2 (Stabilité, interpolation)

1. *$\ll$ est contenue dans $\leq$*
2. *(Stabilité) $x \ll y$, $x' \leq x$, $y \leq y' \Rightarrow x' \ll y'$*
3. *(Interpolation) Soit F une partie finie de D. Alors*[1]*:*

$$F \ll z \Rightarrow \exists y \in D \; F \ll y \ll z$$

Déf. 2.3 (Ordre partiel continu) *On appelle D un* po continu *si* $\forall d \in D$, $d = \bigsqcup^{\uparrow} \Downarrow d$.

Rem. 2.4 *Une base pour la topologie de Scott sur un po continu est donnée par* $\{\Uparrow d \mid d \in D\}$.

Déf. 2.5 (Base) *Un dcpo D admet B comme* base *si pour tout x, $B \cap \Downarrow x (\stackrel{\text{def}}{=} \Downarrow_B x)$ est un dirigé qui a comme sup x.*

Les domaines algébriques sont ceux qui admettent une base compacte.

Déf. 2.6 (Domaine ω-continu) *On appelle D* domaine ω-continu *si D admet une base dénombrable.*

1. Ici comme ailleurs pour une relation $\mathcal{R} \subseteq X \times Y$ on note $x \; \mathcal{R} \; Z$ pour $x \in X$, $Z \subseteq Y$ si l'on a $\forall y \in Z x \; \mathcal{R} \; y$

2.1.1 Domaines effectifs

Il s'agit de comprendre pourquoi le fait de donner une structure de domaine à un espace classique permet d'en extraire la structure constructive et de voir quand cela est possible. Si l'on considère notre donnée comme les points d'une base du domaine, et le calcul comme une approximation r.é., la question est de savoir que peut-on calculer avec cela. On donne, pour éclaircir cet aspect, une construction inverse.

Déf. 2.7 (Base abstraite, relation d'approximation) *On appelle base abstraite pour un domaine D un ensemble $(B, \gg)$, avec $\gg$ relation binaire transitive et interpolative (pour chaque F fini dans D, $F \ll z \Rightarrow \exists y \in D, F \ll y \ll z$). La relation $\gg$ est appelé* relation d'approximation.

Naturellement une base d'un domaine continu est une base abstraite. On veut éviter de dire qu'un point quelconque dans le domaine est effectivement approximé par soi même, ce qui n'est pas vrai si l'élément n'est pas déjà donné.

Déf. 2.8 (Complété par idéaux arrondi) *Soit $(B, \gg)$ une base abstraite. L'ensemble $\mathcal{I}(B)$ des idéaux de B (sous-ensembles fermés vers le haut et pour inf fini), et $(\mathcal{I}(B), \subseteq)$ est un dcpo continu appelé* complété par idéaux arrondi *de B.*

Prop. 2.9 *Soit D un domaine continu de base B; si l'on immerge B dans $\mathcal{I}(B)$ avec $x \mapsto \uparrow x$ on obtient une base de $\mathcal{I}(B)$ et son extension continue est un isomorphisme entre D et $\mathcal{I}(B)$.*

Chaque base abstraite est donc liée à un seul domaine continu. Connaître un domaine continu revient à en connaître une base et sa relation d'approximation.

Déf. 2.10 (Relation approximable) *Soient $(B, \gg), (B', \gg')$ deux bases abstraites; on appelle* relation approximable *une relation R dans $B \times B'$ t.q.*

1. $b\,R\,b', b_1 \gg b, b' \gg' b'_1 \Rightarrow b_1\,R\,b'_1$.
2. *F partie finie de B', $b \in B$, $b\,R\,F \Rightarrow \exists b' \in B'\ b\,R\,b'$ et $b' \gg B'$.*

Prop. 2.11 *Une fonction $f : D \to D'$ continue entre domaines continues induit une relation approximable entre les bases B et B' définie par $b\,R\,b' \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} b' \ll f(b)$. À l'inverse chaque relation approximable correspond à une fonction continue entre les domaines associés.*

Plaçons nous maintenant dans les cpo.

Déf. 2.12 (Domaines effectivement donnés)

- *Une base abstraite avec bottom $(B, \gg, \perp)$ est dite* donnée effectivement *si l'on a une énumération de ses éléments $(\perp, a_1, a_2, \ldots)$ et la relation d'approximation est r.é. par rapport à cette énumération: $\{(m, n) \mid a_m \ll a_n\}$ est r.é. (avec une fonction standard de couplage $(.,.)$).*
- *Une relation approximable R entre bases abstraites B, B' est* calculable *ssi $\{(m, n) \mid b_m\,R\,b'_n\}$ est r.é..*
- *Un* domaine effectivement donné *par rapport à une base B est un cpo ω-continu avec $(B, \gg)$ base abstraite donnée effectivement. Un élément x dans un tel domaine est dit* calculable *si $\Downarrow_B x$ est r.é.(ssi x est le sup d'une chaîne récursive dans B).*

- *$f : D \to D'$ continue entre domaines effectivement donnés est* calculable *ssi la relation d'approximation associée l'est.*

Prop. 2.13

1. *Le sup d'une chaîne effective d'éléments calculables est calculable.*
2. *Le plus petit point fixe d'une fonction calculable est calculable.*

2.2 Topologie

Pour nos applications une bonne connaissance de la topologie générale est un outil nécessaire. Puisque cette théorie est bien consolidée et qu'elle possède deux textes exemplaires (Kelley [Kel55] et Dugundji [Dug66]), et surtout parce que l'on utilise presque tous les résultats classiques sur les bases et la compacité (en liaison avec la séparabilité), nous tenons ces résultats pour achevés. Nous ferons quand même une petite exception pour les différents définitions de métrique, qui vont jouer un rôle essentiel dans les affinements qu'Edalat a apportés aux théorèmes classiques, et qui n'appartiennent pas forcément aux notions communes des mathématiciens.

2.2.1 Métriques

Déf. 2.14 (Distance, pseudo-distance, quasi-distance) *Soit X un ensemble et $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$; d est appelée* distance *si elle vérifie:*

$$\begin{array}{rll} (i) & d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y & d \textit{ stricte} \\ (ii) & d(x,y) = d(y,x) & \textit{symétrie} \\ (iii) & d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) & \textit{inégalité triangulaire} \end{array}$$

d est appelée pseudo-distance *si (i) est remplacé par:*

$$(i') \quad d(x,x) = 0$$

d est appelée quasi-distance *si (i) est remplacé par (i') et (ii) par:*

$$(ii') \quad d(x,y) = d(y,x) = 0 \ \Rightarrow \ x = y$$

On appelle espace métrique (*respectivement* pseudo-, quasi-) *le couple (X,d).*

Dorénavant X sera pensé comme espace avec une forme quelconque de "métrique".
Un espace métrique est a fortiori un espace quasi-métrique qui, à son tour, est un espace pseudo-métrique.

Déf. 2.15 (Boules) *On appelle* boule (ouverte) *de centre x et rayon r l'ensemble $O(x,r) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in X \mid d(y,x) < r\}$ (on le notera aussi $(B_r(x))$. On appelle boule* fermée $C(x,r) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in X \mid d(y,x) \leq r\}$.

Les mêmes définitions valent pour un espace pseudo ou quasi-métrique, mais on doit remarquer que dans un espace quasi-métrique on peut distinguer entre boules *de gauche* et boules *de droite*.

Déf. 2.16 (Topologie métrique) *On appelle* topologie induite par la métrique de X *la topologie qui a comme base les boules ouvertes de l'espace.*

Pour un espace quasi-métrique on aura une topologie *gauche* et une topologie *droite*. Il faut remarquer que la définition est bien donnée.

Prop. 2.17

1. *La topologie induite par une quasi-métrique est T_0.*
2. *La topologie induite par une pseudo-métrique est normale.*
3. *La topologie induite par une métrique est T_4 (normale et de Hausdorff).*

Sur l'ensemble des parties d'un espace métrique (X, d) on peut donner des notions de distance.

Déf. 2.18 (Distance avec/entre ensembles) *On appelle* distance entre un point x et un ensemble $B \subseteq X$

$$d(x, B) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{y \in B} d(x, y).$$

On appelle distance entre deux ensembles A *et* B *la fonction*

$$d(A, B) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{a \in A, b \in B} d(a, b).$$

Malgré son nom c'est seulement une pseudo-distance.

Prop. 2.19 *Pour chaque $y \in X$ et $A \subseteq X$, les fonctions $\lambda x.d(x, y)$, $\lambda xy.d(x, y)$, $\lambda x.d(x, A)$ sont continues.*

Avec une construction moins évidente on récupère une vraie distance pour les ensembles.

Déf. 2.20 (Métrique de Hausdorff) *Soit $\delta > 0$. On appelle* corps δ-parallèle *de $A \subseteq X$ l'ensemble $A_\delta \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{x \in A} C(x, \delta)$.*
On peut définir sur $\mathcal{P}(X)$ une quasi-distance $d'(A, B) \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{\delta \geq 0 \mid A \subseteq B_\delta\}$.
La métrique de Hausdorff *sur $\mathcal{P}(X)$ est définie comme*

$$d_h(A, B) \stackrel{\text{def}}{=} \sup(d'(A, B), d'(B, A)).$$

2.3 Liaisons entre topologie et domaines

Il y a de nombreux liens entre topologie et domaines: de nombreuses constructions d'ordres à partir de topologies et vice-versa. L'ordre de spécialisation est ,peut-être, le plus naturel des premiers.

Déf. 2.21 (Ordre de spécialisation) *Soit (X, τ) un espace topologique; on appelle* ordre de spécialisation *de X l'ordre sur X:*

$$x \leq_s y \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall A \in \tau,\ x \in A \ \Rightarrow\ y \in A$$
$$\Leftrightarrow x \in \overline{\{y\}}$$

L'intérêt de cet ordre pour la théorie de l'information est clair si l'on considère les ouverts comme propriétés finiment observables (en suivant Smyth, Vickers,...): x a moins d'information de y si chaque propriété finiment observable sur x l'est aussi sur y.

Rem. 2.22 *Pour un dcpo l'ordre induit par la topologie de Scott est l'ordre du dcpo.*

Le premier pas pour trouver un modèle calculatoire pour les espaces classiques de la mathématique est de les immerger dans un domaine. On peut faire une première remarque sur les propriétés de cette immersion, puisque les espaces classiques ont toujours des topologies assez fortes.

Déf. 2.23 (Coupage partiel) *On appelle* coupage partiel *d'un po* $(X, \leq)$ *un sous-ensemble* $Y \subseteq X$ *qui hérite seulement les couples dans la diagonale de* $\leq$*:*

$$\forall x, y \in Y \; x \leq y \;\Rightarrow\; x = y$$

Donc un coupage partiel "coupe" transversalement les chaînes du domaine (mais pas "totalement", sans hypothèses supplémentaires).

Lemme 2.24 *L'image d'une immersion topologique* s *d'un Hausdorff* X *dans un po continu* D *est un coupage partiel.*

Dém. Soient $x, y \in X$ avec $s(x) \leq s(y)$; pour chaque ouvert $O \subseteq X$ contenant x, $s(O) = O' \cap s(X)$, avec O' ouvert de D; comme O' est un ensemble supérieur $s(y) \in O'$, et donc $s(y) \in s(O)$; avec l'injectivité de s on a $y \in O$ et, puisque X est T_2, $x = y$. ▲

2.4 Exemples: espace de Cantor, $\mathbf{I}[0, 1]$

On va donner plusieurs exemples de ce type d'immersion d'un espace topologique (X, τ) dans un domaine supposé représenter son modèle calculatoire, exemple que l'on reprendra par la suite. Dans tout ce mémoire l'on appellera' hyperespace ce type de domaines, en étendant la définition classique, qui portait exclusivement sur les espaces de la prochaine section.

2.4.1 Espace de Cantor

Déf. 2.25 (Mots sur un alphabet) *Soit* Σ *un alphabet fini* $\{a_1, \ldots, a_N\}$*. On appelle* Σ^n *l'ensemble des mots de longueur* n *sur* Σ*,* $\Sigma^* \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Sigma^n$ *l'ensemble des mots finis,* $\Sigma^\omega \stackrel{\text{def}}{=} \{(a_{in})_{n \in \mathbb{N}}\}$ *celui des mots infinis et* $\Sigma^\infty \stackrel{\text{def}}{=} \Sigma^* \cup \Sigma^\omega$*.*
On note σ_n *la* n*-ième lettre du mot* σ*.*

Déf. 2.26 (Espace de Cantor) Σ^ω *est appelé* espace de Cantor*, et c'est un espace métrique avec*

$$d_C(\sigma, \sigma') \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \;\; t.q. \;\; \sigma_n \neq \sigma'_n} 2^{-n}$$

Avec la première présentation on peut penser l'espace de Cantor comme l'ensemble des limites des branches d'un arbre qui a comme noeuds les éléments de Σ^*.

Prop. 2.27

1. Σ^∞ *avec l'ordre préfixe est un dcpo* ω*-algébrique avec* Σ^* *comme base compacte.*

2. $Max(\Sigma^\infty) = \Sigma^\omega$

3. *Une base de Scott pour* Σ^∞ *est l'ensemble des* $\uparrow (a_{i1} \ldots a_{in}) = \{\sigma \in \Sigma^\infty \mid (a_{i1} \ldots a_{in}) \leq \sigma\}$*, l'ensemble des mots qui commencent par* $(a_{i1} \ldots a_{in})$*.*

Prop. 2.28

1. *La topologie induite par celle de Scott sur Σ^∞ est équivalente à celle induite par d_C.*

2. *Σ^∞ est un compact pour cette topologie.*

Dém.

(1) Chaque ouvert de base de Scott $\uparrow(a_{i1}\dots a_{in})$ coïncide avec $B_\epsilon(\sigma)$, avec $\sigma \geq (a_{i1}\dots a_{in})$ dans Σ^ω et $s^{-n}\epsilon \leq 2^{1-n}$.

(2) Si on l'examine avec la topologie de Scott, (2) équivaut au lemme de König. Soit $(O_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de l'espace: on a que pour chaque point $(a_{in})_{n\in\mathbb{N}}$ de l'espace on peut choisir un ouvert de la base de Scott $\uparrow(a_{i1}\dots a_{in})$ contenu dans l'ouvert du recouvrement qui couvre le point. On peut penser à ça comme à un proces de taille de l'arbre: chaque branche est coupée au niveau indiqué par l' element de la base. Pour le lemme di König l'arbre qui en résulte est fini, et aussi ses feuilles. On peut ainsi extraire le recouvrement formé en choisissant pour chaque feuille un ouvert qui contient l'ouvert de base associé avec elle. ▲

2.4.2 $\mathbf{I}[0,1]$

Cet espace est historiquement le premier exemple d'hyperespace construit pour la calculabilité: il a été proposé déjà en 1970 par Dana Scott [Sco70] (sur tout $\mathbb{R}$ et avec un élément top en plus) pour représenter les réels.

Déf. 2.29 *On appelle $\mathbf{I}[0,1] \stackrel{\text{def}}{=} \{[a,b] \mid a \leq b, a, b \in [0,1]\}$ l'ensemble des sous-intervalles compacts non-vides de $[0,1]$.*

Prop. 2.30

1. *$(\mathbf{I}[0,1], \supseteq)$ est un dcpo avec comme sup des dirigés les intersections des intervalles.*

2. *$[a,b] \ll [c,d] \Leftrightarrow [c,d] \subseteq (a,b)$.*

3. *Il est ω-continu avec comme base les intervalles aux extrémités rationnelles.*

Prop. 2.31

1. *Une base pour la topologie de Scott sur $(\mathbf{I}[0,1], \supseteq)$ est formée par les ensembles $\Box O \stackrel{\text{def}}{=} \{[a,b] \subseteq O \mid O$ ouvert de $[0,1]\}$.*

2. *L'application $s : [0,1] \to \mathbf{I}[0,1]$ $x \mapsto [x,x]$ est une immersion isométrique dans les éléments maximaux du domaine.*

3. *Chaque fonction continue $f : [0,1] \to [0,1]$ peut être étendue à une fonction $\mathbf{I}f$ Scott-continue sur $\mathbf{I}[0,1]$ avec $\mathbf{I}f([a,b]) \stackrel{\text{def}}{=} f([a,b])$*

4. *Cette extension est maximale: pour tout $g : \mathbf{I}[0,1] \to \mathbf{I}[0,1]$ t.q. $g([x,x]) = [f(x), f(x)]$, on a $g \leq \mathbf{I}f$.*

Pour la dernière démonstration voir [EE96].

2.5 Hyperespaces classiques

Dans toute la suite (X, τ) sera un espace topologique T_2, et si l'on considère (X, d) un espace métrique on pensera toujours X topologique avec la topologie induite par la métrique.

2.5.1 Espace de Vietoris $\mathbf{V}X$

Déf. 2.32 (Espace de Vietoris) *L'*espace de Vietoris *de* X *est* $\mathbf{V}X \stackrel{\text{def}}{=} \{K \mid K \text{ compact non-vide de } X\}$ *avec la* topologie finie de Vietoris *qui a comme pré-base les ensembles*

1. $\Box A = \{K \in \mathbf{V}X \mid K \subseteq A\}$ *pour tout* $A \in \Omega X$, *et*
2. $\Diamond A = \{K \in \mathbf{V}X \mid K \cap A \neq \emptyset\}$ *pour tout* $A \in \Omega X$.

Prop. 2.33 *La topologie de Vietoris est* T_2

Prop. 2.34 *Si* X *est un espace métrique, la topologie de Vietoris coïncide avec celle induite par la métrique de Hausdorff* d_h.

2.5.2 Espace inférieur $\mathbf{L}X$

Déf. 2.35 (Espace inférieur) *C'est l'espace topologique qui a comme éléments les fermés de* X *et comme topologie celle appelée* inférieure, *qui a comme base les analogues des ensembles du type (2) de la pré-base de Vietoris:*

$$\forall A \in \Omega X \quad \Diamond A = \{C \in \mathbf{L}X \mid C \cap A \neq \emptyset\}$$

.

Prop. 2.36

1. *La topologie inférieure est* T_0.
2. *Si* X *est compact la topologie inférieure coïncide avec celle induite par la quasi-métrique* d_l *définie comme* $d_l(A, B) \stackrel{\text{def}}{=} d'(B, A)$.

Prop. 2.37

1. *L'ordre de spécialisation sur* $\mathbf{L}X$ *est l'inclusion.*
2. $(\mathbf{L}X, \subseteq)$ *est un treillis complet, avec les fermetures des unions comme sups.*

2.5.3 Espace supérieur $\mathbf{U}X$

Cet espace est largement utilisé pour le lien entre théorie topologique et théorie des ordres. On détaillera et on justifiera donc un peu plus les assertions, en illustrant au même temps les méthodes de démonstration.

Déf. 2.38 (Espace supérieur) *L'*espace supérieur (upper space) *de* X, $\mathbf{U}X$, *est l'espace topologique qui a comme éléments les compacts non-vides de* X *et comme base pour la topologie (appelée* supérieure*) les ensembles du type (1) de la pré-base de Vietoris,* $\Box A$ *avec* A *ouvert de* X.

Prop. 2.39

1. *La topologie supérieure est* T_0.

2. *Si X est métrique la topologie induite par la quasi-métrique $d_u(A,B) \stackrel{\text{def}}{=} d'(A,B)$ coïncide avec la topologie supérieure.*

Dém.

(1) Soient $K \neq K'$ dans $\mathbf{U}X$; supposons, pour fixer les idées, que l'on ait $x \in K' \backslash K$. Alors, puisque X est T_2 et K compact il existe un ouvert O dans X qui contient K et tel que $x \notin O$. Alors $K \in \Box O, K' \notin \Box O$.

(2) On le démontre avec l'inclusion mutuelle des éléments de la base. La quasi-boule ouverte de $\mathbf{U}X$, $B_r(A)$, est l'ensemble $\{B \in \mathbf{U}X \mid d_u(B,A) < r\} = \{B \in \mathbf{U}X \mid B \subseteq A_r\} = \Box A_r$.
Soit $K \in \Box A$; comme $A^{\complement}$ est fermé il existe un nombre fini de boules qui recouvrent K et qui n'ont pas d'intersection avec $A^{\complement}$. Il existe donc $r > 0$ t.q. $K_r \subseteq A$ et $\Box A \supseteq B_r(K) \ni K$. ▲

Prop. 2.40

1. *L'ordre de spécialisation sur $\mathbf{U}X$ est l'inclusion inverse.*
2. *$(\mathbf{U}X, \supseteq)$ est un dcpo avec l'intersection comme sup.*
3. *$(\mathbf{U}X, \supseteq)$ est complet*[2]
4. *L'opérateur d'inf $\lambda KK'.K \cup K'$ est Scott-continu.*
5. *La topologie de Scott sur $\mathbf{U}X$ est plus fine que la topologie supérieure.*

Dém.

(1) $K \supseteq K' \Rightarrow \forall A \in \Omega X K \subseteq A \Rightarrow K' \subseteq A$. Inversement $K \not\supseteq K'$ implique $\exists x \in K' \setminus K$; en raisonnant comme dans 2.40(1), K peut être séparé avec des ensembles ouverts de x; il existe donc $O \in \Omega X$ avec $O \supseteq K, O \not\supseteq K'$.

(2) Soit $(K_i)_{i \in I}$ une famille dirigée dans $\mathbf{U}X$; le candidat ensembliste comme sup est $\bigcap_{i \in I} K_i$, qui est par ailleurs un compact parce que fermé dans un compact, et non vide par la propriété de l'intersection finie.

(3) Comme tous les ensembles sont fermés dans le compact majorant et que leur intersection est fermé, celle-ci est compacte.

(4) C'est la distributivité par dirigés du treillis des sous-ensembles d'un ensemble donné.

(5) Il suffit de démontrer qu'un ouvert de base $\Box A$ est de Scott: c'est clairement un ensemble supérieur. Soit donc $(C_i)_{i \in I}$ un dirigé avec sup $\bigcap_{i \in I} C_i$ dans A. Comme $A^{\complement}$ est fermé, $\bigcap_i C_i \cap A^{\complement}$ est une intersection vide de compacts, et par la propriété de l'intersection finie il existe une intersection finie $\bigcap_{i \in F} C_i \cap A^{\complement} = \emptyset$, c'est-à-dire $\bigcap_{i \in F} C_i = C_j \subseteq A$. ▲

Prop. 2.41 *Soit X localement compact; alors on a:*

1. *$(\mathbf{U}X, \supseteq)$ est un dcpo continu.*
2. *$K \ll K' \Leftrightarrow$ il existe un ouvert O t.q. $K \supseteq O \supseteq K'$.*
3. *La topologie de Scott coïncide avec la topologie supérieure.*

2. c.à.d. complet sur les parties bornées, selon la terminologie de Berry

Dém.

(1-2) Pour chaque $C \in \mathbf{U}X$, soit $W(C) \stackrel{\text{def}}{=} \{K \in \mathbf{U}X \mid \exists A \in \Omega X \; C \subseteq A \subseteq K\}$. On va procéder par assertions:

- $W(C)$ *est non-vide:* C est un compact dans un localement compact et donc admet un voisinage relativement compact.
- $W(C)$ *est un dirigé:* l'intersection finie de compacts est compacte et l'intersection de voisinages est encore un voisinage.
- $C = \bigcap_{K \in W(C)} K$ *(d'où* (1)*):* une inclusion est triviale, l'autre s'obtient en observant que pour chaque point $x \in X \setminus C$ on peut trouver un ensemble relativement compact B t.q. $B \subseteq C$ mais $x \notin \overline{B}$.
- $W(C) = \mathop{\downarrow\!\!\downarrow} C$ *(d'où* (2)*):* il suffit de démontrer que $W(C) \subseteq \mathop{\downarrow\!\!\downarrow} C$. Or $K \in W(C)$ implique $\exists O \in \Omega X \; C \subseteq O \subseteq K$, et $\Box O$ est un ouvert de Scott, donc $C \in \Box O \subseteq \uparrow K$, dont $K \ll C$.

(3) Soit A un ouvert de Scott pour $\mathbf{U}X$, $C \in A$; $W(C) \cap A \neq \emptyset$ par ce qu'on vient de voir, et pour la déf. de $W(C)$ il existe $O \in \Omega X$ t.q. $C \subseteq O \subseteq A$. On a alors que $C \in \Box O \subseteq A$ et A est ouvert dans la topologie supérieure. ▲

Prop. 2.42 *Soit X localement compact et á base dénombrable; alors on a:*

1. $\mathbf{U}X$ *est ω-continu avec comme base d'ordre les unions finies de clôtures des ensembles ouverts et relativement compacts de X.*
2. *Si X est compact et de dimension zéro,* $\mathbf{U}X$ *est un domaine de Scott ω-algébrique.*

Dém.

(1) Un théorème de topologie nous assure que dans ces hypothèses l'espace admet comme base dénombrables B les ensembles ouverts relativement compacts. L'ensemble $S \subseteq \mathbf{U}X$ des unions finies des fermetures de ces ouverts reste dénombrable. Mais alors il est facile de vérifier que $W_1(C) = \mathop{\downarrow\!\!\downarrow}_S C$ est un dirigé avec sup C (il suffit de procéder comme dans (1-2) ci-dessus). Donc S est une base dénombrable pour $\mathbf{U}X$.

(2) On a déjà que $\mathbf{U}X$ est un dcpo complet sur les bornés. Par l'hypothèse sur la dimension on a que X admet une base dénombrable B d'ouverts-fermés. Par la compacité ces ensembles fermés sont compacts et donc compacts-ouverts, comme leurs unions finies. On a comme ci-dessus une base S dénombrable, mais cette fois formée sur des compacts (au sens de la théorie des domaines) de $\mathbf{U}X$. ▲

Cor. 2.43 *L'espace supérieure de l'espace de Cantor est un domaine de Scott.*

Chapitre 3

Théorie de la mesure

3.1 Théorie de la mesure classique

3.1.1 Boreliens, espaces mesurables, mesures

Les définitions qui suivent sont celles de la théorie de la mesure classique, qu'on peut trouver par exemple dans Rudin [Rud66].

Déf. 3.1 (σ-algèbre) *Une* σ-algèbre (ou tribu) *sur un ensemble X est une famille $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$ fermée par complémentation et intersection (union) dénombrable qui contient X. Le couple $(X, \mathcal{M})$ est un* espace mesurable *et les éléments de $\mathcal{M}$ sont appelés* mesurables*.*

On peut aisément vérifier que la composition de fonctions mesurables est mesurable et la composition d'une fonction continue avec une mesurable est mesurable (mais non vice versa).

Déf. 3.2 (σ-algèbre engendrée) *Étant donnée une famille quelconque $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{P}(X)$ il existe la plus petite σ-algèbre qui contient $\mathcal{F}$, appelée la* σ-algèbre engendrée *par $\mathcal{F}$. Autrement dit, l'ensemble des espaces mesurables est un système de fermeture et la σ-algèbre engendrée est la fermeture de $\mathcal{F}$.*

Déf. 3.3 (Boreliens) *L'ensemble des* boreliens $\mathcal{B}(X)$ *d'un espace topologique (X, τ) est la σ-algèbre engendrée par τ. En particulier sont boreliens les ensembles fermés, les unions dénombrables de fermés (notées F_σ) et les intersections dénombrables d'ouverts (notées G_δ).*

Donc chaque topologie induit une tribu d'une façon canonique.

Déf. 3.4 (Mesure) *On appelle* mesure *sur un espace mesurable $(X, \mathcal{M})$ une application $\mu : \mathcal{M} \to \mathbb{R}^+$ t.q., pour tous $A, A_n, B \in \mathcal{M}$ on a:*

- $\mu(\emptyset) = 0$
- $A \subseteq B \;\Rightarrow\; \mu(A) \leq \mu(B)$
- $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *avec* $A_n \subseteq A_{n+1} \;\Rightarrow\; \mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$

Une mesure est dite σ-finie *si X est union dénombrable de mesurables.*

Il faut rémarquer que nous nous plaçons dans le contexte des mesures finies, puisque $\mu(X)$ est toujours finie. Une question très importante pour notre théorie est de comprendre quand et comment la mesure d'un mesurable quelconque peut être approximée avec celles de certains mesurables. On peut donner les définitions générales suivantes.

Déf. 3.5 (Régularité extérieure et intérieure) *Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{P}(X)$; on dit que μ est $\mathcal{E}$-*extérieurement régulière sur *$\mathcal{F}$ si $\forall F \in \mathcal{F}$, $\mu(F) = \inf\{\mu(E) \mid F \subseteq E \in \mathcal{E}\}$. Si μ est une mesure et $\mathcal{F} = \mathcal{M}$ on dit que μ est $\mathcal{E}$-*extérieurement régulière*. De même pour la* régularité intérieure. *On dit qu'une mesure μ est* régulière *si $\mathcal{E} = \mathcal{M}$ et $\mathcal{F} = \mathcal{P}(X)$.*

Cela montre que l'on peut déduire la mesure des éléments de $\mathcal{F}$ à partir de la mesure sur $\mathcal{E}$.

Déf. 3.6 (Régularités de Radon et Borel) *μ sur X espace topologique est dite:*

Borel (extérieurement) régulière: *si elle est $\mathcal{B}(X)$-(extérieurement) régulière.*

de Radon: *si elle est compacts-intérieurement régulière sur $\mathcal{B}(X)$ et $\mu(K) < \infty$ pour tous les compacts K.*

Déf. 3.7 (Mesure de Borel, mesure image) *Une mesure est dite* de Borel *si elle est Borel-régulière et $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{M}$.*
Soient X et Y deux espaces topologiques, $f : X \to Y$ continue, μ une mesure de Borel sur X. Il est facile de vérifier que $\mu_f \stackrel{\text{def}}{=} \mu \circ f^{-1}$ est une mesure sur Y dite mesure image *de μ avec f.*

Exemple 3.8 (Mesure de Lebesgue) *La mesure de Lebesgue classique sur $\mathbb{R}^n$ est de Radon et Borel.*

3.2 Théorie des évaluations

3.2.1 Problématique

La théorie des évaluations naît avec Birkhoff pour formaliser la partie de la théorie de la mesure qui avait à faire avec les ordres. Mais la notion d'évaluation continue est déjà l'essai fait par Lawson de rapprocher la théorie des domaines de la théorie de la mesure classique. L'idée a été reprise par Saheb-Djahromi (bien que de façon implicite [SD80]) et par Jones et Plotkin [JP89] pour donner une sémantique aux langages non-déterministes. Dans ce contexte il était plus utile de travailler directement avec les ouverts, étant donné que l'on est dans le cas où toutes les fonctions dans la théorie sont continues, et vu la coïncidence entre la notion d'observabilité et celle d'ensemble ouvert.

3.2.2 Définitions

La différence fondamentale avec la mesure est qu'on définit une évaluation uniquement sur les ouverts de l'espace topologique, mais l'on exige en plus la continuité de Scott.

Soit $(X, \Omega X)$ un espace topologique.

Déf. 3.9 (Birkhoff, Jones-Plotkin: Évaluation) *Une* évaluation *sur X est une application $\nu : \Omega X \to [0, \infty)$ qui satisfait:*

- $\nu(\emptyset) = 0$
- $a \subseteq b \;\Rightarrow\; \nu(a) \leq \nu(b)$

– $\nu(a) + \nu(b) = \nu(a \cup b) + \nu(a \cap b)$

Une évaluation est continue *si elle est Scott-continue. On peut parler d'*évaluation image *en parfaite analogie avec les mesures.*

Une évaluation est finiment additive (sur les ouverts disjoints).

Déf. 3.10 (Domaine puissance probabilistique) *L'ensemble des évaluations continues ν sur X avec $\nu(X) \leq 1$ est appelé* domaine puissance probabilistique. *On le note $\mathbf{P}X$. Si $\nu(X) = 1$ on parle de domaine puissance probabilistique* normalisé *($\mathbf{P^1}X$).*

On peut voir $\mathbf{P}X$ et $\mathbf{P^1}X$ comme des cpo: il suffit de considérer l'ordre induit ponctuellement (la démonstration de completude se fait comme toujours dans le cas fonctionnel).

Le point fondamental est que dans des cas intéressants on peut démontrer l'ω-continuité de ces espaces.

Déf. 3.11 (Évaluations de Dirac, év. simples) *On définit les* évaluations de Dirac (point valuations) *comme les fonctions:*

$$\delta_b(O) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & si\ b \in O \\ 0 & sinon \end{cases}$$

On appelle évaluations simples *les combinaisons linéaires d'évaluations de Dirac.*

Si la topologie sur X est de Scott (X donc dcpo) on a le résultat suivant:

Théorème 3.12 (Jones-Plotkin, '89) *Si X est un dcpo ω-continu alors $\mathbf{P}X$ l'est aussi avec comme base possible les évaluations simples sur les éléments de la base de X.*

En utilisant ce résultat et quelques lemmes techniques on arrive à montrer:

Théorème 3.13 (Edalat, '95) *Si X est un dcpo ω-continu alors $\mathbf{P^1}X$ l'est aussi avec une base d'évaluations simples normalisées.*

3.3 Mesure et théorie des domaines

3.3.1 Le problème d'extension

Déf. 3.14 (Problème d'extension) *Étant donnée une évaluation continue ν sur X, quand peut-on l'étendre à une mesure de Borel μ?*

Commençons avec le cas d'une mesure finie. On veut la voir comme une évaluation continue étendue. On doit trouver d'abord un contexte où chaque mesure vue sur les ouverts est Scott-continue; deuxièmement l'extension de l'évaluation doit exister et troisièmement être univoquement déterminée. Pour le troisième problème, comme on l'a vu on peut avoir des mesures où l'on n'a pas $\mu(B) = \inf_{O \supseteq B} \mu(O)$, condition nécessaire pour avoir une extension naturelle. On cherche au moins la régularité extérieure de Borel, et la régularité de Radon pour travailler avec $\mathbf{U}X$. On se place donc dans des espaces T_2, localement compacts, à base dénombrable (ce qui implique que tous les ouverts sont σ-compacts, c.à.d. union dénombrable de compacts). Dans ce contexte on peut utiliser le résultat classique ([Rud66], théor

2.18) qui affirme que chaque mesure finie sur les compacts a les deux régularités. La finitude de notre mesure nous assure donc ici sa régularité. D'autre part l'existence de la base dénombrable garantit aussi que la restriction d'une mesure régulière aux ouverts de l'espace est une évaluation continue.

On va donner une réponse au deuxième problème dans le cas général. On esquisse un principe d'extension qui fonctionne dans plusieurs cas.

Déf. 3.15 (Demi - ouvert) *On appelle* demi-ouvert *un ensemble différence de deux ensembles ouverts $U \setminus V$, ou si l'on veut, l'intersection d'un ouvert avec un fermé* $(U \cap V^{\complement}$.

On peut étendre l'évaluation aux demi-ouverts, si $\mu(U) < \infty$, en posant

$$\mu(U \setminus V) \stackrel{\text{def}}{=} \mu(U) - \mu(U \cap V).$$

L'ensemble des demi-ouverts (où l'on peut définir l'évaluation étendue) $\mathcal{L} \stackrel{\text{def}}{=} \{U \setminus V \mid U, V \in \Omega X,\ \mu(U) < \infty\}$ est un demi-anneau, c.à.d. $A, B \in \mathcal{L} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{L},\ A \setminus B = \bigcup_{i=1,\ldots,n} B_i$ avec les $B_i \in \mathcal{L}$ disjoints.
On peut montrer sans difficulté que l'extension de ν est bien définie et ν est finiment additive sur $\mathcal{L}$. La pratique montre que souvent dans ces conditions, si ν est σ-additive sur $\mathcal{L}$, elle peut être étendue à une mesure sur le σ-anneau engendré par $\mathcal{L}$, et si $\nu(X) < \infty$, à une mesure de Borel. Avec cette procédure on a:

Théorème 3.16 (Extension avec les demi-ouverts) *Si ν est une évaluation continue sur un espace topologique X, elle peut être étendue à une mesure de Borel dans les cas suivants:*

- *X est un espace métrique.*
- *X est localement compact, T_2 et ν est localement finie (c.à.d. chaque point admet un voisinage fini).*
- *X est un dcpo ω-continu et ν localement finie (c.à.d. que chaque point a un voisinage d'évaluation finie).*
- *(Edalat-Alvarez, '97) X dcpo continu, ν finie.*

Cor. 3.17 *Sur un espace à base dénombrable, de Hausdorff et localement compact les évaluations continues finies sont extensibles d'une façon unique à des mesures de Borel et de Radon.*

3.3.2 Immersion de Edalat

Déf. 3.18 (Pré-immersion d'Edalat) *Soit X un espace métrique, D un po continu; on appelle pré-immersion de Edalat une immersion topologique $s : X \to D$, si $s(X)$ est un ensemble G_δ de D.*

Déf. 3.19 (Immersion d'Edalat) *Si X est aussi séparable et D un dcpo ω-continu, s est une immersion d'Edalat.*

Prop. 3.20 *Les applications suivantes sont des immersions d'Edalat.*

1. *$\sigma \mapsto \sigma$ de l'espace de Cantor Σ^ω dans Σ^∞.*
2. *$x \mapsto [x, x]$ de $[0, 1]$ dans $\mathbf{I}[0, 1]$.*
3. *$x \mapsto x$ de X dans $\mathbf{U}X$, si X métrique séparable.*

Trouver pour un espace métrique X une immersion de Edalat dans un hyperespace D est le bon point de départ pour la fondation d'une théorie de la mesure basée sur la théorie des domaines.

Prop. 3.21 *Soit $s : X \to D$ une immersion de Edalat:*

1. *$s(X) \subseteq max(D)$;*
2. *les s-images des ouverts et des fermés sont G_δ;*
3. *s envoie les boreliens dans des boreliens.*

Dém.

(1) Nous sommes dans les conditions du lemme 2.24, donc $s(X)$ est un coupage de D. Mais $s(X)$ est un ensemble supérieur parce qu'intersection d'ensembles supérieurs, d'où la thèse.

(2) Si O est un ouvert de X, $s(O) = O' \cap s(X)$ est clairement G_δ. On sait que chaque F fermé dans un espace métrique est un G_δ; donc son image avec l'injection s est intersection dénombrable d'images d'ouverts, donc de G_δ et est, elle-même, G_δ.

(3) Découle aisément de *(2)*. ▲

Déf. 3.22 **(**e**)** *Dans ce contexte on peut définir une fonction $e : \mathbf{M^1}X \to \mathbf{P}D$ avec $e(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} \mu \circ s^{-1}$.*

Prop. 3.23 *La définition est bien donnée.*

Dém.

$\mathbf{e}(\mu)$ *évaluation:* Suit sans difficulté des bonnes propriétés de s.

$\mathbf{e}(\mu)$ *continue:* On doit démontrer que $\sup_{d\in\Delta} e(\mu)(d) = e(\mu)(\sqcup^\uparrow\Delta)$. On voit que le sup de gauche est non-zéro ssi $\exists \bar{d} \in s(X) \cap \Delta$, mais s'il existe on a $\bar{d} = \sqcup^\uparrow\Delta$, et sinon $e(\mu)(\sqcup^\uparrow\Delta) = 0$. ▲

Prop. 3.24

1. *e est injective.*
2. *$Im(e) = \{\mu \in \mathbf{P}D \mid \mu(s(X)) = 1\}$; $e : \mathbf{M^1}X \to Im(e)$ admet une inverse j t.q. $j(\nu) = \nu \circ s$.*

Dém.

(1) Si $O \subseteq X$ est un ouvert alors $\exists (O'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ chaîne décroissant d'ouverts dans D t.q. $s(O) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O'_n$ et $O = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} s^{-1}(O'_n)$. Et $e(\mu)(O) = \mu(s^{-1}(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O'_n)) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \mu(s^{-1}(O'_n)) = \inf_{n\in\mathbb{N}} e(\mu(O'_n))$.
Donc $e(\mu) = e(\nu)$ ssi $\forall O$ ouvert de X $\mu(O) = \nu(O)$ ssi (par régularité) $\mu = \nu$.

(2) Puisque X est ouvert on a comme dans (1): $s(X) = \bigcap_{n\in N} O_n$ avec $\forall n\ O_n \subseteq D$. Alors

$$e(\mu)(s(X)) = \inf_{n\in N} e(\mu)(O_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \mu(s^{-1}(O_n)) = \mu(X) = 1.$$

Si $\nu \in \mathbf{P}D$ et $\nu(s(X)) = 1$, $j(\nu) = \nu \circ s$ est une mesure de probabilité sur X et par $O \subseteq D$, $e(j(\nu))(O) = \nu(s(s^{-1}(O))) = \nu(O \cap s(X)) = \nu(O)$.
$\nu = e(j(\nu))$ implique $\nu \in Im(e)$.
Enfin, par définition, $\forall \mu \in \mathbf{M^1}X$ $j(e(\mu)) = (\mu \circ s^{-1}) \circ s = \mu$. ▲

On veut démontrer que e est une immersion topologique si l'on considère sur $\mathbf{M^1}X$ la topologie faible. On rappelle que une forme linéaire sur un espace vectoriel normé X est dite *bornée* si $\exists L \forall x\ ||x|| = 1 \Rightarrow f(x) \leq L$.

Déf. 3.25 (Topologie faible) *On appelle* topologie faible *sur un espace vectoriel normé X la moins fine qui rende continues tous les formes linéaires bornées sur l'espace. Elle a pour base les intersections finies des ensembles $O_{x,\epsilon,f} \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in X \mid |f(x) - f(y)| < \epsilon\}$, avec f forme linéaire. Si une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x dans la topologie faible, on dit qu'elle* converge faiblement vers x *et on écrit $x_n \rightharpoonup x$.*

On rappelle ici une caractérisation de la convergence faible dans un cas particulier:

Prop. 3.26 (Stroock '93) *Soit $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures sur X espace métrique séparable; on a:*

$$\mu_n \rightharpoonup \mu \Leftrightarrow \liminf_{n\to\infty} \mu_n(O) \geq \mu, \text{ pour chaque ouvert } O \subseteq X$$

Le même critère va être valable pour les évaluations sur $\mathbf{P}D$, avec la convergence de Scott. On commence avec un lemme technique:

Lemme 3.27 (Kirch '93) *Soit D un dcpo continu, μ une évaluation continue, $\nu = \sum_{d\in F} r_d\delta_d$ une évaluation simple. On a que $\nu \ll \mu$ ssi $\forall G \subseteq F\ \sum_{d\in G} r_d < \mu(\Uparrow G)$.*

Théorème 3.28 *Si D est un dcpo ω-continu et $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbf{P}D$ on a:*

$$\mu_n \xrightarrow{n} \mu \Leftrightarrow \liminf_{n\to\infty} \mu_n(O) \geq \mu(O) \text{ pour tout } O \text{ ouvert de Scott de } D.$$

Dém.

$\Rightarrow$) Soit O ouvert de Scott dans D, $\epsilon > 0$. On sait que μ est le sup d'un dirigé formé d'évaluations simples way-below lui. Par définition de sup $\mu(O) = \sup_{\nu\ll\mu} \nu(O)$ avec ν simples, donc $\exists\, \nu \ll \mu\ \nu(O) > \mu(O) - \epsilon$. Mais $\mu_n \xrightarrow{n} \mu$ et $\Uparrow\nu$ est ouvert de Scott et donc $\exists N\ \forall m > N\ \nu \ll \mu_m$ et en particulier $\mu_m(O) \leq \nu(O) < \mu(O) - \epsilon$.

$\Leftarrow$) Par l'absurde, si $\mu_n \not\to \mu$, puisque $\Uparrow\nu$ est une base pour la topologie de Scott, il existe $\nu = \sum_{d\in F} r_a\delta_d$ simple, $\exists((\mu)_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ sous-chaîne t.q. pour tout i, $\nu \not\ll \mu_{n_i}$. Par le lemme de Kirch il existe $G \subseteq F$ t.q. $(\mu)_{n_i}(\Uparrow G) \leq \nu(\Uparrow B) < \mu(\Uparrow B)$. Mais le nombre des sous-ensembles finis de F est fini, et donc on peut extraire une sous-sous-chaîne $(\mu)_{n_{ij}}$ et un sous-ensemble G avec, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $(\mu)_{n_{ij}}(\Uparrow G) < \mu(\Uparrow G)$. Comme $\Uparrow G$ est un ouvert de Scott, on a contredit l'hypothèse. ▲

Prop. 3.29 *$e : \mathbf{M^1}X \to \mathbf{P}D$ est une immersion topologique.*

Dém.

e continue: Soit $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbf{M^1}X$ avec $\mu_n \rightharpoonup \mu$. Il suffit de vérifier que $e(\mu_n) \xrightarrow{n} e(\mu)$. Soit O ouvert de D: on a

$$\liminf_{n\in\mathbb{N}} (e(\mu_n))(O) = \liminf_{n\in\mathbb{N}} \mu_n(s^{-1}(O)) \leq \text{ (prop.3.26) } \mu(s^{-1}(O)) = (e(\mu))(O).$$

On conclut avec le théorème 3.28.

j continue: Soit $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $Im(e)$ t.q. $\nu_n \xrightarrow{n} \nu$ avec $\nu \in Im(e)$ et j comme dans 3.24(2).

Puisque s est une immersion, $s(O) = O' \cap s(X)$ avec O' ouvert de D. Alors on a:

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\in\mathbb{N}}(j(\nu_n))(O) &= \liminf_{n\in\mathbb{N}} \nu_n(s(O)) \\
&= \liminf_{n\in\mathbb{N}} \nu_n(O' \cap s(X)) \\
&= \liminf_{n\in\mathbb{N}} \nu_n(O') && \nu_n \text{ avec support dans } s(X) \\
&\geq \nu(O') && \text{Théorème 3.28} \\
&= \nu(O' \cap s(X)) && \nu \text{avec support dans } s(X) \\
&= (j(\nu))(O)
\end{aligned}$$

On a, avec la prop 3.26, que $j(\nu_n) \xrightarrow{n} j(\nu)$. ▲

Cor. 3.30 *On a:* $Im(e) \subseteq max(D)$.

Dém. Comme la topologie faible est T_2 et que e est une immersion topologique dans un dcpo, on peut appliquer le lemme 2.24, ce qui donne que $Im(e)$ est un coupage. C'est aussi un ensemble supérieur: soit $\mu, \nu \in \mathbf{P}D$ avec $\mu \in Im(e)$ et $\mu \leq \nu$. On a: $1 = \mu(s(X)) \leq \nu(s(X)) \leq 1$ et donc $\nu \in Im(e)$ (prop. 3.24) et $\mu = \nu$. ▲

3.3.3 Construction effective de la chaîne

Dans l'article de [Eda96b] il y a une "construction explicite" de la chaîne des évaluations simples qui approximent une mesure donnée. L'idée est de prendre un ensemble compact et T_2, un recouvrement "propre" ouvert quelconque, d'en extraire un recouvrement fini $\{A_1, ..., A_n\}$, de prendre les fermetures des ouverts qui sont donc dans $\mathbf{U}X$, et de créer l'évaluation:

$$\mu_A = \sum_{i=1}^{n} r_i \delta_{\overline{A_i}}$$

où les scalaires r_i sont définies par $r_i \stackrel{\text{def}}{=} \mu(A_i \setminus \bigcup_{j<i} A_j)$.

Si l'on construit une série de recouvrements de l'espace avec un diamètre maximum décroissant vers zéro (e.g. comme $1/n$) on peut démontrer qu'on obtient la suite désirée. Mais quelques remarques sur l'effectivité de cette construction sont nécessaires.

La première est que l'on ne comprend pas bien quelle est la donnée dans ce procédé: la connaissance des r_i dans un cas quelconque équivaudrait à tout savoir ou presque sur la mesure: dans ce cas on n'aurait pas besoin de la trouver comme approximation d'évaluations simples! Donc la généralité implicitement prétendue doit être restreinte. Mais aussi pour des raisons plus théoriques. C'est un fait bien connu en mathématique constructive (voir le chapitre sur la compacité dans [BB85]), que la définition de compact avec les recouvrements ouverts n'a presque rien de constructive: il n'existe pas d'algorithme d'une généralité quelconque qui permette d'extraire un recouvrement fini d'un recouvrement ouvert.

Dans [BB85] ce fait est affirmé comme résultat acquis de la pratique mathématique constructiviste. A y regarder de prés, cette assertion, dans un cas particulier, peut probablement être vue comme un vrai résultat de théorie de la récursivité, en utilisant le lemme de König. Soit Σ^∞ un arbre d'un espace de Cantor avec les noeuds récursivement énumérables; en avoir un recouvrement ouvert équivaut à savoir que chaque branche peut être coupée à l'hauteure d'un certain noeud, et le (nié du) lemme de König nous fournit l'assertion qu'on obtient ainsi un arbre fini. Supposons que le recouvrement soit dénombrable, et aussi récursivement énumérable. Trouver un algorithme qui en extrait un nombre fini de coupures nous semble violer le non-constructivisme du lemme de König. Nous nous proposons de développer ce point ultérieurement.

Reste vraiment un problème ouvert, celui de déterminer des conditions réalistes et assez générales dans lesquelles appliquer la construction d'Edalat. Ici, on se contentera de citer comme exemple que la procédure élémentaire consistant à "compter des carrés toujours plus petits dans la figure", même généralisée à $\mathbb{R}^n$, peut être vue comme création d'une chaîne dans $\mathbf{PU}X$ pour approximer la mesure de Lebesgue.

Chapitre 4

Application aux systèmes dynamiques

4.1 Systèmes dynamiques: approche continue et discrète

4.1.1 Qu'est-ce qu'un système dynamique?

Les systèmes dynamiques sont des équations différentielles avec plusieurs paramètres, dont l'un est appelé "temps". Ils sont pensés représenter des systèmes physiques qui admettent une évolution temporelle. L'étude des systèmes dynamiques n'a pu commencer que lorsque le formalisme pour représenter les équations différentielles a atteint un certain degré d'expressivité et de clarté. A ce point on a pu s'apercevoir que l'habileté mathématique développée jusque-là rendait possible d'étudier et de résoudre les systèmes d'équations linéaires, et de traiter certains cas très particuliers de systèmes non-linéaires avec des techniques tout a fait "ad hoc". Poincaré le premier pensa que pour traiter de quelque manière le cas général on devait:

- renoncer à l'étude analytique "par solution générale" du système;
- introduire une analyse "qualitative" des solutions générales;
- développer les instruments géométriques et topologiques pour effectuer cette analyse (il faut rappeler que la topologie n'existait pas avant Poincaré!)

Ce dernier point a été (plus ou moins consciemment) respecté.

4.1.2 L'approche discrète

L'on appelle *système dynamique continu* un système d'équations différentielles continues sur $\mathbb{R}^n$. Il peut être étudié, comme le suggère Birkhoff, avec un système "discret", supposé représenter l'état du système à des intervalles de temps réguliers. Cela peut donner une mathématique plus facile à traiter, et représente avec fidélité la modélisation par simulation qu'on fait par ordinateur. On arrive à la définition suivante, point de départ pour notre étude, d'une simplicité étonnante:

Déf. 4.1 (Système Dynamique) *On appelle* système dynamique (discret) *un couple (X, f) avec X espace topologique et $f : X \to X$ continue.*

Il est clair que pour parler de X d'un point de vue non uniquement topologique, on lui donnera parfois beaucoup plus de structure. De toute façon, dorénavant dans ce chapitre, X sera au moins un espace topologique et f une fonction continue.

4.2 Définitions

4.2.1 Orbite

On peut donc définir l'étude des systèmes dynamiques comme l'investigation des comportements "à l'infini" (les dynamiques) des points d'un espace topologique soumis a l'action d'une fonction continue supposée "déplacer" les points. Donnons donc la définition fondamentale:

Déf. 4.2 (Orbite) *Soit* (X, τ) *un espace topologique; on appelle* orbite *de* $x \in X$ *l'ensemble* $O^+(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{f^n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$.
Si f *est un homéomorphisme, on peut définir l'*orbite complète $O(x) \stackrel{\text{def}}{=} O^+(x) \cup O^-(x)$, *ou* $O^-(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{f^{-n}(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Déf. 4.3 (Points périodiques) x *est un* point périodique de période n *(avec* n *positif) pour* f *si* x *est point fixe de* f^n. *Le plus petit entier* n *qui vérifie* $f^n(x) = x$ *est appelé* première période x.
On note Fix(f) *l'ensemble des points fixes pour* f, $Per_n(f) \stackrel{\text{def}}{=} Fix(f^n)$ *l'ensemble des points périodiques de période* n *de* f *et* $Per(f) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Per_n(f)$.
$O^+(x)$ $(O(x))$ *est appelé* périodique *ssi* x *est périodique.*
Un point x *est* finalement périodique *s'il n'est pas périodique mais* $\exists n \in \mathbb{N}^+$ *t.q.* $f^n(x)$ *l'est.*

Rem. 4.4 *Si* f *est un homéomorphisme alors on ne peut pas avoir de point finalement périodique .*

Dém. Si f est un homéomorphisme et $f^n(x)$ est périodique de période k, $f^k(x) = f^{-n}(f^{n+k}(x)) = f^{-n}(f^n(x)) = x$ ▲

Déf. 4.5 (Points asymptotiques) *Soit* p *périodique de période* n. *On dit que* x *est* asymptotique en avant à p *ssi* $\lim_{i \to \infty} f^{i \cdot n}(x) = p$.
On récupère une notion d'asymptoticité vers les points non périodiques en imposant $\lim_{i \to \infty}(f^i(x) - f^i(p)) = 0$, *condition plus restrictive.*
Si f *est un homéomorphisme on peut définir de façon analogue l'*asymptoticité en arrière.
On appelle ensemble stable de p $W^s(p) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X \mid x$ *asympt. en avant à* $p\}$ *et* ensemble instable de p, $W^u(p)$, *l'analogue en arrière.*

4.2.2 Systèmes chaotiques

Comme on peut le voir avec les exemples paradigmatiques pour le cas monodimensionnel (famille quadratique sur $\mathbb{R}$ et translations de S^1), avec des fonctions simples on peut avoir des dynamiques étonnamment complexes. Il est inutile (comme l'avait bien compris Poincaré) de tenter une étude "laplacienne", qui cherche à rendre compte des déplacements de chaque point de manière déterministe. On a plutôt besoin de définitions capables de distinguer des caractéristiques remarquables du phénomène sur lesquelles, en changeant de niveau, on puisse "continuer" le discours scientifique.
Mais cela n'est pas évident aux débuts d'une discipline, et l'exemple de la dispute sur la définition de "système chaotique" en est un bon exemple. On choisit ici la définition de Devaney, encore en discussion mais, peut-être, la plus connue. Le problème

est donc: quelles sont les “qualités” à choisir pour la description d'une dynamique chaotique? Devaney en distingue trois.

Déf. 4.6 (Transitivité topologique - TT) *Une fonction continue* $f : X \to X$, *avec* X *espace topologique, est dite topologiquement transitive si* $\forall U, V \subset X$ *ouverts non-vides* $\exists n \in \mathbb{N}\ f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

On peut dire que la TT exprime une propriété d'indecomposabilité du système dynamique: on ne peut pas avoir $X = X_1 \cup X_2, f = f_1 \cup f_2$ et $(X_1, f_1), (X_2, f_2)$ systèmes dynamiques.

Déf. 4.7 (Sensibilité aux données initiales - SD) *On dit que* $f : X \to X$ *avec* X *espace métrique est* sensible aux données initiales *si*

$$\exists \delta > 0, \forall x \in X, \forall U_x, \exists y \in U_x, \exists n \in \mathbb{N},\ d(f^n(x), f^n(y))) \geq \delta$$

δ *est appelée* constante de sensibilité. *Si l'espace est quasi-métrique on dit que* f *est SD ssi*

$$\exists \delta > 0, \forall x \in X, \forall U_x, \exists y \in U_x, \exists n \in \mathbb{N},\ \max(d(f^n(x), f^n(y)), d(f^n(y), f^n(x))) > \delta$$

On voit immédiatement que la deuxième est une extension aux quasi-métriques de la première; elle est due à Edalat [Eda95d]. Exprimé en mots, tout voisinage de chaque point x contient des points qui vont finir par s'éloigner de (l'image de) x de plus qu'une certaine constante. Avec SD on a une sorte d'imprevisibilité: on ne peut pas simuler avec l'analyse numérique la dynamique d'un point x parce que l'erreur observationnelle, l'erreur d'arrondi et l'erreur sur les calculs, même minimisées, causent des différences drastiques sur les dynamiques.

Déf. 4.8 (Densité des points périodiques -DP) *Pour un système dynamique* $(X, f))$ *on a la* densité des points périodiques *si* $\overline{Per(f)} = X$.

Cette condition introduit un élément de régularité, qui se combine avec la continuité de f.

Déf. 4.9 (Devaney, Edalat - Système chaotique) *Une function continue* $f : X \to X$ *avec* X *quasi-métrique est* chaotique sur $Y \subseteq X$ *s'elle vérifie, sur* Y, *TT, SD, DP. Le système dynamique* (Y, f) *est dit* chaotique.

La partie du a Edalat dans cette définition est le “quasi”. Dans les derniers articles d'Edalat on peut trouver la définition avec uniquement TT et DP, le changement étant motivé du fait que, pour un espace métrique, TT et DP impliquent SD. C'est vrai que l'ancienne définition d'Edalat servait surtout à donner une notion de chaoticité extensible aux hyperespaces (voir théor. 4.24), et que en enlevant SD on obtient de même ce résultat. Mais dans certains cas la redondance dans les définitions est importante: par exemple, qui enlèverait de la définition de groupe l'identité à gauche et l'inverse à droite? Ici, SD est une définition fondamentale, tandis que DP est une requête bien plus arbitraire (et constitue le point principal de la discussion sur cette définition).

4.2.3 IFS

Déf. 4.10 (Fonction lipschitzienne, contraction) *Soient* X, Y *espaces métriques. On appelle fonction lipschitzienne une fonction* $f : X \to Y$ *t.q.* $\exists c \in \mathbb{R}^+ \forall x, x' \in X\ d_Y(f(x), f(x')) \leq c \cdot d_X(x, x')$. c *est appelée* constante de Lipschitz *pour* f.

Si $c < 1$ *la fonction est dite une* contraction.

Déf. 4.11 (IFS-IFS avec probabilités) *Un* système de fonctions itérées (Iterated Function System) $(X, f_1, \dots, f_N)$ *est un espace métrique complet* (X, d) *avec les* $f_i, i = 1, \dots, N$ *fonctions continues. L'IFS est dit* hyperbolique ou contractant *si tous les* f_i *sont des contractions.*

Un IFS avec probabilités $(X, (f_1, p_1), \dots, (f_N, p_N))$ *est un IFS où à chaque fonction* f_i *est associée une probabilité* $p_i > 0$ *avec* $\sum_{i=1}^{N} p_i = 1$.

L'IFS est pensé représenter un système dynamique discret avec choix possible entre plusieurs fonctions: à chaque étape chaque point peut choisir avec une certaine probabilité (implicite ou explicite) avec quelle fonction se déplacer.

Déf. 4.12 (Opérateur de Markov) *Soit* $(X, (f_1, p_1), \dots, (f_N, p_N))$ *un IFS avec probabilités. On appelle* opérateur de Markov *l'opérateur sur les mesures de probabilité* $T : M^1(X) \to M^1(X)$ *t.q.*

$$T(\mu)(B) = \sum_{i=1}^{N} p_i \cdot \mu(f_i^{-1}(B)), \text{ pour chaque } B \text{ borelien de } X$$

Déf. 4.13 (Arbre de l'IFS) *Soit* X *compact. On appelle* arbre de l'IFS *l'arbre* N*-aire infini ayant pour racine* X *et comme fils pour un noeud* K *les* $f_i(K)$.

Si l'IFS est avec probabilités on peut voir la probabilité p_i *comme associée à chaque arête* $K \to f_i(K)$.

Les noeuds de l'arbre sont donc les compacts du type $f_{i_1}(\dots f_{i_m}(X)\dots), (i_1, \dots, i_m) \in \{1, \dots, N\}$, et on a la propriété remarquable que chaque noeud fils est contenu dans son noeud père.

L'arbre de l'IFS donne avec ses branches tous les chemins possibles pour un point, en choisissant à chaque itération le fils correspondant à la fonction choisie par le point. Si l'on est dans le cadre avec probabilités, la probabilité pour un point d'être dans le noeud $f_{i_1}(\dots(f_{i_m}(X))\dots)$ est le produit des probabilités sur sa branche: $\prod_{j=1}^{N} p_{i_j}$.

Déf. 4.14 (IFS faiblement hyperbolique) *Soit* $(X, f_1, \dots, f_N)$ *un IFS (avec ou sans probabilités), avec* X *compact. On l'appelle* IFS faiblement hyperbolique *si l'intersection des noeuds de chaque branche de l'IFS est un singleton.*

Clairement, un IFS hyperbolique est bien un IFS faiblement hyperbolique, mais par exemple l'IFS formé par $[0, 1]$ avec la seule fonction $x \mapsto x(1 - x)$ est bien faiblement hyperbolique (on peut le voir graphiquement), mais pas hyperbolique parce que $f'(0) = 1$.

4.2.4 Attracteurs

Déf. 4.15 (Ensemble invariant) *On appelle* ensemble invariant *de* f *un* $Y \subseteq X$ *t.q.* $f(Y) \subseteq Y$

Déf. 4.16 (Attracteur) *Soit* (X, f) *un système dynamique; un ensemble invariant fermé* $C \subseteq X$ *est appelé* région de piège *si* $f(C) \subseteq \overset{C}{\circ}$ *(intérieur de* C*).*

Un sous-ensemble non-vide $\Lambda \subseteq X$ *est dit* attracteur *pour* f *s'il existe un voisinage relativement compact* N *de* Λ *avec* $\overline{N}$ *région de piège pour* f *et* $\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^n(\overline{N})$. Λ *est appelé* attracteur étrange *pour* f *si en plus* f *est chaotique sur* Λ.

4.3 Application de la théorie des domaines

4.3.1 Hyperespaces et systèmes dynamiques

Les attracteurs sont toujours des fermés, et sont des compacts dans les cas intéressants. Si l'on ajoute cette hypothèse, il est assez naturel de les penser comme points d'un hyperespace et l'on peut voir leur "comportement à l'infini" comme déterminé par des fonctions de compacts définies en partant de f.

Déf. 4.17 ($\mathbf{V}f, \mathbf{L}f, \mathbf{U}f$) *Soit* (X, f) *un système dynamique avec* X T_2. *On définit* $\mathbf{V}f : \mathbf{V}X \to \mathbf{V}X$ *comme* $\mathbf{V}f(K) = f(K)$, $\mathbf{U}f : \mathbf{U}X \to \mathbf{U}X$ *comme* $\mathbf{U}f(K) = f(K)$, $\mathbf{L}f : \mathbf{L}X \to \mathbf{L}X$ *comme* $\mathbf{L}f(F) = \overline{f(F)}$

Pour vérifier que ces définitions sont bien données il faut se rappeler que l'image continue d'un ensemble compact est compacte.

Lemme 4.18 (Continuité de $\mathbf{U}f$) *Si* $(K_i)_{i \in I}$ *est une famille dirigée dans* $\mathbf{U}X$,

$$f(\bigcap_{i \in I} K_i) = \bigcap_{i \in I} f(K_i).$$

Dém.

$\subseteq$ Évident.

$\supseteq$ Soit $y \in \bigcap_{i \in I} f(K_i)$; cela veut dire que $\forall i \in I\ \exists x_i \in K_i f(x_i) = y$. On peut induire une structure de net sur $(x_i)_{i \in I}$ en prenant $i \le j$ ssi $K_i \le K_j$. Supposons pour fixer les idées que $\exists i_0 \in I \forall i \in I\ K_{i_0} \supseteq K_i$. Le net $(x_i)_{i \in I}$, qui est contenu dans un compact, aura un point d'accumulation x qui donc est dans $\bigcap_{i \in I} K_i$ et, puisque f est continue, on a en plus que $f(x) = y$. ▲

Théorème 4.19 $(\mathbf{V}X, \mathbf{V}f), (\mathbf{L}X, \mathbf{L}f), (\mathbf{U}X, \mathbf{U}f)$ *sont des systèmes dynamiques.*

Dém. Immédiat avec les définitions et le lemme. ▲

Déf. 4.20 (Systèmes dynamiques pour les hyperespaces) $(\mathbf{V}X,\mathbf{V}f)$, $(\mathbf{L}X, \mathbf{L}f)$, $(\mathbf{U}X, \mathbf{U}f)$ *sont appelés respectivement* systèmes dynamiques de Vietoris, inférieur et supérieur de (X, f).

Prop. 4.21 *Un attracteur de* (X, f) *est un point fixe de* $\mathbf{U}f$.

Dém. $f^n(\bar{N})$, comme suite décroissante de compacts dans X, est bien un dirigé de $\mathbf{U}X$, et le lemme devient l'équation du point fixe. ▲

Déf. 4.22 (Système de Vietoris pour un IFS) *Soit* $(X, f_1, \ldots, f_N)$ *un IFS. On appelle* système de Vietoris pour l'IFS *le système dynamique* $(\mathbf{V}X, F)$ *avec* $F(K) = \bigcup_{i=1}^{N} f_i(K)$.

Lemme 4.23 *Dans un système de Vietoris* F *est Scott-continue.*

Dém. Parce que elle est composée de fonctions Scott-continues: l'union et les $\mathbf{U}f_i$. ▲

Si l'IFS est hyperbolique, son système de Vietoris l'est aussi, avec comme facteur de contraction pour F le max des facteurs des f_i.
Comme $\mathbf{V}X$ est aussi complet, on peut appliquer le théorème du point fixe de Banach et conclure que F a un unique point fixe, appelé *attracteur de l'IFS*.
Enfin, la notion de chaoticité passe aux hyperespaces.

Théorème 4.24 *Si* f *est chaotique sur* X, $\mathbf{U}f$ *est chaotique sur* $\mathbf{U}X$ *(comme quasi-métrique).*

Dém.

SD En fait, $\mathbf{U}f$ a la même constante de sensibilité δ de f: soit $K \in \Box A$, $x \in K$; il existe $y \in A$, $n \in N$ t.q. $d(f^n(x), f^n(y)) > \delta$, et donc $d_u(K, \{y\}) = d'(K, \{y\}) > \delta$ qui implique la condition pour les quasi-métriques.

TT Si $\Box A, \Box B$ sont deux ouverts de base non-vides, il existent $n \in \mathbb{N}, y \in X$ t.q. $A \cap f^n(B) \ni y$; alors $\{y\} \in \Box A \cap f^n(\Box B)$.

DP Encore, si x est un point périodique dans A ouvert de X, $\{x\}$ l'est dans $\Box A$. ▲

4.3.2 Théorème classique de Hutchinson

Dans ce contexte le travail de Hutchinson [Huc81] montre avec beaucoup d'analyse fonctionnelle que, si X est compact, on peut donner une métrique à $\mathbf{M^1}X$ telle que la topologie induite soit équivalente à la topologie faible *(autre topologie typique sur les espaces fonctionnelles; pour la définition voir [Bre83]); cela démontre que l'espace $\mathbf{M^1}X$ est métrique compact.
Si l'IFS est hyperbolique, alors l'opérateur de Markov devient une contraction sur $\mathbf{M^1}X$, avec comme unique point fixe une mesure de probabilité avec support sur l'attracteur de l'IFS. Ce résultat a eu beaucoup d'applications dans la "computer graphics" (on peut colorer selon la densité des petites sous-régions de l'attracteur), la compression d'images, les automates d'apprentissage. Pour plus de clarté on le reénonce ici.

Théorème 4.25 (Hutchinson) *L'opérateur de Markov d'un IFS hyperbolique avec probabilités sur un espace a un seul point fixe qui est appelé* mesure invariante *ou* ergodique *de l'IFS.*

4.3.3 Le résultat avec la théorie des domaines

On suppose que $(X, f_1, \dots, f_N)$ est un IFS hyperbolique (avec ou sans probabilités) et X compact (que n'est pas une vrai contrainte dans la pratique).

Montrons un lemme utile dans la suite et donnons en même temps un algorithme permettant d'obtenir une approximation discrète de l'attracteur de l'IFS avec une certaine tolérance $\epsilon > 0$ sur la métrique de Hausdorff.

Lemme 4.26 *Sur l'arbre de l'IFS, pour chaque ϵ il existe n tel que tous les noeuds au niveau $m \geq n$ ont un diamètre plus petit que ϵ.*

Dém. Par l'absurde. Si pour un ϵ l'on n'avait pas un telle n, à chaque niveau de l'arbre l'on aurait un noeud avec un diamètre supérieur à ϵ. Alors chaque noeud avant lui sur sa branche l'aurait aussi parce que le contient. Donc tout un sous-arbre infini aurait noeuds avec diamètre supérieur à ϵ, et pour le lemme de König aussi une branche infinie, contre l'hypothèse de contractivité. ▲

Pour l'algorithme, soit $x_0 \in X$. Supposons possible de décider si le diamètre d'un noeud est plus petit que ϵ. On peut trouver un sous-arbre de profondeur m avec feuilles $f_{i1}(\dots f_{im}(X)\dots)$ toutes de diamètre supérieure à ϵ. On a de plus $f_{i1}(\dots f_{im}(x_0)\dots) \in f_{i1}(\dots f_{im}(X)\dots)$. Alors A_ϵ, la collection (finie) de ces points est l'approximation que l'on voulait: on l'obtient aisément en rappelant que l'attracteur est $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F^n(X)$, qui est contenu dans $F^m(X)$, et en sachant que chaque point de ce dernier ensemble diste moins de ϵ deA_ϵ.

Pour récupérer le théorème de Hutchinson il faut utiliser le théorème du point fixe de Tarski. Pour cela on utilise l'immersion d'Edalat $e : \mathbf{M^1}X \to \mathbf{PU}X$ du chapitre 3 et en plus on a besoin d'une extension de l'opérateur de Markov T sur tout l'espace $\mathbf{PU}X$.

Déf. 4.27 (Opérateur de Markov sur $\mathbf{PU}X$) *On définit la fonction $H : \mathbf{PU}X \to \mathbf{PU}X$ avec*

$$\mu \mapsto \sum_{i=1}^{N} p_i \, \mu \circ f_i^{-1}.$$

L'évaluation simple donnée par l'itération m-ième de H peut être écrite, en rappelant que $\delta_{f(X)} = \delta_X \circ f^{-1}$, de la façon suivante:

$$H^m(\delta_X) = \sum_{1 \leq i_1, \ldots, i_m \leq N}^{N} p_{i_1} \ldots p_{i_m} \, \delta_{f_{i_1}(\ldots f_{i_m}(X) \ldots)}.$$

On peut remarquer que les évaluations simples $H^m(\delta_X)$ forment une chaîne croissante dans $\mathbf{PU}X$. Le sup de cette chaîne, ν^*, par le théorème de Tarski est le plus petit point fixe de H. Mais si l'on montre qu'il est maximal, on aura à la fois l'unicité et le fait qu'il est bien la mesure invariante de l'IFS (pour le corollaire 3.30) .

Pour cela il suffit de montrer que $\nu^*(s(X)) = 1$, par la prop. 3.24. Soit donc, pour chaque $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$, $O_k \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{x \in X} \Box B_k(x)$. O_k est une chaîne décroissante d'ouverts dans $\mathbf{U}X$ de limite $s(X)$, donc

$$\nu^*(s(X)) = \inf_{k \geq 1} \nu^*(O_k).$$

Par le lemme 4.26, pour chaque k on peut trouver un entier n tel que tous les noeuds de l'IFS au niveau n ont un diamètre inférieur à $1/k$ et pour $m \geq n$, chaque $f_{i_1}(\ldots f_{i_m}(X) \ldots) \in O_k$.
Alors on a fini, puisque $1 = H^m(\delta_X(O_k)) \leq \nu^*(O^k)$.
Mais on a encore plus: en observant que $H^m(\mu \circ s^{-1}) = (T^m \mu) \circ s^{-1}$ pour chaque $\mu \in \mathbf{M^1}X$, on a que la suite $T^m \mu \circ s^{-1}$ tend aussi vers ν^*. Si l'on regarde les images inverses en utilisant la prop. 3.29, on peut "enlever les s" et donner la généralisation du théorème de Hutchinson:

Théorème 4.28 (Edalat) *Dans un IFS faiblement hyperbolique avec probabilités sur un X compact, l'itération de l'opérateur de Markov sur une mesure quelconque converge faiblement vers la mesure invariante de l'IFS.*

Chapitre 5

Application aux espaces métriques

Dans tout ce chapitre nous allons voir la construction d'un hyperespace dans le cas des espaces métriques. Ce cas particulier (mais qui concerne la majorités cas concrets) permet d'obtenir des résultats très intéressants. Il faudra pour cela changer d'hyperespace d'une manière pas évidente. On suppose donc dans tout le chapitre que (X, d) est un espace métrique.

5.1 Les boules formelles

On peut penser utiliser l'hyperespace $\mathbf{C}X$ des boules fermées ordonné par l'inclusion inverse, qui est beaucoup plus simple et régulier que $\mathbf{U}X$. Mais cela n'est pas le meilleur choix. Considérons l'exemple suivant:

Exemple 5.1 (Edalat) Non-complétude de l'espace des boules formelles pour des espaces complets. *Soit (X, d) l'espace métrique où $X = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ et $d(x_n, x_m) = 1{+}1/(n+m)$ si $n \neq m$. Il est facile de vérifier que X est complet (parce que composé de points isolés). Par contre l'ensemble des boules fermées ordonné avec l'inclusion inverse n'est pas complet, comme le montre la suite $C_n = C(x_n, 1{+}1/2n)$, où l'on a que $C_n = \{x_i \mid i \geq n\}$, et donc on a bien une suite croissante sans sup.*

Pour récupérer la symétrie entre l'espace X et son hyperespace Edalat re-propose une construction de Weihrauch et Schreiber [WS81]:

Déf. 5.2 (Weihrauch et Schreiber- Boules formelles) *On appelle ensemble des* boules formelles sur X *espace métrique, l'ensemble* $\mathbf{B}X \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, r) \mid x \in X, r \in \mathbb{R}\}$, *muni de l'ordre:*

$$(x, r) \leq (y, s) \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} d(x, y) \leq r - s$$

Par rapport à la relation d'inclusion inverse on exclut certains couples: dans l'exemple 5.1 la chaîne C_n est entièrement détruite.

5.1.1 Pourquoi les boules formelles?

Si l'exemple d'Edalat éclaircit le point de (non) liaison entre les propriétés de $\mathbf{C}X$ et X (montrant ainsi la nécessité d'introduire $\mathbf{B}X$ il ne donne pas l'intuition de l'opération d'affaiblissement effectué sur l'ordre. Voyons pour cela un exemple beaucoup plus simple.

Exemple 5.3 (Exemple de la demi-droite) *Soit X la demi-droite réelle considérée comme espace métrique. La boule $(2,2)$ contient celle $(0,3)$ mais l'on n'a pas $(2,2) \leq (0,3)$ dans $\mathbf{B}X$.*

L'idée est que intuitivement (0,3) est plus grande que (2,2), mais le "bord" de X empêche de le montrer. On peut imaginer que l'on puisse obtenir l'ordre d'Edalat en considérant l'immersion de l'espace métrique dans un espace plus grand (complété dans un sens très particulier) et en prenant comme couples ordonnés ceux qui restent ordonnés dans l'espace complété. Cette intuition est bonne et sa démonstration est le contenu de ce paragraphe. Il faut anticiper un résultat de la section suivante: dans un espace de Banach les hyperespaces **B**X et **C**X coïncident. Il suffit alors de trouver une immersion isométrique d'un espace métrique quelconque dans un espace de Banach, comme cela on aura une immersion naturelle entre les hyperespaces correspondants.

Théorème 5.4 *L'espace $BC(X)$ des fonctions continues et bornées de X dans $\mathbb{R}$ est un espace de Banach avec la norme $||f|| = \sup_{x \in X} f(x)$.*

Dém. Le fait que $||.||$ soit une norme et que $BC(X)$ soit un espace vectoriel est un exercice classique; la complètude est le théorème "des trois ϵ". ▲

Théorème 5.5 *Chaque espace métrique X admet une immersion isométrique dans une espace de Banach.*

Dém. Choisissons un point x_0 comme origine de l'espace vectoriel. Pour chaque point de X on définit la fonction $f_x(y) = d(y,x) - d(y,x_0)$. La fonction est continue (différence de fonctions continues) et bornée ($f_x(y) \leq d(x,x_0)$ par l'inégalité triangulaire). Il reste à montrer que l'application $x \mapsto f_x$ est une isométrie de X dans $BC(X)$ (car l' injectivité est trivial). En effet $d(f_x,f_y) = ||f_x - f_y|| = \sup_{z \in X} |d(x,z) - d(x_0,z) - d(y,z) + d(x_0,z)| = d(x,y)$. ▲

Cette immersion n'est sûrement pas "optimale" (par exemple du point de vue de la dimension de l'espace construit): la demi-droite de l'exemple va être immergée dans un espace "énorme", et pas simplement dans la droite réelle comme le voudrait l'intuition. Mais le procédé étant tout à fait général, il ne vaut pas la peine de l'optimiser ici. Par contre on voit avec un peu de réflexion que l'espace métrique de l'exemple d'Edalat, bien que dénombrable, nécessite pour une immersion isométrique un espace vectoriel de dimension infinie.

5.2 Symétries de BX et X. Immersion d'Edalat. Complétés.

5.2.1 Symétrie des complétés.

Il faut d'abord vérifier que $\leq$ est vraiment un ordre:

Prop. 5.6 *$\mathbf{B}X$ avec la nouvelle relation (déf. 5.2) est un ordre partiel.*

Dém. C'est maintenant un corollaire du théorème 5.5, parce qu'on a bien que l'image de X dans $BC(X)$ hérite la structure d'ordre partiel sur $\mathbf{B}X$ de $(\mathbf{C}(BC(X)), \supseteq)$. ▲

Rem. 5.7 *$(x,r) \leq (y,s) \Rightarrow r \geq s$, par la positivité de la distance.*

Le grand avantage de travailler avec les boules formelles est que souvent on peut utiliser les bonnes propriétés de $\mathbb{R}$. Voici l'un de ces résultats, très utile pour la suite.

Théorème 5.8 *Chaque dirigé D dans $\mathbf{B}X$ admet une sous-chaîne C avec les mêmes majorants que D.*

Dém. Soit $s = \inf\{r \mid (x,r) \in D\}$, $((y_n, s_n))_{n\in\mathbb{N}^+}$ suite dans D t.q. $s_n \leq s + 1/n$. On obtient une suite croissante C en prenant $(x_1, r_1) = (y_1, s_1)$ et (x_n, r_n) majorant de (x_{n-1}, r_{n-1}) et (y_n, s_n). Il est évident que chaque majorant de D est majorant de C. À l'inverse, observons d'abord que pour chaque $(a,u) \in D$ on peut prendre une succession croissante $((a_n, u_n))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D$ avec $(a_0, u_0) = (a, u)$ et (a_n, u_n) majorant de (a_{n-1}, u_{n-1}) et de (x_n, r_n).
Soit maintenant (z,t) un majorant de C; on peut estimer $d(a,z)$:

$$\begin{aligned}
d(a,z) &\leq d(a,a_n) + d(a_n,x_n) + d(x_n,z) \\
&\leq (u-u_n) + (r_n-u_n) + (r_n-t) && \text{par les inégalités de construction} \\
&= u - t + 2(r_n-u_n) \\
&\leq u - t + 2(r_n - s) && \forall n_s \leq u_n \\
&\leq u - t + \frac{2}{n} && s \leq r_n \leq s_n,
\end{aligned}$$

et ceci vrai pour chaque n implique à la limite que $d(a,z) \leq u-t$, c.à.d. $(a,u) \leq (z,t)$. ▲

Autre proposition fondamentale pour le parallèle entre X et $\mathbf{B}X$:

Prop. 5.9 *Si $(x_n, r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante dans $\mathbf{B}X$, alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans X. De l'autre côté, on peut extraire de chaque suite de Cauchy dans X une sous-suite de points qui sont les centres d'une suite croissante de boules dans $\mathbf{B}X$.*

Dém. $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et positive, donc convergente (et de Cauchy). Donc $|r_n - r_m| < \epsilon$ pour $n,m > N$, avec N suffisamment grand. En utilisant l'ordre de la chaîne on a: $n \geq m > N \Rightarrow (x_n, r_n) \geq (x_m, x_m)$ et donc $d(x_n, x_m) \leq r_m - r_n < \epsilon$. Pour la deuxième partie il suffit de prendre, pour chaque k, un n_k tel que pour chaque $i,j \geq n_k$ on ait $d(x_i, x_j) < 2^{-(k+1)}$; on aura que $d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) \leq 2^{-(k+1)} = 2^{-k} - 2^{-(k+1)}$ et donc $(x_{n_k}, 2^{-k}) \leq (x_{n_{k+1}}, 2^{-(k+1)})$. ▲

On peut maintenant exprimer la liaison entre sup de $\mathbf{B}X$ et limites de X.

Théorème 5.10 *Soit $(x_n, r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante dans $\mathbf{B}X$ et $(y,s) \in \mathbf{B}X$; les propriétés suivantes sont équivalentes:*

1. *(y,s) est le sup de $(x_n, r_n)_{n\in\mathbb{N}}$*
2. *(y,s) est un majorant de $(x_n, r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $x_n \xrightarrow{n} y$*
3. *$x_n \xrightarrow{n} y$ et $r_n \xrightarrow{n} s$*

Dém.

1 ⇒ 2: Si $s < t = \lim_{n\to\infty} r_n$ soit N t.q. $n,m \geq N \Rightarrow d(x_n, x_m) < (t-s)/2$; alors $d(x_n, x_N) < (t-s)/2 \leq r_n - s + (t-s)/2$ et $(x_N, s + (t-s)/2)$ serait un majorant pour la succession pas plus grand que (y,s) $(s + (t-s)/2 \not\leq s)$.

2 $\Rightarrow$ *3:* Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ $(x_n, r_n) \leq (y, s)$, c.à.d. $d(x_n, y) \leq r_n - s$. Mais $r_n \xrightarrow{n} s \Rightarrow x_n \xrightarrow{n} y$.

3 $\Rightarrow$ *1:* $n \geq m \Rightarrow (x_n, r_n) \geq (x_m, r_m) \Rightarrow d(x_n, x_m) \leq r_m - r_n$. Pour $n \to \infty$ à gauche et à droite on a $d(y, x_m) \leq r_m - s$ et donc (y, s) est un majorant de la succession. Soit (z, t) t.q. pour chaque n $(x_n, r_n) \leq (z, t)$; on a $d(x_n, z) \leq r_n - t$ et pour $n \to \infty$ $d(y, z) \leq s - t$, c.à.d. $(y, s) \leq (z, t)$. ▲

On peut finalement exprimer la première symétrie entre les propriétés de X et de $\mathbf{B}X$:

Théorème 5.11 *Les faits suivants sont équivalents:*

1. *X est complet;*
2. *$\mathbf{B}X$ est un dcpo;*
3. *$\mathbf{B}X$ est ω-complet.*

Dém.

2 $\Rightarrow$ *3:* Trivial

3 $\Rightarrow$ *2:* Par le théorème 5.8.

1 $\Rightarrow$ *2:* Chaque chaîne croissante dans $\mathbf{B}X$ admet donc la limite y de ses centres et $(y, \lim_{n\to\infty} r_n)$ est sup par le théorème précédent.

2 $\Rightarrow$ *1:* Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans X; grâce à la prop. 5.9 on peut créer dans $\mathbf{B}X$ une suite croissante de centres une sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Par hypothèse cette suite admet une limite (y, s) et par le théorème précédent y est la limite de la sous-suite dans X. Mais alors y est la limite de la suite entière. ▲

5.2.2 Symétrie de la continuité

Passons maintenant à la continuité. Comme d'habitude, on cherche avant tout une caractérisation de la relation de way-below dans notre espace:

Prop. 5.12 $(x, r) \ll (y, s) \Leftrightarrow d(x, y) < r - s$

Dém.

$\Rightarrow$) Supposons $(x, r) \ll (y, s)$. Il existe alors un n t.q. $(x, r) \leq (y, s + 1/n)$, parce que le deuxième membre est un terme d'une suite croissante de sup (y, s); mais cela implique $d(x, y) < r - s$.

$\Leftarrow$) Supposons $d(x, y) < r - s - \epsilon$ et soit Z un dirigé avec sup $(z, t) \geq (y, s)$: on peut en extraire une sous-chaîne (z_n, t_n) croissante et t.q. (théorème 5.10) $\lim_{n\to\infty} z_n = z$, $t_n \xrightarrow{n} t$ en décroissant. Il existe alors $n \in \mathbb{N}$ t.q. $d(z, z_n) < \epsilon/2$ et $t_n < t + \epsilon/2$. On peut voir que

$$\begin{aligned} d(x, z_n) &\leq d(x, y) + d(y, z) + d(z, z_n) \\ &< (r - s - \epsilon) + (s - t) + \epsilon/2 \\ &= r - t + \epsilon/2 \\ &< r - t_n \end{aligned}$$

et $(x, r) \leq (z_n, t_n)$ ▲

Théorème 5.13 **B**X *est un po continu: il admet comme base le produit $A \times B$ d'une partie dense A dans X et d'une partie dense B dans $\mathbb{R}^+$.*

Dém. On peut démontrer que, pour chaque $(x,r) \in \mathbf{B}X$, $\Downarrow_B(x,r)$ contient une chaîne croissante de sup (x,r). Soit donc $a_n \in A$ avec $d(a_n,x) < 4^{-n}$, et $b_n \in B$ t.q. $r + 2 * 4^{-n} < q_n < 3 * 4^{-n}$; on a: $d(a_n,x) < 4^{-n} < 2 * 4^{-n} < b_n - r$, c.à.d. $(a_n,b_n) \ll (x,r)$. Pour $n > 1$,

$$\begin{array}{rcl} d(a_{n-1},a_n) & \leq & d(a_{n-1},x) \\ & < & 4^{-(n-1)} + 4^{-n} \\ & = & 5 * 4^{-n} \\ & = & (r + 2 * 4^{-(n-1)}) - (r + 3 * 4^{-n}) \\ & < & b_{n-1} - b_n, \end{array}$$

et $(a_{n-1},b_{n-1}) \leq (a_n,b_n)$. Enfin $\lim_{n\to\infty} b_n = r$ implique, grâce au théor. 5.10 que (x,r) est sup de $(a_n,b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. ▲

Prop. 5.14 *Si B est une base pour* **B**X*, alors $\{a \in X \mid (a,r) \in B\}$ est dense dans X.*

Dém. Soit $x \in X$; avec le théor. 5.13 on a qu'il existe $((x_n,r_n))_{n\in\mathbb{N}}$ suite croissante avec sup $(x,0)$, et avec le théor. 5.10 que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. ▲

Donnons un bel énoncé résumant ce que l'on a démontré dans ce paragraphe:

Prop. 5.15 **B**X *est un po continu, ω-continu ssi X est séparable.*

Dém. Par la continuité il suffit d'observer que X et $\mathbb{R}^+$ sont denses dans eux-mêmes et donc $\mathbf{B}X$ admet soi-même comme base. On a l'équivalence de la dénombrabilité en prenant $\mathbb{Q}^+$ comme B du théor. 5.13. ▲

5.2.3 B comme foncteur

Pour les définitions de catégorie et de foncteur voir p.e. [AL91]. On veut trouver une catégorie ayant comme objets les espaces métriques en corrélation fonctorielle avec une catégorie ayant comme objets les po continus (l'on veut $X \mapsto \mathbf{B}X$); mais si l'on prend comme morphismes simplement les fonctions continues on n'a pas de corrélation évidente avec les fonctions Scott-continues. On doit donc restreindre les fonctions à considérer. Pour cela c'est assez naturel de penser aux fonctions lipschitzienne, lesquelles envoient boules *dedans* boules. En effet, si l'on considère une fonction lipschitzienne comme un couple (f,c)on peut vérifier que les espaces métriques avec les fonctions lipschitziennes forment une catégorie avec $Id_X = (Id_X, 1)$, et $(g,c') \circ (f,c) = (g \circ f, c' \cdot c)$. En plus on peut associer (f,c) à la fonction $\mathbf{B}(f,c)$ $(x,r) \mapsto (f(x), c \cdot r)$, parce que on a $f(C(x,r)) \supseteq C(f(x), c \cdot r)$.

Théorème 5.16 **B** *est un foncteur entre la catégorie (espaces métriques, fonctions lipsch.) et la catégorie (po continues, fonctions Scott-continues).*

Dém. La seule chose à démontrer réellement ici est que $\forall(f,c)$ lipschitzienne $g = \mathbf{B}(f,c)$ est Scott-continue.

g monotone:

$$\begin{array}{rcl} (x,r) \leq (x',r') & \Rightarrow & d(x,x') \leq r - r' \\ & \Rightarrow & d(f(x),f(x')) \leq cr - cr' \\ & \Rightarrow & (f(x),cr) \leq (f(x'),cr') \end{array}$$

c'est-à-dire $g(x,r) \leq g(x',r')$.

g *Scott-continue:* comme on travaille seulement avec po de boules formelles, il est suffisant de considérer les chaînes croissantes. Soit telle $(x_n, r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sup (x,r); on a par le théor. 5.13 que $x_n \xrightarrow{n} x$, $r_n \xrightarrow{n} r$. Alors $f(x_n) \xrightarrow{n} f(x)$ et $c \cdot r_n \xrightarrow{n} c \cdot r$ et, toujours par le théor. 5.10 $g(x,r)$ est le sup de $(g(x_n, r_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

▲

5.2.4 Immersion d'Edalat dans $\mathbf{B}X$

Il n'est pas trop difficile d'obtenir une pré-immersion d'Edalat dans $\mathbf{B}X$.

Déf. 5.17 *On note $i : X \to \mathbf{B}X$ l'injection $x \mapsto (x,0)$; on note X^+ son image $X \times \{0\}$.*

Prop. 5.18

1. *X^+ est le sous-espace maximal de $\mathbf{B}X$.*
2. *X^+ est un G_δ de $\mathbf{B}X$.*
3. *i est continue d'inverse $i^{-1} : X^+ \to X$.*

Dém.

(1) Trivial.

(2) X^+ est égal a $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$, ou $O_n = \bigcup_{x\in X} \Uparrow(x, 1/n) = X \times [0, 1/n)$ est un ouvert de Scott pour chaque n.

(3) On peut démontrer qu'ouverts de base viennent d'ouverts de base: on a que $\Uparrow(x,r)$ est une base pour $\mathbf{B}X$, et $i^{-1}(\Uparrow(x,r)) = O(x,r)$ pour la prop. 5.12, et les $O(x,r)$ forment une base pour X. ▲

Cor. 5.19

1. *Dans ces hypothèses i est une pre-immersion d'Edalat.*
2. *Si X est en plus complet et séparable i est une immersion d'Edalat.*

Avec cela on a encore une fois une structure effective pour la théorie de la mesure et de l'intégration sur les espaces polonais (espaces métriques avec topologie complète et séparable). Voyons enfin comme le foncteur $\mathbf{B}$ coopère avec i:

Prop. 5.20 *Pour chaque fonction lipschitzienne $(f,c) : X \to Y$, $\mathbf{B}(f,c) \circ i = i \circ f$.*

Dém. $\forall x \in X$, $\mathbf{B}(f,c)(i(x)) = (f(x), c \cdot 0) = i(f(x))$. ▲

Par l'identification entre X et X^+ on peut dire que l'image fonctorielle de f étend f.

5.2.5 $\mathbf{B}X = \mathbf{C}X$ dans les espaces classiques

Il ressort clairement de la discussion du paragraphe 5.1.1 qu'un espace avec de bonnes propriétés d'isotropie doit réaliser l'égalité entre $\mathbf{B}X$ et $\mathbf{C}X$. Il faut rappeler qu'un espace vectoriel réel X avec une norme $||.||$ est aussi un espace métrique: il suffit de prendre $d(\vec{x}, \vec{y}) = ||\vec{x} - \vec{y}||$

Théorème 5.21 *Dans X espace vectoriel normé non trivial ($X \neq \{0\}$), $d(x, y) \leq r - s \Leftrightarrow C(x, r) \supseteq C(y, s)$.;*

Dém. Il suffit de démontrer $C(x, r) \supseteq C(y, s) \;\Rightarrow\; d(x, y) \leq r - s$. Puisque la norme est invariante par translation on peut supposer $\vec{y} = 0$.
Si $\vec{x} = 0$ soit $\vec{z} \neq 0$; $\vec{z'} = s/||\vec{z}|| \cdot \vec{z} \in C(0, s)$ implique $\vec{z'} \in C(0, r)$, c.à.d. $d(\vec{z'}, 0) \leq r \Rightarrow s \leq r$.
Si $\vec{x} \neq 0$ par homogénéité de la norme on peut le prendre de longueur 1. $-s\vec{x} \in C(0, s) \Rightarrow -s\vec{x} \in C(\vec{x}, r)$ c.à.d. $d(\vec{x}, -s\vec{x}) \leq r$. Alors $|-s-1| \leq r$ et $1 \leq r - s$. ▲

En rappelant qu'un espace de Banach est simplement un espace vectoriel normé complet on a immédiatement:

Cor. 5.22 *L'espace des boules fermées d'un espace de Banach séparable et non-trivial est un dcpo ω-continu.*

5.2.6 Complétés.

Une autre démonstration du lien profond entre les propriétés de X comme espace métrique et celles de $\mathbf{B}X$ comme dcpo est que l'on peut obtenir le complété métrique $\overline{X}$ de X à partir du complété de la théorie des ordres de $\mathbf{B}X$.

Théorème 5.23 $\mathbf{B}\overline{X}$ *est isomorphe à $\mathcal{I}(\mathbf{B}X)$.*

Dém. Puisque X est dense dans $\overline{X}$, $X \times \mathbb{R}^+$ est une base pour $\mathbf{B}\overline{X}$, par le théor. 5.13. De plus $\mathbf{B}\overline{X}$ est un dcpo continu par le théor. 5.11. Avec la caractérisation de la relation de way-below donnée, il est évident que la base abstraite $(\mathbf{B}X, \ll)$ est la restriction de la base abstraite $(\mathbf{B}\overline{X}, \ll)$. Par l'égalité des bases on a l'égalité des po continues grâce à la prop. 2.9. ▲

Donc pour construire $\overline{X}$ (comme espace topologique!) on peut prendre le po $\mathbf{B}X$, le rendre un dcpo D et ensuite en considérer Max D, qui est isomorphe a $\overline{X}$ par la prop.5.15. C'est une possibilité, mais son utilité n'est pas évidente: "En général, ajouter des points a un po pour en faire un dcpo est un problème difficile" ([AJ94], pag. 12).

5.3 Applications aux espaces classiques

5.3.1 Le théorème du point fixe de Banach

Avec tous les outils de la section précédente l'on peut donner une démonstration exclusivement "théorie des domaines" d'un des théorèmes les plus classiques sur les espaces métriques.

Théorème 5.24 (Point fixe) *Chaque contraction sur un espace métrique complet admet un point fixe unique, limite de chaque orbite.*

Dém. Soit (X, d) un espace métrique, $f : X \to X$ une contraction avec constante de Lipschitz $c < 1$. Soit $g \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{B}(f, c) : \mathbf{B}X \to \mathbf{B}X$. Pour chaque $x \in X$, on peut

prendre $R_x \stackrel{\text{def}}{=} d(x, f(x))/(1-c)$. On a que $r \geq R_x \Rightarrow d(x, f(x)) \leq (1-c)r = r - cr$, et alors $(x, r) \leq (f(x), cr) = g(x, r)$. Grâce à la monotonie de g on obtient $g(\uparrow(x, r)) \subseteq \uparrow(x, r)$.
Sur le cpo $\uparrow(x, r)$ on peut appliquer le théorème du point fixe de Tarski et $(f^n(x), c^n r)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne croissante avec comme sup le plus petit point fixe de la restriction de g sur $\uparrow(x, r)$, disons (y, s). Par le théor. 5.10 , $f^n(x) \xrightarrow{n} y$ et $s = \lim_{n\to\infty} c^n r = 0$, donc $(y, 0)$ est aussi maximal et g a un seul point fixe sur $\uparrow(x, r)$.
Montrons que f a un seul point fixe. Par l'absurde, soit (z, t) un autre point fixe. En prenant r suffisamment grand, $(z, t) \in \uparrow(x, r)$ et $(z, t) = (y, 0)$. On a donc, par le théor. 5.10, $\forall x \in X, f^n(x) \xrightarrow{n} y$, d'où la conclusion. ▲

5.3.2 Une autre forme du théorème de Hutchinson

On a déjà vu que $i : X \to \mathbf{B}X$ est une immersion d'Edalat si X est complet. Appelons $e : \mathbf{M^1}X \to \mathbf{PB}X$ l'immersion topologique étudiée dans le chapitre 2.

Ici on veut une autre version du théorème de Hutchinson. Cette fois on ne se base pas sur la compacité de X, donc il ne sera pas possible d'insérer $H(\delta_X)$ sous une mesure quelconque μ sur X et de forcer la convergence des itérées de $T^n(\mu)$ vers la mesure ergodique. Il faudra travailler dans $\mathbf{PB}X$ et récupérer la compacité du support de la mesure invariante.

Théorème 5.25 *Un IFS hyperbolique avec probabilités sur un espace X métrique et complet a une mesure invariante unique parmi les mesures normalisées à support borné; cette mesure est à support compact.*

Dém. Il faut commencer avec quelques notations. On appelle $\Sigma \stackrel{\text{def}}{=} \{1, \ldots, N\}$, $\sigma \stackrel{\text{def}}{=} (i_1, \ldots, i_n) \in \Sigma^n$ et $\sigma i \stackrel{\text{def}}{=} (i_1, \ldots, i_n, i) \in \Sigma^{n+1}$; enfin on note $c_\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{j\in\Sigma} c_{i_j}$ et $p_\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{j\in\Sigma} p_{i_j}$.
Pour chaque f_i, soit $\mathbf{M^1}f_i : \mathbf{M^1}X \to \mathbf{M^1}X$ qui associe $\mu \mapsto \mu_{f_i}$ la mesure image de μ avec f_i. L'opérateur de Markov est alors $T \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i\in\Sigma} p_i \mathbf{M^1} f_i : \mathbf{M^1}X \to \mathbf{M^1}X$.
Appelons $g_i \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{B}(f_i, c_i) : \mathbf{B}X \to \mathbf{B}X$ et $\mathbf{P}g_i : \mathbf{PB}X \to \mathbf{PB}X$ les fonctions continues qui associent $\nu \mapsto \nu_{g_i}$, à chaque évaluation son évaluation image. L'opérateur $H : \mathbf{PB}X \to \mathbf{PB}X$, $H \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i\in\Sigma} p_i \mathbf{P}g_i$, est continu.
On peut vérifier l'égalité $H \circ e = e \circ T$. Puisque e est injective, on a que μ est point fixe de T ssi $e(\mu)$ est point fixe de H.
Notons encore: $f_\sigma \stackrel{\text{def}}{=} f_{i_1} \circ \ldots \circ f_{i_n}$, $g_\sigma \stackrel{\text{def}}{=} g_{i_1} \circ \ldots \circ g_{i_n}$.
Comme dans le paragraphe précédent, pour chaque $x \in X$ il existe

$$R_x = \max_{i\in\Sigma} \frac{d(x, f_i(x))}{(1-c_i)} \text{ t.q. } r > R_x \Rightarrow \forall i \in \Sigma,\ g_i((x, r)) \geq (x, r),$$

donc $H(\delta_{(x,r)}) = \sum_{i=1}^N p_i \mathbf{P}\delta_{(x,r)} \geq \sum_{i=1}^N p_i \delta_{(x,r)} = \delta_{(x,r)}$. Par monotonie $H(\uparrow \delta_{(x,r)}) \subseteq \uparrow \delta_{(x,r)}$ et par continuité elle a un plus petit point fixe $\nu_{(x,r)} = \bigsqcup^{\uparrow} H^n(\delta_{(x,r)})$, que, r étant arbitraire, on peut noter ν_x.
$H^n(\delta_{(x,r)}) = \sum_{i\in\Sigma} p_\sigma \delta_{g_\sigma(x,r)}$, et on peut penser encore une fois à l'arbre qui a comme racine (x, r) et comme fils de $g_\sigma(x, r)$ les N $g_{\sigma i}(x, r)$. On appelle F_n l'union des boules du niveau n de l'arbre: $F_n \stackrel{\text{def}}{=} \{g_\sigma(x, r) \mid \sigma \in \Sigma^n\}$, on appelle K l'ensemble des limites sur chaque branche (qui, par monotonie, est une séquence croissante dans $\mathbf{B}X$). Par le lemme de König, si $K \subseteq O$ avec O ouvert, il existe n tel que F_n l'est aussi. Dans ces conditions K est clairement compact, mais on a en plus que $H^n(\delta_{(x,r)})(O) = 1$ et $\nu_x(O) = 1$. O étant arbitraire, on a $\nu_x(K) = 1$. K est dans

X^+, parce que $g_\sigma(x,r) = (g_\sigma(x), c_\sigma \cdot r)$, et ν_x est maximale dans $\mathbf{PB}X$, et donc unique point fixe sur $\uparrow \delta_{(x,r)}$.
Remarquons que si $y \in K \cap O$ avec O ouvert, il existeF_n t.q. $F_n \cap O \neq \emptyset$, et puisque chaque $p_i > 0$, $H^n(\delta_{(x,r)})(O) > 0$. Soient maintenant μ_x t.q. $e(\mu_x) = \nu_x$ (qui existe par 3.24.(2), $S \stackrel{\text{def}}{=} e^{-1}(K)$; S est compact parce que image d'un compact, il hérite les propriétés avec les ouverts (en substituant μ_x à ν_x) parce que e est une immersion topologique, et donc il est le support compact de μ_x.
Si μ est une autre mesure invariante probabilistique à support borné, il existe un $r > R_x$ t.q. $supp(\mu) \subseteq O(x,r)$, et donc $\mu(O(x,r)) = 1$. ν, son image par e, est un point fixe de H. $(x,r) \in V$ pour V ouvert implique $O(x,r) \subseteq e^{-1}(V)$, c.à.d. $\nu(V) = 1$. Alors $\delta_{(x,r)} \leq \nu$ et on a la thèse par l'unicité du point fixe dans $\uparrow \delta_{(x,r)}$, avec l'injectivité de e. ▲

Bibliographie

[ACon] Roberto Amadio and Pierre-Louis Curien. *Domains and Lambda Calculi*. Cambridge University Press, (en cours de publication).

[AJ94] Samson Abramsky and Achim Jung. Domain theory. In S. Abramsky, D. M. Gabbay, and T. S. E. Maibaum, editors, *Handbook of Logic in Computer Science*, volume 3. Clarendon Press, 1994.

[AL91] Andrea Asperti and Giuseppe Longo. *Categories, Types and Structures*. MIT Press, 1991.

[BB85] E. Bishop and D. Bridges. *Constructive Analysis*. Springer-Verlag, 1985.

[Bir48] Garrett Birkoff. *Lattice Theory*. American Mathematical Society, first edition, 1948.

[Bre83] Haïm Brezis. *Analyse Fonctionnelle*. Masson, 1983.

[Dev89] R. Devaney. *An Introduction to Chaotical Dynamical Systems*. Addison Wesley, second edition, 1989.

[Dug66] J. Dugundji. *Topology*. Allyn and Bacon, 1966.

[Eda95a] Abbas Edalat. Domain of computation of a random field in statistical physics. In C. Hankin et alia, editor, *Theory and Formal Methods 1994: Proceedings of the second Imperial CollegeWorkshop*. IC Press, 1995.

[Eda95b] Abbas Edalat. Domain theory in learning processes. In S. Brooks, M. Main, A. Melton, and M. Mislove, editors, *Proceedings of MFPS*, volume 1. Elsevier, 1995.

[Eda95c] Abbas Edalat. Domain theory in stochastic processes. In *Proceedings of Logic in Computer Science (LICS). Tenth Annual IEEE Symposium,26-19 June, 1995, San Diego*. IEEE Computer Society Press, 1995.

[Eda95d] Abbas Edalat. Dynamical systems, measures and fractals via domain theory. *Information and Computation*, 120(1):32–48, 1995.

[Eda96a] Abbas Edalat. Power domain and iterated function systems. *Information and Computation*, 124:182–197, 1996.

[Eda96b] Abbas Edalat. When Scott is weak on the top. *Mathematical Structures in Computer Science*, 1996. (en cours de publication).

[EE96] A. Edalat and M. Escardó. Integration in real PCF. In *Logic in Computer Science*. IEEE Computer Society, 1996.

[EH96] Abbas Edalat and Reinhold Heckmann. A computational model for metric spaces. *Theoretical Computer Science*, 1996. (en cours de publication).

[EP97] Abbas Edalat and P.J. Potts. A new representation for exact real numbers. In *Proceedings of MFPS*, volume 6. Elsevier Science, 1997.

[GHK+80] G. Gierz, K. H. Hofmann, K. Keimel, J. D. Lawson, M. Mislove, and D. S. Scott. *A Compendium of Continuous Lattices*. American Mathematical Society, first edition, 1980.

[Huc81] J. E. Hucthinson. Fractals and self-similarity. *Indiana University Mathematics Journal*, 30:713–747, 1981.

[JP89] C. Jones and G. Plotkin. A probabilistc powerdomain of evaluations. *Logic in Computer Science*, pages 186–195, 1989.

[Kel55] J.L. Kelley. *General Topology*. Van Nostrand, Princeton, 1955. Reprinted 1975 by Springer-Verlag as Graduate Texts in Mathematics, volume 27.

[Kir93] O. Kirch. Bereiche und Bewertungen. Master's thesis, Technische Hochschule Darmstadt, 1993.

[Rud66] W. Rudin. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill, 1966.

[Sco70] D. S. Scott. Outline of a mathematical theory of computation. In *4th Annual Princeton Conference on Information Sciences and Systems*, pages 169–176, 1970.

[SD80] N. Saheb-Djahromi. Cpo's of measures for non-determinism. *Theoretical Computer Science*, 12(1):19–37, 1980.

[Smy92] M.B. Smyth. Topology. In Abramsky, Gabbay, and Maibaum, editors, *Handbook of Logic in Computer Science*, volume 1, chapter 5. Oxford University Press, 1992.

[Str93] D. W. Stroock. *Probability theory, An analytic view*. Cambridge University Press, 1993.

[WS81] K. Weirauch and U. Schreiber. Embedding metric spaces into cpo's. *Theoretical Computer Science*, 16:5–24, 1981.