

# Calcul et Rationalité de Fonctions de Belyi en Genre 0

Jean-Marc COUVEIGNES

Laboratoire d'Informatique, URA 1327 du CNRS  
Département de Mathématiques et d'Informatique  
Ecole Normale Supérieure

LIENS - 93 - 5

Mars 1993

# Calcul et rationalité de fonctions de Belyi en genre 0

Jean-Marc Couveignes\*

Centre de recherche en mathématiques de Bordeaux, Université de Bordeaux  
Groupe de recherche en complexité et cryptographie, D.M.I., E.N.S.

21 Janvier 1993

## Résumé

Les pages qui suivent comportent une méthode de calcul de fonctions “optimales” de Belyi associées à des dessins plans sans automorphismes. Cette étude conduit à s’interroger sur la possibilité de définir une fonction de Belyi sur le corps de définition du dessin. Pour les arbres par exemple, je montre que c’est toujours le cas. La preuve est effective et donne une méthode pour spécifier une telle fonction. Je donne ensuite un exemple de dessin qui n’admet pas de fonction de Belyi sur son corps de définition. Je termine par des considérations plus générales sur le calcul de fonctions de Belyi pour des dessins avec ou sans automorphismes et de genre 0. Je montre en particulier comment calculer une fonction de Belyi définie sur le corps de définition du dessin, chaque fois que c’est possible, ou sur une extension minimale dans le cas contraire.

## 1 Introduction

A l’heure de l’affût, soit lorsque la lumière  
Précipite ses traits dans l’humide séjour,  
Soit lorsque le soleil rentre dans sa carrière,  
Et que, n’étant plus nuit, il n’est pas encor jour,  
Au bord de quelque bois sur un arbre je grimpe,  
Et, nouveau Jupiter, du haut de cet Olympe,  
    Je foudroie, à discrétion,  
    Un lapin qui n’y pensait guère.  
Je vois fuir aussitôt toute la nation  
    Des lapins, qui, sur la bruyère,  
    L’œil éveillé, l’oreille au guet,  
S’égayaient, et de thym parfumaient leur banquet.  
    Le bruit du coup fait que la bande  
    S’en va chercher sa sûreté  
    Dans la souterraine cité:  
Mais le danger s’oublie, et cette peur si grande  
S’évanouit bientôt; je revois les lapins,  
Plus gais qu’auparavant, revenir sous mes mains.  
Ne reconnaît-on pas en cela les humains?

La Fontaine, *Les Lapins*.

Ce qui suit comporte neuf sections. Immédiatement après celle-ci, la deuxième est un rappel et une mise en forme assez générale des équations conduisant au calcul

---

\*Membre de l’Option Recherche du Corps des ingénieurs de l’Armement.

d'une fonction de Belyi dans le cas des arbres. On notera cependant que des formules analogues existent pour un dessin quelconque. Dans la troisième section, une méthode de calcul est proposée. L'existence de fonctions de Belyi agréables pour les arbres est démontrée dans la quatrième section. Dans cette même section, on voit comment calculer le corps de définition d'un dessin quelconque. La cinquième section présente un dessin défini sur  $\mathbf{Q}$  sans fonction de Belyi rationnelle sur la sphère. Cet exemple est renforcé dans la sixième section pour conduire à un dessin sans modèle rationnel sur la sphère ni sur aucune courbe lisse projective de genre 0. Dans la septième section je montre comment calculer une fonctions de Belyi pour un dessin de genre zéro sans automorphismes, définie sur son corps de définition.

Je décris d'abord la situation où un dessin de genre zéro sans automorphismes admet une fonction de Belyi sur la sphère de Riemann et à coefficients dans une extension quadratique de son corps de définition. Je caractérise les corps sur lesquels une telle fonction peut alors être définie et les courbes planes lisses de genre 0 sur lesquelles une fonction de Belyi rationnelle correspondant à ce dessin peut être définie (par rationnelle, ici, il faut entendre définie sur le corps de définition du dessin).

Ensuite, je montre comment on peut toujours trouver une fonction de Belyi sur la sphère de Riemann, définie sur une extension au plus quadratique, retrouvant de façon effective un résultat de Leila Schneps.

Dans la huitième section, j'examine le cas des dessins dont le groupe d'automorphismes est non trivial. Pour finir, la neuvième section décrit les calculs effectués sous Maple V et leurs résultats.

Une description du cadre théorique de ces calculs se trouve dans l'article de Leila Schneps donné en référence. Je la remercie ainsi que Henri Cohen, Hendrik W. Lenstra, Jacques Martinet, Michel Matignon et Joseph Oesterlé pour leurs explications, et leurs conseils. La réduction des réseaux, si utile au calcul de certaines fonctions de Belyi a été menée grâce aux conseils et aux programmes de mon collègue du G.R.E.C.C., Antoine Joux que je remercie chaleureusement. Je remercie de même tous les membres de l'équipe de théorie des nombres de Bordeaux, Henri Cohen et Francine Delmer en particulier, qui ont pris goût eux aussi à ces "calculs de lapins" et dont les nombreux exemples m'ont beaucoup aidé.

## 2 Fonctions de Belyi des arbres.

Une fonction de Belyi est une application rationnelle  $\Pi$  d'une courbe projective non singulière  $\mathcal{C}$ , à valeurs dans  $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$  et ramifiée seulement au dessus de 0, 1 et  $\infty$ . On demande que  $\Pi$  et  $\mathcal{C}$  soient définies sur  $\bar{\mathbf{Q}}$ . Un dessin d'enfant est un couple  $(\mathcal{C}, \Pi)$  défini à  $\bar{\mathbf{Q}}$ -isomorphismes près.

Lorsque  $\mathcal{C} = \mathbf{P}_1(\mathbf{C})$ , l'application  $\Pi$  est donc définie à une homographie près (et en général à un automorphisme de  $\mathcal{C}$  près).

Si on demande, de plus, que l'indice de ramification en chacun des points au dessus de 1 soit exactement 2, la fonction de Belyi et le dessin sont dits propres (*clean* en anglais). Alors, on peut considérer l'image réciproque du segment réel  $[0, 1]$  dans  $\mathbf{P}(\mathbf{C})$ . On obtient un graphe connexe dont les sommets correspondent aux zéros de  $\Pi$  avec pour multiplicités le nombre de segments arrivant au sommet. Sur chaque segment reliant deux sommets, la fonction  $\Pi$  prend une et une seule fois la valeur 1. Le graphe délimite

des faces (cellules) au milieu desquelles se trouve un pôle dont la multiplicité est le nombre de segments qui bordent la face.

Dans le cas des arbres, on placera toujours l'unique face à l'infini, de façon à obtenir un polynôme.

Comme on l'a vu, j'adopte la convention suivante : les faces sont des pôles, les sommets des zéros et les cotés des uns. Noter que ce n'est pas la convention choisie dans [ShVo].

On appelle  $\alpha_i$  ces sommets et  $\nu_i$  leurs multiplicités pour  $1 \leq i \leq N$  où  $N$  est le nombre de sommets et  $d = \sum \nu_i$  le degré de la fonction de Belyi.

On obtient alors une identité du type

$$\prod_{i \in I} (X - \alpha_i)^{\nu_i} + \lambda = Q^2(X) \quad (1)$$

où  $I$  est l'ensemble des indices correspondant aux sommets.

On notera que le polynôme

$$\Pi = \prod_{i \in I} (X - \alpha_i)^{\nu_i}$$

se factorise en

$$\Pi^+ = Q - \sqrt{\lambda} = \prod_{i \in I^+} (X - \alpha_i)^{\nu_i} \quad \text{et} \quad \Pi^- = Q + \sqrt{\lambda} = \prod_{i \in I^-} (X - \alpha_i)^{\nu_i}$$

où l'on définit  $I^+$  comme l'ensemble des indices correspondant aux sommets  $\alpha_i$  tels que  $Q(\alpha_i) = \sqrt{\lambda}$  (et que, par exemple, on colorie en rouge) et  $I^-$  l'ensemble des indices correspondant aux sommets  $\alpha_i$  tels que  $Q(\alpha_i) = -\sqrt{\lambda}$  (et que, par exemple, on colorie en bleu).

Alors

$$\Pi = \Pi^+ \Pi^- = (Q - \sqrt{\lambda})(Q + \sqrt{\lambda})$$

Si on dérive l'identité (1) on obtient,

$$\Pi(\Sigma^+ + \Sigma^-) = 2QQ' \quad (2)$$

avec

$$\Sigma^+ = \sum_{i \in I^+} \frac{\nu_i}{X - \alpha_i} \quad , \quad \Sigma^- = \sum_{i \in I^-} \frac{\nu_i}{X - \alpha_i}$$

Comme  $Q$  est premier avec  $\Pi$ , on en déduit que

$$dQ = (\Sigma^+ + \Sigma^-)\Theta$$

où  $\Theta = \prod_{i \in I} (X - \alpha_i)$ , et si l'on pose  $\sigma^+ = \Sigma^+\Theta$  et  $\sigma^- = \Sigma^-\Theta$ , alors

$$dQ = (\sigma^+ + \sigma^-) \quad (3)$$

On veut prouver maintenant l'identité

$$d\sqrt{\lambda} = (\sigma^+ - \sigma^-) \quad (4)$$

Pour cela il suffit d'observer que le membre de droite est un polynôme de degré inférieur à  $N - 1$  et qu'il prend la valeur  $d\sqrt{\lambda}$  pour les  $N$  nombres  $\alpha_i$ . Par exemple si  $\alpha_i$  est un sommet rouge alors  $\sigma^-(\alpha_i) = 0$  et donc  $(\sigma^+ - \sigma^-)(\alpha_i) = (\sigma^+ + \sigma^-)(\alpha_i) = dQ(\alpha_i) = d\sqrt{\lambda}$ .

Maintenant la somme et la différence de (3) et (4) donnent

$$2\sigma^+ = d\Pi^- \text{ et } 2\sigma^- = d\Pi^+ \quad (5)$$

Ces équations ont l'avantage d'un degré plus faible et elles découplent en partie les rouges et les bleus. Ce sont elles que l'on peut utiliser avec Maple. En particulier il est toujours possible d'éliminer quelques inconnues qui apparaissent linéairement, et deux équations sont entièrement linéaires.

On peut résoudre le système (5) (ou même le système (1) en général) avec un algorithme de réduction de bases de Grobner. Pour un dessin un tant soit peu complexe, ces techniques ne sont plus raisonnables.

Nous proposons de diviser plutôt l'équation (4) par  $\Theta$ . En posant  $U = 1/X$  on trouve

$$\frac{d\sqrt{\lambda}U^{N-1}}{\prod_{i \in I} (1 - U\alpha_i)} = \sum_{i \in I^+} \frac{\nu_i}{1 - U\alpha_i} - \sum_{i \in I^-} \frac{\nu_i}{1 - U\alpha_i} \quad (6)$$

et les  $N - 1$  premiers termes du développement donnent les équations

$$\sum_{i \in I} \bar{\nu}_i \alpha_i^k = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leq k \leq N - 2 \quad (7)$$

où  $\bar{\nu}_i = \nu_i$  pour les rouges et  $\bar{\nu}_i = -\nu_i$  pour les bleus.

La première de ces  $N - 1$  équations est triviale:

$$\sum_{i \in I} \bar{\nu}_i = 0$$

Il reste  $N - 2$  équations non triviales. L'ensemble des solutions  $\Upsilon = (\alpha_i)_{1 \leq i \leq N}$  de ce système est invariant par les transformations affines

$$\Upsilon \mapsto A\Upsilon + B$$

### Remarques

- Les équations (7) se généralisent au cas d'un dessin de genre 0 quelconque dont toutes les valences sont paires. On peut alors colorier aussi bien les faces que les sommets et affecter les multiplicités d'un signe. Si on appelle  $\alpha_i$  les sommets et  $\beta_j$  les faces, si  $2\nu_i$  est la multiplicité algébrique de  $\alpha_i$  et  $2\mu_j$  celle de  $\beta_j$ , alors à tout sommet  $\alpha_i$ , on associe une fonction  $\zeta_{0,i}$  définie par

$$\zeta_{0,i}(x) = \sum_j \mu_j \frac{\alpha_i - \beta_j}{x - \beta_j}$$

et à toute face  $\beta_j$ , on associe une fonction  $\zeta_{\infty,j}$  définie par

$$\zeta_{\infty,j}(x) = \sum_i \nu_i \frac{\beta_j - \alpha_i}{x - \alpha_i}$$

Alors la fonction  $\zeta_{0,i}$  admet un zéro d'ordre  $\nu_i - 1$  en  $\alpha_i$  et la fonction  $\zeta_{\infty,j}$  admet un zéro d'ordre  $\mu_j - 1$  en  $\beta_j$ .

En d'autres termes on a les deux séries d'équations suivantes:

pour tout  $i$ , et pour  $0 \leq k \leq \nu_i - 1$

$$\sum_j \frac{\mu_j}{(\beta_j - \alpha_i)^k} = 0$$

et pour tout  $j$ , et pour  $0 \leq k \leq \mu_j - 1$

$$\sum_i \frac{\nu_i}{(\alpha_i - \beta_j)^k} = 0$$

La condition de parité sur les multiplicités n'est pas restrictive. En effet, si  $\varphi$  est une fonction de Belyi associée à un dessin quelconque, alors la fonction  $\psi$  définie par

$$\psi = -1/4 \left( \frac{\varphi(\varphi - 1)}{\varphi - 2} \right)^2$$

est une fonction de Belyi associée à un dessin dont toutes les multiplicités sont paires au dessus de 0 et  $\infty$  et exactement égales à deux au dessus de 1.

- Dans le cas le plus simple où l'arbre est une chaîne de longueur  $N$ , alors  $\Pi$  est le polynôme de Tchebitchev normalisé de degré  $2N$  et (7) donne de classiques mais toujours amusantes relations sur les cosinus correspondants.
- Les équations (7) forment un système de Vandermonde à l'envers puisque ce sont les  $\alpha_i$  que l'on cherche ici, les  $\nu_i$  étant connus.

On appelle  $\Gamma$  la fonction de  $\mathbf{C}^N$  dans  $\mathbf{C}^{N-2}$  définie par les membres de gauche de (7).

$$\Gamma(\alpha_1, \dots, \alpha_N) = \left( \sum_{i \in I} \bar{\nu}_i \alpha_i^k \right)_{1 \leq k \leq N-2}$$

On note que  $\Gamma$  et sa différentielle  $\Gamma'$  sont très faciles à calculer. Le rang de  $\Gamma'$  est le minimum de  $N - 2$  et du nombre de  $\alpha_i$  distincts.

Ces observations conduisent à la méthode numérique suivante.

### 3 Méthode de Newton.

Remarquons que les vecteurs de  $\mathbf{C}^N$  définis à affinités près sont en fait des points de  $\mathbf{P}_{N-2}$ .

A toute suite  $(\Upsilon_i)_i$  de vecteurs de  $\mathbf{C}^N$  définis à affinité près on associe une suite de  $\mathbf{P}_{N-2}$ . Si cette seconde suite est convergente on dira abusivement que  $(\Upsilon_i)_i$  converge. Dans ce contexte la méthode de Newton est définie par la formule de récurrence

$$\Upsilon_{i+1} = \Upsilon_i - \Gamma'_{\Upsilon_i}{}^{-1} \Gamma(\Upsilon_i) \quad (8)$$

On note que  $\Gamma'_{\Upsilon_i}$  n'est pas inversible. Ainsi  $\Gamma'_{\Upsilon_i}{}^{-1} \Gamma(\Upsilon_i)$  est défini à un élément du noyau près. On choisit pour  $\Gamma'_{\Upsilon_i}{}^{-1} \Gamma(\Upsilon_i)$  le vecteur orthogonal au noyau, autrement dit on se déplace selon la ligne de plus grande pente.

Ici la forme quadratique à utiliser peut être définie à partir de

- la dérivée seconde de  $\Gamma$  en  $\Upsilon_i$ .
- une métrique à définir sur  $\mathbf{P}_{N-2}$ .

Pour le calcul numérique il faut choisir un représentant convenable de  $\Upsilon_i$  dans  $\mathbf{C}^N$ , pour éviter une divergence artificielle due à un glissement le long des lignes de niveau de  $\Gamma$ .

Il reste maintenant à décrire une heuristique pour le calcul d'une approximation  $\Upsilon_0$  propre à faire converger la méthode.

Pour cela on remarque d'une part que dans les dessins calculés explicitement jusqu'à présent, les segments sont presque rectilignes et les angles autour des sommets sont égaux. Il ne manque plus à cette description schématique qu'une évaluation de la longueur des segments.

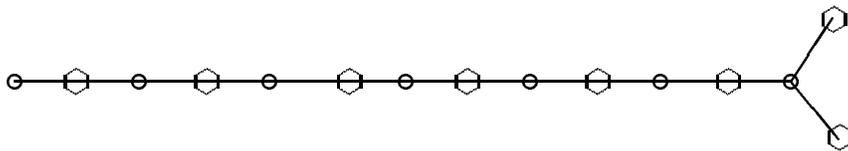
Or le système (7) varie peu lorsqu'on "éclate" un point, c'est-à-dire lorsque on remplace un point de multiplicité  $\bar{\nu}$  par deux points contigus et donc de couleurs opposées et de multiplicités  $\bar{\nu}_1$  et  $\bar{\nu}_2$  telles que  $\bar{\nu}_1 + \bar{\nu}_2 = \bar{\nu}$ . Cela revient à greffer un nouveau segment sur le dessin qui pousse alors d'étape en étape comme un arbre. Si l'on appelle  $\Upsilon^t$  la solution du premier arbre à  $N$  sommets, on peut par exemple obtenir un vecteur  $\Upsilon_0^g$  de dimension  $N + 1$  en dupliquant la valeur correspondant au sommet éclaté. Ce vecteur peut être pris comme valeur de départ dans la méthode itérative pour le calcul de l'arbre greffé à  $N + 1$  sommets. En effet, sur les  $N - 1$  équations (7) correspondantes, les  $N - 2$  premières sont déjà satisfaites parce que ce sont les équations (7) de l'arbre précédent.

On peut aussi utiliser les longueurs de l'arbre précédent comme des approximations à celles de l'arbre greffé.

Une fois obtenue une bonne approximation de la limite  $\Upsilon_\infty$  on a donc un élément de  $\mathbf{P}_{N-2}$  que l'on cherche à relever dans  $\mathbf{C}^N$  en un point défini sur un corps raisonnable. Pour cela il convient de définir des conditions de rationalité à priori. Si les approximations calculées sont assez fines, on pourra retrouver les diverses dépendances algébriques à l'aide de l'algorithme LLL de Lenstra, Lenstra et Lovász. On obtiendra alors une solution formelle au problème (1).

#### Exemple

L'arbre en T à 15 points a 21 conjugués possibles.



Le calcul montre qu'il est en effet de degré 21. Son corps est défini par le polynôme

$$\begin{aligned}
& x^{21} + 2793 x^{20} + 3689651 x^{19} + 2965437755 x^{18} + 1619758438200 x^{17} \\
& + 637272354502000 x^{16} + 186822742882440000 x^{15} \\
& + 41681786044975200000 x^{14} + 7173505016349840000000 x^{13} \\
& + 960109537572314640000000 x^{12} + 100326053969019244800000000 x^{11} \\
& + 8186418890868835008000000000 x^{10} \\
& + 519868623549147989760000000000 x^9 \\
& + 2551082198135317943040000000000 x^8 \\
& + 95642427290659919078400000000000 x^7 \\
& + 2694188491690673287296000000000000 x^6 \\
& + 55674842132517335884800000000000000 x^5 \\
& + 8151810519010134928896000000000000000 x^4 \\
& + 80255225359729269319680000000000000000 x^3 \\
& + 48809414820672582451200000000000000000 x^2 \\
& + 1565572545610697723904000000000000000000 x \\
& + 1763214948341555834880000000000000000000
\end{aligned}$$

Le discriminant du corps, calculé avec Pari par Henri Cohen est

$$-2^{588} 3^{382} 5^{386} 7^{61} 11^{20}$$

Pour la méthode de Newton, les calculs numériques ont été menés sous Pari. Pour la recherche de dépendances algébriques avec LLL, j'ai eu recours aux conseils et aux programmes d'Antoine Joux.

## 4 Problèmes de rationalité

On rappelle que la fonction de Belyi d'un dessin est définie à composition à droite par une homographie près. On appelle corps de définition  $\mathbf{K}$  d'un dessin, le corps fixé par le groupe  $\mathbf{G}$  de définition du dessin. Étant donnée une fonction de Belyi  $\Pi$ , définie sur  $\bar{\mathbf{Q}}$ , le groupe de définition du dessin est le groupe des  $\sigma \in \text{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$  tels que  $\Pi^\sigma = \Pi \circ H_\sigma$  où  $H_\sigma$  est une homographie. Pour une définition plus intrinsèque voir [Schn]. On cherche une fonction de Belyi définie sur une extension aussi petite que possible du corps  $\mathbf{K}$  (Par définition, le corps de définition d'une fonction de Belyi est le corps engendré par les fonctions symétriques des racines de son numérateur et de son dénominateur.) Pour cela on veut ajouter deux conditions appropriées au système (1). Les coefficients de la fonction de Belyi sont les fonctions symétriques des  $\alpha_i$ . Mais on peut aussi considérer les polynômes  $\Theta_k$  pour  $k \in \mathbf{Z}$  où

$$\Theta_k = \prod_{i \in I \text{ et } \bar{v}_i=k} (X - \alpha_i) \quad \text{et} \quad \Pi^+ = \prod_{k>0} \Theta_k^k \quad \text{et} \quad \Pi^- = \prod_{k<0} \Theta_k^{-k} \quad (9)$$

Donc  $\Theta_k$  a pour racines les sommets d'une couleur et multiplicité données. Les polynômes  $\hat{\Theta}_k = \Theta_k \Theta_{-k}$  sont définis sur le même corps que  $\Pi$ . Leurs coefficients constituent une famille de fonctions symétriques que l'on prend comme nouvelles inconnues du problème.

On va voir que dans le cas des arbres, il existe toujours une fonction de Belyi définie sur  $\mathbf{K}$  et qu'elle peut être caractérisée par les deux conditions

$$\sigma_z = 0 \quad \text{et} \quad \Sigma_u = 1 \quad (10)$$

où  $\sigma_z$  et  $\Sigma_u$  sont, à peu de choses près, deux fonctions symétriques bien choisies.

La première spécification est que l'unique pôle soit à l'infini. On a alors un polynôme. Deux fonctions de Belyi satisfaisant à cette condition se correspondent, on l'a vu, par une application affine (homographie fixant l'infini).

On choisit ensuite, parmi les coefficients des  $\hat{\Theta}_k$ , une fonction symétrique  $\sigma_z$  de degré un, c'est-à-dire une somme et on demande qu'elle soit nulle.

Deux fonctions de Belyi satisfaisant aussi à cette deuxième condition se correspondent par une application linéaire (homographie fixant l'infini et zéro):

$$z \mapsto Az$$

Considérons  $\Pi$  l'une d'entre elles et appelons  $e$  le pgcd de l'ensemble des entiers  $l$  positifs tels qu'il existe une fonction symétrique non nulle de degré  $l$  parmi les fonctions symétriques de  $\Pi$ .

Il existe donc une combinaison multiplicative

$$\Sigma_u = \prod \sigma^{\lambda(\sigma)}$$

des fonctions symétriques de  $\Pi$ , qui soit de degré  $e$  (Identité de Bezout).

On pose comme troisième condition que  $\Sigma_u = 1$ . Comme  $\Sigma_u$  est une fonction homogène de degré  $e$  de  $A$ , il existe une et une seule fonction de Belyi satisfaisant aux trois conditions. En effet, pour qu'une application linéaire  $z \mapsto Az$  laisse  $\Sigma_u$  invariant on doit avoir  $A^e = 1$ , mais justement tous les coefficients non nuls de  $\Pi$  sont de degré un multiple de  $e$  et donc notre fonction de Belyi est elle aussi invariante si on la compose par l'application linéaire  $z \mapsto Az$ .

La fonction  $\Pi_0$  ainsi construite est définie sur  $\mathbf{K}$ , cela découle de son unicité.

Notons en particulier qu'il est possible de construire  $\Pi_0$  à partir de n'importe quelle fonction de Belyi  $\Pi_w$  de la façon suivante:

- Si la fonction a un dénominateur, alors ce dénominateur n'a qu'une racine correspondant à l'unique pôle  $p$ . On s'en débarrasse en composant par une homographie

$$H_1(X) = \frac{pX}{X+1}$$

Noter que cette racine est dans le corps de définition  $\mathbf{K}_w$  de  $\Pi_w$  puisqu'elle est l'unique racine du dénominateur. Ainsi  $H_1$  est définie sur  $\mathbf{K}_w$ .

- Maintenant on veut annuler la fonction symétrique  $\sigma_z$  choisie plus haut.  $\sigma_z$  est une somme de  $a$  termes.

$$\sigma_z = \sum_{1 \leq i \leq a} \alpha_i$$

On peut l'annuler en composant par la translation

$$H_2(X) = X - \frac{\sigma_z}{a}$$

Noter encore que  $H_2$  est définie sur  $\mathbf{K}_w$ .

- Pour finir on doit ramener à un la combinaison de fonctions symétriques  $\Sigma_u$ . Le degré de  $\Sigma_u$  est  $e$ . Soit  $\Sigma_0$  la valeur initiale de  $\Sigma_u$  et  $\Sigma_0^{1/e}$  une de ses racines  $e$ -ième. On compose alors par

$$H_3(X) = \frac{X}{\Sigma_0^{1/e}}$$

Ici  $H_3$  n'est pas définie sur  $\mathbf{K}_w$  mais comme toutes les fonctions symétriques de  $\Pi_w \circ H_1 \circ H_2$  sont de degré un multiple de  $e$ , la fonction  $\Pi_w \circ H_1 \circ H_2 \circ H_3$  est définie sur  $\mathbf{K}_w$ . Mais  $\Pi_w \circ H_1 \circ H_2 \circ H_3$  n'est autre que  $\Pi_0$  elle même.

Le procédé de construction de  $\Pi_0$  à partir d'une fonction de Belyi quelconque ne nécessite donc aucune extension, si bien que la fonction  $\Pi_0$  est définie sur l'intersection de tous les corps de définition de toutes les fonctions de Belyi. Si  $\mathbf{K}_0$  est le corps de définition de  $\Pi_0$ , et  $\sigma \in \text{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$  laisse stable le dessin, alors  $\mathbf{K}_0^\sigma$  est le corps de définition de  $\Pi_0^\sigma$  qui est une fonction de Belyi du même dessin et donc en vertu de ce qu'on vient de voir  $\mathbf{K}_0 \subset \mathbf{K}_0^\sigma$  ce qui prouve bien que  $\mathbf{K}_0$  est le corps de définition du dessin.

Maintenant on peut remarquer que  $e$  est le plus grand entier positif tel que  $\Pi(X) = \tilde{\Pi}(X^e)$  où  $\tilde{\Pi}$  est un polynôme. C'est aussi l'ordre de la symétrie de centre 0 qui laisse stable le dessin.

En pratique on devra donc choisir un  $\sigma_z$  quelconque puis calculer le  $e$  correspondant. Ensuite on choisit un  $\Sigma_u$  et on ajoute les deux conditions (10) au système. Il est à noter que la démonstration ci-dessus prouve l'existence d'un  $\Sigma_u$  non nul mais non que toutes les combinaisons de degré  $e$  soient non nulles. Il se pourrait que par malchance on ait choisi une combinaison nulle. Le système ainsi complété ne conduira pas au résultat attendu. Il faut alors essayer une autre combinaison pour  $\Sigma_u$ . Dans le cas du calcul formel, les deux conditions ajoutées peuvent simplifier grandement les calculs car elles permettent d'éliminer deux inconnues, et elles abaissent le degré du résultat autant qu'il est possible. Noter aussi que les équations (1) définissent de très nombreux dessins dont tous ne sont pas conjugués. En d'autres termes, il se peut que l'idéal correspondant au système se factorise. Dans ce cas, il vaut mieux s'en apercevoir le plus vite possible. On peut essayer de factoriser des combinaisons naïves des équations de départ.

Si on utilise une méthode numérique, il vaut mieux appliquer une homographie au résultat obtenu par la méthode itérative pour s'assurer des conditions (10) avant de lancer LLL sur des nombres transcendants...

## Remarques

- L’existence d’une fonction de Belyi sur le corps  $\mathbf{K}$  est assurée dès qu’il existe un célibataire dans le dessin, c’est-à-dire un sommet ou un pôle qui soit unique par sa valence. Pour construire la fonction  $\Pi_0$ , il suffit alors d’envoyer ce célibataire à l’infini et de finir comme ci-dessus.
- La question qui se pose alors est de savoir s’il existe toujours une fonction de Belyi sur le corps  $\mathbf{K}$ . La réponse est non comme on le verra ci-dessous. On trouvera cependant de quoi se consoler dans la suite : l’extension nécessaire est au plus quadratique.

Plus généralement, *pour tout dessin plan*, à chaque polynôme  $\hat{\Theta}_k$  de degré  $d_k$  on associe la famille de ses  $d_k$  racines. On peut alors construire non pas une fonction de Belyi mais un ensemble *unique* de  $d_k$  fonctions de Belyi en envoyant chacune des racines à l’infini et en finissant de normaliser par deux conditions de type (10). Puisque cet ensemble est unique, il est défini sur  $\mathbf{K}$ , c’est-à-dire qu’il est invariant par action du groupe de définition du dessin  $\mathbf{G}$ . Autrement dit  $\mathbf{G}$  permute les fonctions de la famille, qui se décompose alors en orbites.

A chaque orbite on peut associer une extension galoisienne de  $\mathbf{K}$ . Le degré du corps de définition d’une fonction de Belyi est le cardinal de son orbite. Il est donc inférieur ou égal à  $d_k$ . Ceci prouve que le minimum des  $d_k$  majore le degré de l’extension nécessaire à la définition d’une fonction de Belyi.

Ainsi on a associé une fonction de Belyi à chaque sommet  $\alpha_i$  et on constate que le groupe de Galois opère sur l’ensemble de ces fonctions. De la même manière on peut associer une fonction de Belyi à chaque face  $\beta_i$ , en envoyant les  $\beta_i$  tour à tour à l’infini, et obtenir ainsi une autre famille sur laquelle opère le groupe de Galois. Enfin, on associe aussi une fonction de Belyi à chaque coté.

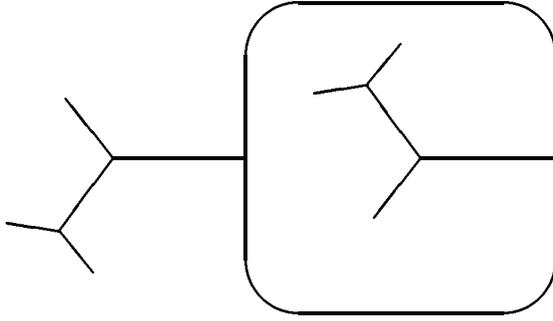
Dans le cas où il existe une fonction de Belyi  $\Pi_0$  sur  $\mathbf{K}$ , les familles correspondent aux facteurs irréductibles de  $\Pi_0$  et de  $\Pi_0 - 1$ .

Dans tous les cas on obtient des orbites  $\mathcal{O}_i$  de  $\delta_i$  fonctions de Belyi conjuguées définies sur une extension de degré  $\delta_i$ . On a donc, pour chaque coefficient de la fonction de Belyi, l’ensemble de ses conjugués. On peut alors former le polynôme caractéristique de ce coefficient. Il est de degré  $\delta_i$  et à coefficients dans le corps de définition du dessin. L’ensemble des fonctions symétriques ainsi calculées engendre le corps de définition du dessin.

C’est ainsi que l’on peut calculer le corps de définition du dessin même si la fonction de Belyi trouvée n’est pas définie sur ce corps.

## 5 Contre-exemple

Nous donnons maintenant un exemple de dessin sans fonction de Belyi définie sur son corps de définition. Le dessin proposé ne doit comporter aucun célibataire, on choisit donc un dessin à deux faces. Pour simplifier, les deux faces n’ont que deux cotés en commun. On trace donc un cercle et deux points sur ce cercle. A partir de chacun de ces deux points on dessine deux arbres “conjugués” c’est-à-dire ayant la même liste de valences. Et voilà une famille de candidats contre-exemples. Après quelques essais infructueux j’ai mené à leur terme les calculs correspondant au dessin suivant.



On remarque que ce dessin admet une bicoloration. Il comporte 6 sommets de valence 3, 6 sommets de valence 1 et deux faces de valence 12.

Pour les calculs, les deux pôles sont envoyés en zéro et l'infini. On exige en outre que la somme de tous les sommets de multiplicité 3 soit égale à 1.

On appelle  $\hat{\Theta}_1$  et  $\hat{\Theta}_3$  les polynômes de degré 6 définis par  $\hat{\Theta}_1 = \Theta_1\Theta_{-1}$  et  $\hat{\Theta}_3 = \Theta_3\Theta_{-3}$  avec les notations de (9). L'équation (1) est alors

$$\hat{\Theta}_1\hat{\Theta}_3^3 + \lambda X^{12} = Q^2(X) \quad (11)$$

Les calculs sont menés formellement comme décrits à la fin de cette section. On obtient comme attendu, deux fonctions de Belyi définies sur  $\mathbf{Q}(i)$  et conjuguées,  $\Pi = \hat{\Theta}_1\hat{\Theta}_3^3/X^{12}/\lambda$  et  $\bar{\Pi}$ . Et si l'on note en surlignant la conjugaison dans  $\mathbf{Q}(i)$ , alors

$$\bar{\Pi} = \Pi \circ H \text{ où } H(X) = \frac{A}{X} \text{ et } A = \frac{-1}{4100}$$

On sait qu'une homographie peut être définie (à multiplication par une constante près) par une matrice  $2 \times 2$ . On choisit ici de poser

$$H = \begin{bmatrix} 0 & A \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Notons aussi que le groupe des automorphismes de  $\Pi$ , i.e. l'ensemble des homographies  $H$  telles que

$$\Pi \circ H = \Pi$$

est trivial. En effet une telle homographie devrait soit fixer les pôles soit les inverser. Si elle les fixe alors c'est une application linéaire et donc triviale à cause de la normalisation adoptée. Si elle permute les pôles elle est de la forme  $X \mapsto C/X$  et c'est une inversion de centre 0. Mais une telle inversion ne respecte pas le dessin. Graphiquement on voit que les petites fourchettes ont bougé. Celle qui s'élevait est abaissée et celle qui s'abaissait est relevée (selon les paroles de l'Évangile...)



C'est à cause de cette propriété que ce dessin à été choisi.

Supposons maintenant qu'il existe une fonction de Belyi  $\Pi_{\mathbf{Q}}$  définie sur le corps  $\mathbf{Q}$ . Soit  $H_{\mathbf{Q}}$  l'homographie telle que

$$\Pi_{\mathbf{Q}} = \Pi \circ H_{\mathbf{Q}} \quad (12)$$

On va montrer que  $H_{\mathbf{Q}}$  peut être représentée par une matrice définie sur  $\mathbf{Q}(i)$ .

On représente d'abord  $H_{\mathbf{Q}}$  par une matrice quelconque de  $\bar{\mathbf{Q}}$ . Ainsi on peut faire agir  $\text{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$  sur  $H_{\mathbf{Q}}$  par action sur les coefficients.

Soit donc  $\sigma \in \text{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}(i))$ . L'action de  $\sigma$  sur (12) donne

$$\Pi_{\mathbf{Q}} = \Pi \circ H_{\mathbf{Q}}^{\sigma}$$

puisque  $\Pi_{\mathbf{Q}}$  et  $\Pi$  sont définies sur  $\mathbf{Q}(i)$ . On en déduit que

$$\Pi = \Pi \circ H_{\mathbf{Q}}^{\sigma} \circ H_{\mathbf{Q}}^{-1}$$

et donc  $H_{\mathbf{Q}}^{\sigma} \circ H_{\mathbf{Q}}^{-1}$  est l'identité en tant qu'homographie. En tant que matrice, c'est une constante.

$$H_{\mathbf{Q}}^{\sigma} = H_{\mathbf{Q}} \delta(\sigma)$$

On voit, en faisant à nouveau agir  $\text{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}(i))$  sur cette dernière équation que  $\delta$  satisfait à la condition de cocycle.

$$\delta(\tau\sigma) = \delta(\tau)\delta^{\tau}(\sigma)$$

Le théorème 90 de Hilbert assure alors que l'on peut définir  $H_{\mathbf{Q}}$  sur  $\mathbf{Q}(i)$  en divisant par une constante  $\Delta$  appropriée (celle telle que  $\delta(\sigma) = \Delta^{-1}\Delta^{\sigma}$ ).

Il reste maintenant à faire agir sur (12) la conjugaison ordinaire de  $\mathbf{Q}(i)/\mathbf{Q}$ .

$$\Pi_{\mathbf{Q}} = \bar{\Pi} \circ \bar{H}_{\mathbf{Q}} = \Pi \circ H \circ \bar{H}_{\mathbf{Q}}$$

Parce que le groupe d'automorphismes de  $\Pi$  est trivial, on en déduit l'existence d'une constante  $\beta \in \mathbf{Q}(i)$  telle que

$$H_{\mathbf{Q}} = \beta H \circ \bar{H}_{\mathbf{Q}}$$

En conjuguant cette égalité on obtient

$$\bar{H}_{\mathbf{Q}} = \bar{\beta} \bar{H} \circ H_{\mathbf{Q}}$$

puis

$$\bar{H}_{\mathbf{Q}} = \bar{\beta}\beta \bar{H} \circ H \circ \bar{H}_{\mathbf{Q}}$$

et donc

$$\beta\bar{\beta} = \frac{1}{A} = -4100$$

Or toutes les normes sont positives dans  $\mathbf{Q}(i)$ . Contradiction.

On a donc prouvé le

**Fait 1** *Le dessin défini par la fonction  $\Pi$  n'admet pas de fonction de Belyi rationnelle sur la sphère de Riemann.*

On peut même reprendre le raisonnement précédent avec un corps quelconque  $\mathbf{K}_0$ . Une fonction de Belyi pour le dessin considéré ici, peut être définie sur un tel corps si et seulement s'il existe deux éléments  $x$  et  $y$  dans  $\mathbf{K}_0$  tels que  $x^2 + y^2 = (x + iy)(x - iy) = \frac{1}{A}$ . Dans le cas où de tels  $x$  et  $y$  existent, on peut prendre pour matrice de passage

$$H_{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} a & b \\ \beta\bar{a} & \beta\bar{b} \end{bmatrix}$$

où  $\beta = x + iy$ ,  $a$  et  $b$  sont dans  $\mathbf{K}_0(i)$  et la barre dénote la conjugaison dans  $\mathbf{K}_0(i)/\mathbf{K}_0$ . Puisque 4100 est une norme dans  $\mathbf{Q}(i)$  on peut remplacer  $-4100$  par  $-1$  et obtenir ainsi le

**Fait 2** *Le dessin défini par la fonction  $\Pi$  admet une fonction de Belyi sur la sphère de Riemann, définie sur un corps  $\mathbf{K}_0$  si et seulement s'il existe deux éléments  $x$  et  $y$  dans  $\mathbf{K}_0$  tels que  $x^2 + y^2 = (x + iy)(x - iy) = -1$*

Cependant, on sait que toute conique rationnelle est isomorphe sur  $\bar{\mathbf{Q}}$  à la droite complexe. On peut donc chercher une fonction de Belyi rationnelle définie sur une conique rationnelle et satisfaisant aux conditions de ramifications du dessin proposé. Autrement dit on cherche à dessiner ce dessin sur une conique. En fait, un théorème de descente de Weil ([Weil]) sur lequel Joseph Oesterlé a attiré mon attention affirme que si le dessin est sans automorphismes, il admet un modèle rationnel. C'est précisément ce que nous allons voir.

Dans la suite de cette section, on utilisera des coordonnées projectives. Soit donc une conique  $\mathcal{C}$  de  $\mathbf{P}_2$  d'équation en  $[U, V, W]$

$$E(U, V, W) = aU^2 + 2bUV + cV^2 + dUW + eVW + fW^2 = 0$$

où  $a, b, c, d, e, f \in \mathbf{Q}$ .

Tout isomorphisme de  $\mathcal{C}$  sur  $\mathbf{P}_1$  peut se mettre sous la forme suivante où  $[X, Y]$  sont les coordonnées projectives sur  $\mathbf{P}_1$

$$[X, Y] = [N(U, V, W), D(U, V, W)] = [n_1U + n_2V + n_3W, d_1U + d_2V + d_3W]$$

où  $n_1, n_2, n_3, d_1, d_2, d_3 \in \bar{\mathbf{Q}}$ .

Supposons que  $N$  et  $D$  sont définis sur  $\mathbf{Q}(i)$  et que l'équation de  $\mathcal{C}$  est

$$E(U, V, W) = N\bar{N} - AD\bar{D} \tag{13}$$

où  $A = \frac{-1}{4100}$

On appelle  $\Pi(X, Y)$ , la version homogène de la fonction de Belyi  $\Pi$  déjà calculée. Alors,

$$\bar{\Pi}[X, Y] = \Pi[AY, X]$$

Si on compose  $\Pi$  et l'isomorphisme défini plus haut on obtient une fonction de Belyi  $\Pi_0$  sur la conique

$$\Pi_0(U, V, W) = \Pi[N(U, V, W), D(U, V, W)]$$

On voit alors que  $\Pi_0$  est rationnelle. En effet

$$\begin{aligned}\bar{\Pi}_0(U, V, W) &= \bar{\Pi}[\bar{N}(U, V, W), \bar{D}(U, V, W)] = \Pi[A\bar{D}, \bar{N}] = \Pi[AD\bar{D}, \bar{N}D] \\ &= \Pi[\bar{N}N, \bar{N}D] = \Pi[N, D]\end{aligned}$$

on a utilisé l'équation de la courbe pour substituer  $N\bar{N}$  à  $AD\bar{D}$ .

Il est donc possible d'obtenir des fonctions de Belyi rationnelles sur toutes les coniques de la forme donnée en (13).

### Remarque

Les seuls nombres premiers à diviser les dénominateurs de la fonction  $\Pi$  sont 2, 5, et 41.

## 6 Contre-exemple, suite...

Comme on vient de le voir, le dessin précédent admet une fonction de Belyi rationnelle sur une conique. On remarque que  $A$  intervient dans l'équation de cette conique. Or  $A$  est rationnel, ce qui est intimement lié à la trivialité du groupe d'automorphismes du dessin.

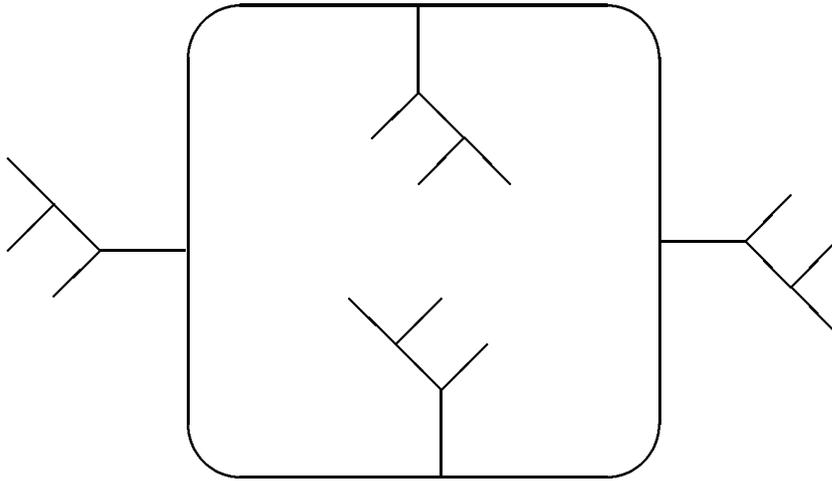
En effet, considérons la fonction de Belyi  $\Psi(X) = \Pi(X^2)$  obtenue en composant  $\Pi$  avec un revêtement à deux feuillets de la sphère, ramifié au dessus des deux faces 0 et l'infini

$$X \mapsto X^2$$

Le dessin correspondant admet un automorphisme non trivial

$$X \mapsto -X$$

Voici ce dessin



On remarque tout de suite que  $\Psi$  est définie sur  $\mathbf{Q}(i)$  et que

$$\bar{\Psi}(X) = \Psi\left(\frac{\sqrt{A}}{X}\right) = \Psi \circ K$$

où on a posé

$$K = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{A} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Donc le dessin est rationnel, son corps de définition est  $\mathbf{Q}$ . Cependant on notera que  $\sqrt{A}$  n'est pas rationnel, si bien que le procédé de descente présenté au paragraphe précédent ne fonctionne plus. On devine alors que ce dessin n'admet aucun modèle rationnel.

En voici une preuve.

Supposons qu'il existe une conique  $C$  rationnelle d'équation

$$E(U, V, W) = aU^2 + 2bUV + cV^2 + dUW + eVW + fW^2 = 0 \quad (14)$$

où  $a, b, c, d, e, f \in \mathbf{Q}$  et supposons aussi l'existence d'une fonction rationnelle

$$\Psi_0(U, V, W)$$

de  $C$  dans  $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$  définissant le même dessin que  $\Psi$ . Il existe alors un isomorphisme  $\xi$  de  $C$  dans  $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$  tel que

$$\Psi_0 = \Psi \circ \xi \quad (15)$$

où

$$\begin{aligned} \xi(U, V, W) &= [X, Y] = [N(U, V, W), D(U, V, W)] \\ &= [n_1U + n_2V + n_3W, d_1U + d_2V + d_3W] \end{aligned}$$

On veut s'assurer que  $\xi$  est défini sur  $\mathbf{Q}(i)$  comme  $\Psi$  et  $\Psi_0$ . En fait il ne l'est pas, mais peu s'en faut. En effet si l'on fait agir sur (14) un élément  $\sigma$  de  $\text{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}(i))$  alors

$$\Psi_0 = \Psi \circ \xi^\sigma$$

et donc

$$\xi^\sigma = \chi(\sigma)\xi \quad (16)$$

où  $\chi(\sigma) = \pm 1$  puisque ce sont les deux automorphismes du dessin.

Faisons agir  $\tau \in \text{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}(i))$  sur (16)

$$\xi^{\tau\sigma} = \chi(\sigma)\xi^\tau = \chi(\sigma)\chi(\tau)\xi = \chi(\tau\sigma)\xi$$

Donc  $\chi$  est un caractère de  $\text{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}(i))$  et son noyau est d'indice 1 ou 2. Dans le premier cas  $\xi$  est défini sur  $\mathbf{Q}(i)$ . Dans le second cas on peut écrire

$$\chi(\sigma) = \frac{\sqrt{n}^\sigma}{n}$$

où  $n \in \mathbf{Q}(i)$ . Si on note

$$L = \begin{bmatrix} \sqrt{n} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

alors  $\xi = L \circ \xi_i$  où  $\xi_i$  est définie sur  $\mathbf{Q}(i)$ . Ceci est aussi vrai dans le premier cas, quitte à poser  $n = 1$ .

On peut faire alors agir la conjugaison ordinaire de  $\mathbf{Q}(i)/\mathbf{Q}$  sur (15). Soit donc  $\tau \in \text{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$  tel que  $\tau(i) = -i$  et notons par une barre l'action de  $\tau$ .

$$\Psi_0 = \bar{\Psi} \circ \bar{\xi} = \bar{\Psi} \circ \bar{L} \circ \bar{\xi}_i = \Psi \circ K \circ \bar{L} \circ \bar{\xi}_i \quad (17)$$

et donc

$$\Psi_0 = \Psi \circ L \circ \xi_i = \Psi \circ K \circ \bar{L} \circ \bar{\xi}_i \quad (18)$$

On en déduit que

$$\bar{\xi}_i = \pm \bar{L}^{-1} K L \circ \xi_i \quad (19)$$

Ceci est une égalité entre fonctions dans le corps de fonction de la conique, c'est-à-dire modulo l'équation  $E(U, V, W)$ .

Donc si on pose

$$\xi_i(U, V, W) = [X, Y] = [N_i(U, V, W), D_i(U, V, W)]$$

alors

$$\sqrt{n\bar{n}}N_i\bar{N}_i - \sqrt{AD_i}\bar{D}_i \equiv 0 \pmod{E}$$

quitte à changer le signe de  $\sqrt{A}$ .

L'examen des degrés des deux membres conduit à l'égalité formelle

$$N_i\bar{N}_i - \sqrt{\frac{A}{n\bar{n}}}D_i\bar{D}_i = \beta E \quad (20)$$

où  $\beta$  est un nombre algébrique appartenant à  $\mathbf{Q}(\sqrt{\frac{A}{n\bar{n}}})$ .

Notons que  $\sqrt{\frac{A}{n\bar{n}}}$  n'est pas rationnel car  $n\bar{n}$  est positif et  $A$  négatif.

Conjuguons (20) par l'automorphisme non trivial  $\kappa$  de  $\mathbf{Q}(\sqrt{\frac{A}{n\bar{n}}})$ .

$$N_i\bar{N}_i + \sqrt{\frac{A}{n\bar{n}}}D_i\bar{D}_i = \beta^\kappa E \quad (21)$$

La somme de (20) et (21) donne que

$$2N_i\bar{N}_i = (\beta + \beta^\kappa)E$$

Si  $\beta + \beta^\kappa = 0$  alors  $N_i = 0$  et  $\xi$  est constante, contradiction.

Si  $\beta + \beta^\kappa \neq 0$  alors  $E$  définit le produit de deux droites et non pas une conique, contradiction encore.

Ainsi il n'y a pas de fonction de Belyi rationnelle sur aucune conique. Il n'y en a donc pas non plus sur la sphère (sinon il suffirait de choisir un isomorphisme rationnel de la sphère sur une conique rationnelle pour décalquer le dessin sur cette conique.)

On a donc montré le

**Fait 3** *Le dessin défini par la fonction de Belyi  $\Psi$  n'admet aucune fonction de Belyi rationnelle, ni sur la sphère, ni sur aucune conique.*

En fait en reprenant le raisonnement précédent, pour une fonction  $\Psi_0$  définie sur un corps quelconque  $\mathbf{K}_0$  ne contenant pas  $i$ , on voit qu'il doit exister un élément  $n \in \mathbf{K}_0(i)$  tel que  $n\bar{n} = A$ .

Réciproquement si un tel  $n$  existe alors on choisit n'importe quels  $N_i$  et  $D_i$  définis sur  $\mathbf{K}_0(i)$  et on définit la conique  $C$  par son équation

$$N_i\bar{N}_i - D_i\bar{D}_i = E$$

où la barre signifie la conjugaison ordinaire de  $\mathbf{K}_0(i)/\mathbf{K}_0$ .

On définit aussi  $\xi(U, V, W) = [\sqrt{n}N_i(U, V, W), D_i(U, V, W)]$  et  $\Psi_0 = \Psi \circ \xi$ . Alors  $\Psi_0$  est définie sur  $\mathbf{K}_0$  comme on peut s'en convaincre en relisant (17), (18), et (19).

Mais l'existence de  $n \in \mathbf{K}_0(i)$  est équivalente à l'existence dans  $\mathbf{K}_0$  d'une solution à l'équation  $x^2 + y^2 = A$ .

On notera que cette dernière condition est aussi satisfaite dans  $\mathbf{Q}(i)$ .

On peut finir en énonçant le

**Fait 4** *Pour tout corps de nombre  $\mathbf{K}_0$ , les deux conditions suivantes sont équivalentes*

- *Il existe, définie sur  $\mathbf{K}_0$ , une fonction de Belyi pour le dessin correspondant à  $\Psi$ .*
- *L'équation*

$$x^2 + y^2 = -1$$

*admet une solution sur  $\mathbf{K}_0$ .*

## 7 Descente de fonctions de Belyi

Dans cette section on s'intéresse aux dessins de genre 0 et sans automorphismes. Nous verrons le résultat suivant

**Fait 5** *Un dessin de genre 0 et sans automorphismes admet une fonction de Belyi sur la sphère de Riemann, définie sur une extension au plus quadratique de son corps de définition. Une telle fonction peut être calculée par de simples manipulations polynômiales.*

*Ensuite, pour savoir s'il existe une fonction de Belyi à coefficients dans le corps de définition, il suffit de calculer un symbole de Hilbert global. Dans le cas où une telle fonction existe, son calcul se réduit à la résolution d'une équation aux normes de degré 2 sur le corps de définition du dessin.*

L'existence d'une fonction de Belyi définie sur une extension au plus quadratique est démontrée par Leila Schneps dans [Schn]. Nous donnons ici une autre preuve, plus élémentaire et surtout plus explicite puisqu'elle conduit à une méthode de calcul de cette fonction de Belyi. D'autre part, cette approche ne nous laisse pas tout à fait sans recours lorsque le dessin admet des automorphismes, comme on le verra dans la section suivante.

Il a déjà été remarqué qu'un dessin de genre 0 et sans automorphismes, admet toujours une fonction de Belyi définie sur son corps  $\mathbf{K}$  de définition pourvu que l'on dessine sur une courbe non singulière bien choisie de genre 0, définie elle aussi sur  $\mathbf{K}$ .

La suite de cette section consiste en deux parties. Dans la première j'étudie en détail la situation où on a déjà calculé une fonction de Belyi  $\varphi$  pour un dessin, définie sur une extension quadratique  $\mathbf{L}$  de son corps de définition  $\mathbf{K}$ . Dans la seconde partie je montre comment on se ramène toujours à cette situation.

## 7.1 Etude d'une fonction de Belyi définie sur une extension quadratique du corps de définition du dessin correspondant

Soit donc un dessin et  $\varphi$  une fonction de Belyi définie sur une extension quadratique  $\mathbf{L}$  de son corps de définition  $\mathbf{K}$ . On appelle  $\sigma$  l'automorphisme non trivial de  $\mathbf{L}/\mathbf{K}$ . Il existe donc une homographie  $H$  telle que

$$\varphi^\sigma = \varphi \circ H \tag{22}$$

Comme on l'a déjà observé,  $H$  peut être définie par une matrice à coefficients dans  $\mathbf{L}$ . De plus, en faisant agir  $\sigma$  sur (22) on obtient

$$H^\sigma = \lambda H^{-1} \tag{23}$$

Et en faisant à nouveau agir  $\sigma$  sur (23) on voit que  $\lambda \in \mathbf{K}$ .

Observons que si l'on remplace  $\varphi$  par  $\psi$  où  $\psi = \phi \circ Y$  alors  $\psi^\sigma = \psi H'$  où  $H'$  est donnée par la formule de changement de base

$$H' = Y^{-1} H Y^\sigma \tag{24}$$

On va montrer le

**Fait 6** *Toute homographie  $H$  définie sur  $\mathbf{L}$  vérifiant (23) est conjuguée au sens de (24) à l'identité ou à une homographie de la forme*

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & A \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

où  $A \in \mathbf{K}$ . Donc il existe  $Y$  définie sur  $\mathbf{L}$  telle que

$$\mathcal{A} = Y^{-1} H Y^\sigma$$

De plus, si  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}_2$  sont deux telles matrices correspondant aux deux nombres  $A_1$  et  $A_2$ , alors le quotient  $A_2/A_1$  est la norme sur  $\mathbf{K}$  d'un élément de  $\mathbf{L}$ .

Ceci prouvera que l'impossibilité de dessiner un dessin de genre 0 sans automorphismes résulte de l'existence d'un "pseudo-automorphisme" de la forme

$$x \mapsto \frac{A}{x^\sigma}$$

En particulier on verra que dans le cas où  $\mathbf{K}$  est réel, et  $\mathbf{L}$  imaginaire alors le pseudo-automorphisme n'est autre qu'une antihomographie d'ordre 2, c'est-à-dire une inversion. Ceci peut alors être détecté immédiatement en regardant le dessin.

Pour prouver le fait 6 il suffit de considérer un rationnel  $\alpha$  tel que  $H(\alpha) \neq \alpha$  ce qui existe si  $H$  n'est pas l'identité. On choisit alors une homographie  $Y_1$  définie sur  $\mathbf{L}$  telle que  $Y_1(0) = \alpha$  et  $Y_1(\infty) = H\alpha$ . Par exemple

$$Y_1 = \begin{bmatrix} H(\alpha) & \alpha \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

On voit alors que  $H_1 = Y_1^{-1}HY_1^\sigma$  vérifie  $H_1(0) = \infty$  et  $H_1(\infty) = 0$ . Donc  $H_1$  est de la forme  $H_1(X) = A/x$ . Donc  $H_1^{-1}$  est égale à  $H_1$  en tant qu'homographie, et d'après (23),  $A^\sigma = A$ .

Supposons maintenant que l'on ait deux homographies  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}_2$  conjuguées, c'est-à-dire telles que

$$\mathcal{A}_2 = Y^{-1}\mathcal{A}_1Y^\sigma \tag{25}$$

Alors  $\mathcal{A}_1Y^\sigma = Y\mathcal{A}_2$  et si l'on pose

$$Y = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{A}_i = \begin{bmatrix} 0 & A_i \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

pour  $i = 1, 2$ , en écrivant explicitement (25) on trouve

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{d}{a} \left( \frac{d}{a} \right)^\sigma$$

On vient donc d'établir que la situation générale est rigoureusement semblable à celle de l'exemple donné dans la section 5. En particulier on obtient la même caractérisation des corps sur lesquels peut être définie une fonction de Belyi.

On énonce cela ainsi

**Fait 7** *Soit  $\mathcal{D}$  un dessin de genre 0 sans automorphismes et  $\mathbf{K}$  son corps de définition. Ou bien  $\mathcal{D}$  admet une fonction de Belyi sur la sphère de Riemann à coefficients dans  $\mathbf{K}$ , ou bien les affirmations équivalentes suivantes sont vraies*

- $\mathcal{D}$  admet une fonction de Belyi  $\varphi$  définie sur la sphère de Riemann à coefficients dans une extension quadratique  $\mathbf{K}(\sqrt{D})$  de  $\mathbf{K}$  et telle que  $\varphi^\sigma(x) = \varphi(A/x)$  où  $A \in \mathbf{K}$ .

- Une fonction de Belyi peut être définie pour ce dessin sur un corps  $\mathbf{L}$  si et seulement si  $\mathbf{K} \subset \mathbf{L}$  ou bien l'équation

$$x^2 - Dy^2 - Az^2 = 0 \quad (26)$$

admet une solution dans  $\mathbf{L}$ .

- $\mathcal{D}$  admet une fonction de Belyi  $\psi$  à coefficients dans  $\mathbf{K}$  définie sur la conique d'équation

$$x^2 - Dy^2 - Az^2 = 0$$

De plus, toutes les coniques sur lesquelles le dessin admet une fonction de Belyi à coefficients dans  $\mathbf{K}$ , sont  $\mathbf{K}$ -isomorphes.

Tous les procédés de construction de ces fonctions de Belyi à partir de l'une d'entre elles se trouvent dans les sections 5 et 6.

L'existence sur un corps  $\mathbf{L}$ , d'une solution à l'équation (26) s'exprime avec le symbole de Hilbert global sur  $\mathbf{L}$ ,  $(D, A)_{\mathbf{L}}$ . Ce symbole est la conjonction des symboles locaux en les places finies qui divisent  $2AD$  et en les places à l'infini. Il est donc très facile à calculer. Il est plus difficile de trouver une solution explicite à l'équation (26).

Accessoirement, les manipulations que nous venons de faire prouvent le fait suivant (où par discriminant de  $\mathbf{K}$  on entend un élément non nul de  $\mathbf{K}$  défini à un carré près).

**Fait 8** Soient  $D_1$  et  $D_2$  deux discriminants distincts de  $\mathbf{K}$ , et  $A_1 \in \mathbf{K}$  qui ne soit pas une norme de  $\mathbf{K}(\sqrt{D_1})/\mathbf{K}$ . On note  $(D_1, A_1)_{\mathbf{K}(\sqrt{D_2})} = (D_1, A_1, D_2)$ .  $(D_1, A_1, D_2)$  vaut 1 si et seulement si l'équation

$$x^2 - D_1y^2 - A_1z^2 = 0$$

admet une solution non triviale sur  $\mathbf{K}(\sqrt{D_2})$ .

Si c'est le cas, alors il existe un élément  $A_2$  dans  $\mathbf{K}$  qui ne soit pas une norme de  $\mathbf{K}(\sqrt{D_2})/\mathbf{K}$ , et tel que pour tout  $D \in \mathbf{K}$ ,  $D \neq D_1, D_2$ ,

$$(D_1, A_1, D) = (D_2, A_2, D)$$

Le calcul de  $A_2$  se fait explicitement comme décrit ci-dessus.

## 7.2 Descente de Weil pour les fonctions de Belyi

Venons en à la deuxième partie de notre exposition. Nous voulons, pour tout dessin  $\mathcal{D}$  sans automorphismes, trouver une fonction de Belyi sur la sphère de Riemann à coefficients sur le corps de définition  $\mathbf{K}$  de  $\mathcal{D}$ , ou bien, une fonction de Belyi sur la sphère de Riemann à coefficients sur une extension quadratique de  $\mathbf{K}$ .

A la fin de la section 4 on a vu comment calculer le corps de définition  $\mathbf{K}$  du dessin ainsi qu'une famille de fonctions de Belyi conjuguées  $\varphi_i$  pour  $1 \leq i \leq e$  définies sur des extensions  $\mathbf{L}_i$  de degré  $e$  de  $\mathbf{K}$ .

Appelons  $\mathfrak{M}$  la clôture algébrique de  $\mathbf{K}(y)$ , le corps des fonctions rationnelles de  $\mathbf{P}_1(\mathbf{K})$ . Appelons  $\bar{\mathbf{L}}$  la clôture algébrique des  $\mathbf{L}_i$  dans  $\mathfrak{M}$ .

La fonction de Belyi  $\varphi_1$  définit un revêtement de la sphère de Riemann qui correspond à une extension du corps  $\mathbf{L}_1(y)$  par le corps  $\mathbf{L}_1(X_1)$  ( $X_1$  est une racine de  $\varphi_1$  dans  $\mathfrak{M}$ .) Puisque  $\varphi_i$  et  $\varphi_j$  définissent le même dessin, il existe des homographies  $T_{j,i}$  telles que

$$\varphi_i = \varphi_j \circ T_{j,i}$$

De plus, le dessin n'admet pas d'automorphismes, les  $T_{j,i}$  sont donc uniques et doivent vérifier les deux conditions requises par Weil dans [Weil], à savoir

$$\begin{aligned} T_{k,j}T_{j,i} &= T_{k,i} \\ T_{j,i}^\sigma &= T_{\sigma(j),\sigma(i)} \text{ pour tout } \sigma \text{ dans } \text{Gal}(\bar{\mathbf{L}}/\mathbf{K}) \end{aligned}$$

On pose alors  $X_{\sigma(i)} = T_{\sigma(i),i}(X_i)$  et on peut prolonger les  $\sigma \in \text{Gal}(\bar{\mathbf{L}}/\mathbf{K})$  en posant  $\sigma(X_i) = T_{i,\sigma(i)}^{-1}(X) = T_{\sigma(i),i}(X) = X_{\sigma(i)}$ . On vérifie que ces définitions sont cohérentes et que les  $X_i$  sont racines des  $\varphi_i$ . L'extension des  $\sigma$  définit un morphisme injectif de  $\text{Gal}(\bar{\mathbf{L}}/\mathbf{K})$  dans  $\text{Gal}(\bar{\mathbf{L}}(X_1)/\mathbf{K})$ . On note  $G_0$  l'image de  $\text{Gal}(\bar{\mathbf{L}}/\mathbf{K})$  dans  $\text{Gal}(\bar{\mathbf{L}}(X_1)/\mathbf{K})$  par cette injection. Soit  $\mathfrak{K}_0$  le corps fixé par  $G_0$ . C'est une extension géométrique de  $\mathbf{K}$  telle que  $\mathbf{L}_1\mathfrak{K}_0 = \mathbf{L}_1(X_1)$ .

Soit maintenant  $B_1 = (\alpha_{1,k})_k$  une base de  $\mathbf{L}_1$  sur  $\mathbf{K}$ . C'est aussi une base de  $\mathbf{L}_1(X_1)$  sur  $\mathfrak{K}_0$ . Les conjuguées de  $B_1$  sont appelées  $B_i$  et sont des bases de  $\mathbf{L}_i$  sur  $\mathbf{K}$  et aussi de  $\mathbf{L}_i(X_i)$  sur  $\mathfrak{K}_0$ .

$X_i$  peut donc s'écrire  $X_i = \sum_k \alpha_{i,k} \delta_k$  où les  $\delta_k$  sont des fonctions de  $\mathfrak{K}_0$ .

Maintenant, puisque

$$X_j = T_{j,i}(X_i)$$

et si l'homographie  $T_{j,i}$  est donnée par la matrice

$$T_{j,i} = \begin{bmatrix} a_{j,i} & b_{j,i} \\ c_{j,i} & d_{j,i} \end{bmatrix}$$

on déduit l'équation  $E_{i,j}$

$$c_{j,i} \sum_k \alpha_{i,k} \delta_k \sum_k \alpha_{j,k} \delta_k + d_{j,i} \sum_k \alpha_{j,k} \delta_k - a_{j,i} \sum_k \alpha_{i,k} \delta_k - b_{j,i} = 0$$

L'ensemble des équations  $E_{i,j}$  forme un système qui définit une courbe  $\mathcal{C}_0$  définie sur  $\mathbf{K}$  et isomorphe à  $\mathbf{P}_1$  par l'application  $\zeta$  telle que

$$X_1 = \zeta(\delta_1, \dots, \delta_e) = \sum_k \alpha_{1,k} \delta_k$$

L'application réciproque se construit en inversant la matrice  $B$  formée de tous les  $B_i$ . En effet  $B$  est inversible par indépendance des automorphismes.

Il est clair alors que la fonction de Belyi  $\varphi_0 = \varphi_1 \circ \zeta$  est définie sur  $\mathbf{K}$ .

On voit en outre que  $\mathcal{C}_0$  se présente comme une intersection de quadriques *définies sur  $\mathbf{K}$*  (penser à décomposer les équations  $E_{i,j}$  comme sommes d'équations définies sur

**K**). Il reste a construire un isomorphisme entre  $\mathcal{C}_0$  et une conique plane définie sur **K**. Une telle conique est alors isomorphe à la droite projective sur une extension au plus quadratique de **K**.

## 8 Dessins dont le groupe d'automorphismes est non trivial

### 8.1 Ordres sur des monômes et normalisation de fractions rationnelles

Soit

$$\varphi(X) = \frac{N(X)}{D(X)} = \varphi_\infty \frac{X^F + f_1 X^{F-1} + f_2 X^{F-2} + \dots + f_F}{X^G + g_1 X^{G-1} + g_2 X^{G-2} + \dots + g_G}$$

une fraction rationnelle.

On s'intéresse aux monômes de la forme

$$\mathcal{S}((\mu_i)_i, (\nu_i)_i) = \prod_{i \geq 0} f_i^{\mu_i} g_i^{\nu_i}$$

où les  $(\mu_i)_i$  et les  $(\nu_i)_i$  sont à valeurs dans **Z** et à supports finis.

Le degré d'un monôme  $\mathcal{S}((\mu_i)_i, (\nu_i)_i)$  est par définition  $\sum_i i(\mu_i + \nu_i)$ . Le poids de ce

monôme est par définition  $\sum_i |\mu_i| + |\nu_i|$ . On définit un ordre partiel sur les monômes

en comparant les degrés et lorsque les degrés sont égaux, en comparant les poids.

Si  $\varphi$  est une fonction rationnelle et  $\Sigma$  un monôme on note  $\Sigma(\varphi)$  la valeur prise par ce monôme si on remplace les indéterminées par les coefficients correspondants de  $\varphi$ .

Pour toute fonction rationnelle  $\varphi$ , on dit que  $\mathcal{S}((\mu_i)_i, (\nu_i)_i)$  est défini en  $\varphi$  si sa valeur est définie et non nulle.

On note  $\sigma_z$  le monôme somme de  $f_1$  et  $g_1$ .

$$\sigma_z = f_1 + g_1$$

On choisit un ordre total  $\mathfrak{D}$  sur l'ensemble des monômes, qui prolonge l'ordre défini par le degré et le poids.

On appelle fonction symétrique minimale et on note  $\Sigma_\varphi$  le plus petit monôme défini en  $\varphi$  et de degré positif ou nul.

Le degré de  $\Sigma_\varphi$  est noté  $e_\varphi$ . C'est le pgcd de l'ensemble des entiers naturels  $k$  tels que  $f_k$  ou  $g_k$  soit non nul. C'est aussi le plus grand entier  $l$  tel que

$$\varphi(X) = \varphi_0(X^l)$$

où  $\varphi_0$  est une fraction rationnelle. En particulier si  $\zeta_{e_\varphi}$  est une racine primitive  $e_\varphi$ -ième de l'unité alors

$$\varphi(\zeta_{e_\varphi} X) = \varphi(X)$$

#### Exemple

$$\Sigma_{X^4-2X^2+1} = f_2 \text{ et } \Sigma_{X^4-2X^2+1}(X^4 - 2X^2 + 1) = -2 \text{ et } e_{X^4-2X^2+1} = 2$$

Il est clair que si  $\psi(X) = \varphi(AX)$  où  $A \in \mathbf{C}^*$  alors  $\Sigma_\varphi = \Sigma_\psi$ .  
De même si  $\sigma$  est un automorphisme de  $\mathbf{C}/\mathbf{Q}$  alors  $\Sigma_{\varphi^\sigma} = \Sigma_\varphi$ .

**Définition 1** Une fraction rationnelle  $\varphi$  est dite normalisée si elle vérifie les deux conditions suivantes

- $\sigma_z(\varphi) = 0$
- $\Sigma_\varphi(\varphi) = 1$

## 8.2 Fonctions de Belyi normalisées

**Définition 2** Une fonction de Belyi  $\varphi$  associée à un dessin  $\mathcal{D}$  est dite normalisée si et seulement si elle vérifie les trois conditions suivantes

- $\varphi(\infty) \in \{0, 1, \infty\}$
- $\sigma_z(\varphi) = 0$
- $\Sigma_\varphi(\varphi) = 1$

Il est clair que l'ensemble de ces fonctions est invariant par action du groupe de Galois du dessin. On se propose de construire toutes les fonctions de Belyi normalisées associées à un dessin quelconque. Pour cela on choisit une fonction de Belyi  $\varphi_c$  quelconque et on appelle  $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq N}$  les points tels que  $\varphi_c(\alpha_i) \in \{0, 1, \infty\}$ . Toute fonction de Belyi normalisée doit prendre la valeur  $\{0, 1, \infty\}$  en  $\infty$  donc on construit une première famille de  $N$  fonctions de Belyi  $(\varphi_{1,i})_{1 \leq i \leq N}$  en posant  $\varphi_{1,i} = \varphi \circ H_{1,i}$  où

$$H_{1,i}(X) = \frac{\alpha_i X}{X + 1}$$

Pour satisfaire la condition  $\sigma_z(\varphi) = 1$  on pose  $\varphi_{2,i} = \varphi_{1,i} \circ H_{2,i}$  où

$$H_{2,i}(X) = X - \frac{\sigma_z(\varphi_{1,i})}{F_{\varphi_{1,i}} + G_{\varphi_{1,i}}}$$

est une translation appropriée.

Ici  $F_{\varphi_{1,i}}$  est le degré du numérateur de  $\varphi_{1,i}$  et  $G_{\varphi_{1,i}}$  est le degré de son dénominateur. Enfin pour s'assurer de la dernière condition  $\Sigma_\varphi(\varphi) = 1$ , on pose  $\varphi_{3,i} = \varphi_{2,i} \circ H_{3,i}$  où

$$H_{3,i}(X) = \frac{X}{\Sigma_{\varphi_{2,i}}(\varphi_{2,i})^{\frac{1}{e_{\varphi_{2,i}}}}$$

est une application linéaire.

Ainsi on obtient  $N$  fonctions de Belyi normalisées  $(\varphi_{3,i})_{1 \leq i \leq N}$  à priori non distinctes deux à deux. L'ensemble des fonctions ainsi obtenues est de cardinal inférieur ou égal à  $N$ . Réciproquement, toute fonction de Belyi normalisée correspondant à ce dessin est l'une des  $\varphi_{3,i}$ . En effet, soit  $\varphi_n$  une fonction de Belyi normalisée correspondant à ce dessin. Alors il existe une homographie  $H_n$  telle que  $\varphi_n \circ H_n = \varphi_c$ . Mais puisque  $\varphi_n(\infty) \in \{0, 1, \infty\}$ , il existe  $i \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $H_n(\alpha_i) = \infty$  et donc  $H_n \circ H_{1,i}$  fixe l'infini. Donc  $\varphi_n$  et  $\varphi_{1,i}$  se correspondent par une application affine:  $H_n \circ H_{1,i}$ . Mais

$\varphi_{3,i} = \varphi_{1,i} \circ H_{2,i}H_{3,i}$  et  $H_{2,i}H_{3,i}$  est aussi affine. Donc il existe une application affine  $T = H_n H_{1,i} H_{2,i} H_{3,i}$  telle que  $\varphi_n \circ T = \varphi_{3,i}$  et  $T(X) = AX + B$ . Mais puisque

$$\sigma_z(\varphi_n) = \sigma_z(\varphi_{3,i}) = 0$$

il faut que  $B = 0$ . Et donc, puisque  $A \neq 0$  et  $\varphi_n(AX) = \varphi_{3,i}(X)$  on sait que  $\Sigma_{\varphi_n} = \Sigma_{\varphi_{3,i}} = \Sigma$  et donc  $\Sigma(\varphi_n) = \Sigma(\varphi_{3,i}) = 1$  puisque les deux fonctions sont normalisées. De même  $e_{\varphi_n} = e_{\varphi_{3,i}} = e$ . Mais puisque  $\varphi_n(AX) = \varphi_{3,i}(X)$  on a  $\Sigma(\varphi_{3,i}) = A^e \Sigma(\varphi_n)$  et donc  $A^e \varphi_n = 1$  et  $\varphi_{3,i} = \varphi_n(AX) = \varphi_n(X)$  *CQFD*.

Comme le groupe de Galois du dessin stabilise l'ensemble des fonctions normalisées, on va essayer de décrire les orbites aussi précisément que possible. Pour cela nous devons introduire quelques définitions.

Considérons d'abord un automorphisme non trivial  $\alpha$  de  $\varphi$ , c'est-à-dire une homographie non triviale telle que  $\varphi = \varphi \circ \alpha$ . Alors  $\alpha$  est d'ordre fini  $e$ , donc il a deux points fixes  $\alpha$  et  $\beta$  qui sont des points de ramification de  $\varphi$ . De plus, la ramification en ces points est un multiple de  $e$ .

Examinons plus en détail le groupe des automorphismes qui fixent un point  $\alpha$ . Ce groupe est un sous-groupe fini de l'ensemble des homographies fixant un point donné. Mais le sous groupe des homographies fixant un point donné est conjugué au groupe des affinités

$$X \mapsto AX + B$$

et on sait que tous les sous groupes finis de ce groupe sont cycliques.

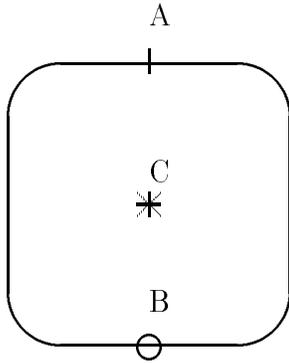
Donc le groupe des automorphismes qui fixent un point  $\alpha$  est cyclique et en particulier tous ces automorphismes non triviaux ont les deux mêmes points fixes.

**Définition 3** Soit  $\varphi$  une fonction de Belyi et  $\alpha$  un point de ramification de  $\varphi$ . Le type de  $\alpha$  est le triplet  $\mathcal{T}(\alpha) = (\varphi(\alpha), r, e)$  où  $r$  est le degré de ramification de  $\varphi$  en  $\alpha$  et  $e$  est l'ordre du sous groupe des automorphismes du dessin qui fixent  $\alpha$ .

Soit maintenant une fonction de Belyi normalisée  $\varphi$  et  $(\varphi(\infty), r_1, e)$  le type de son point à l'infini.

**Définition 4** Le type de  $\varphi$  est le type  $(\varphi(\infty), r_1, e)$  de son point à l'infini.

**Exemple**



Ce dessin a un sommet  $B$ , un coté  $A$  et une face  $C$ . Il admet un automorphisme  $\alpha$  d'ordre 2 et de points fixes  $A$  et  $B$ .

Donc  $\mathcal{T}(A) = (1, 2, 2)$ ,  $\mathcal{T}(B) = (0, 2, 2)$  et  $\mathcal{T}(C) = (\infty, 1, 1)$ .

Il est évident que le type d'une fonction de Belyi normalisée est invariant par action du groupe de Galois du dessin. Donc ce type est constant sur les orbites. En particulier, ou bien toutes les fonctions d'une orbite ont un automorphisme qui fixe l'infini ou bien aucun n'en a.

### Définition 5

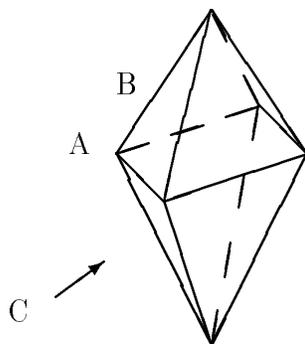
- On dit qu'une orbite est à automorphismes si toutes les fonctions de cette orbite ont un automorphisme non trivial qui fixe l'infini.
- On dit qu'un point alpha au dessus de 0, 1, ou  $\infty$  est célibataire s'il est le seul point ayant un type donné, a automorphismes du dessin près. La fonction de Belyi associée est alors dite célibataire.

Puisque les fonctions de Belyi normalisées associées à deux points égaux à automorphismes près, sont égales, on a le

**Fait 9** Si un dessin a un point célibataire alors il admet une fonction de Belyi normalisée définie sur son corps de définition (obtenue en envoyant ce célibataire à l'infini).

### Exemple

L'octaèdre



Ce dessin n'admet que 3 fonctions de Belyi normalisées correspondant aux points  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Elles sont toutes définies sur son corps de définition.

## 8.3 Groupe d'automorphismes d'un dessin de genre 0

Le groupe d'automorphismes d'un dessin de genre 0 est un sous groupe fini de  $SL_2(\bar{\mathbb{Q}})$ . Tout élément non trivial d'un tel groupe  $H$  est d'ordre fini et admet deux points fixes. Soit  $X$  l'ensemble des points fixes des éléments non triviaux de  $H$ . Alors  $H$  stabilise  $X$ . Comme toujours, le nombre  $N$  d'orbites sous cette action est égal au nombre moyen de points fixés par un élément de  $H$  soit

$$N = \frac{1}{|H|} [2(|H| - 1) + |X|]$$

Si on appelle  $\mathcal{O}_k$  les orbites (pour  $1 \leq k \leq N$ ), alors

$$2 \left(1 - \frac{1}{|H|}\right) = N - \frac{1}{|H|} \sum_{1 \leq k \leq N} |\mathcal{O}_k|$$

Soit  $x_k$  un élément de  $\mathcal{O}_k$  et  $s_k$  l'ordre de son stabilisateur. Alors  $s_k$  ne dépend pas de  $x_k$  et on dira par abus de langage que  $s_k$  est l'ordre de  $\mathcal{O}_k$ .

On a alors

$$2 \left(1 - \frac{1}{|H|}\right) = \sum_{1 \leq k \leq N} \left(1 - \frac{1}{s_k}\right)$$

Si le groupe  $H$  est non trivial alors on en déduit que  $s_k \geq 2$  et donc  $N$  est égal à 2 ou 3.

Si  $N = 2$  alors  $|X| = 2$  et  $H$  est cyclique.

Si  $N = 3$  on a

$$1 + \frac{2}{|H|} = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_3}$$

On en déduit que  $s_1, s_2$  et  $s_3$  ne peuvent prendre que les valeurs suivantes

1. 2,2, $n$  pour  $n \geq 2$
2. 2,3,3
3. 2,3,4
4. 2,3,5

On appelle 1. le cas diédral, 2. le cas tétraédral, 3. le cas octaédral, et 4. le cas icosaédral. On note que dans le cas cyclique, il n'y a que deux orbites de points fixes sous l'action du groupe d'automorphismes. Si les types de ces orbites sont distincts, alors les deux fonctions de Belyi normalisées correspondantes sont définies sur le corps de définition du dessin. Si les deux types sont égaux, alors au pire, les deux fonctions de Belyi sont définies sur la même extension quadratique du corps de définition du dessin et elles sont conjuguées. Ce cas a été plus que largement étudié plus haut.

Dans les cas tétraédral, octaédral, icosaédral, ainsi que dans le cas diédral pour  $n \geq 3$ , on remarque qu'il existe toujours une orbite d'ordre distinct des autres. Elle correspond à une fonction de Belyi normalisée définie sur le corps de définition du dessin.

Reste à examiner le cas diédral avec  $n = 2$ , c'est-à-dire lorsque  $H$  est le groupe de Klein.

## 8.4 Dessins dont le groupe d'automorphismes est le groupe de Klein

On a alors trois orbites correspondant à trois fonctions de Belyi. Deux cas peuvent se présenter. Ou bien les trois fonctions sont définies sur des extensions cubiques du corps de définition du dessin et elles sont conjuguées, ou bien l'une au moins d'entre elles est définie sur ce corps.

Dans ce dernier cas, tout va bien. Supposons donc que nous avons trois fonctions de Belyi  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  définies sur  $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, \mathbf{L}_3$  extensions cycliques du corps  $\mathbf{K}$  de définition du dessin. Soit  $\mathbf{M}$  la clôture de  $\mathbf{L}_1/\mathbf{K}$ , qui est une extension de degré 3 ou 6 de  $\mathbf{K}$ .

Soit  $\sigma$  un élément d'ordre 3 dans le groupe de Galois  $G = \text{Gal}(\mathbf{M}/\mathbf{K})$ , tel que  $\mathbf{L}_2 = \mathbf{L}_1^\sigma$  et  $\mathbf{L}_3 = \mathbf{L}_2^\sigma$ .

Les trois automorphismes non triviaux du dessin ont 6 points fixes en tout. Les deux points fixes d'un automorphisme non trivial donné doivent être du même type puisqu'ils sont dans la même orbite.

De plus, puisque les trois fonctions de Belyi se conjuguent par action de Galois, leurs points à l'infini sont du même type. Donc les six points fixes sont du même type  $(v, r, 2)$ , avec  $v \in \{0, 1, \infty\}$  et  $r$  pair. A cause des deux premières conditions de normalisation, l'un des trois automorphismes non triviaux de  $\varphi_1$  est  $\mathfrak{a}_1$  défini par  $\mathfrak{a}_1(X) = -X$  et les deux points fixes correspondants sont 0 et  $\infty$ .

Ainsi, les deux autres automorphismes  $\mathfrak{b}_1$  et  $\mathfrak{c}_1$  ont pour paires de points fixes, respectivement  $\{\alpha, -\alpha\}$  et  $\{\beta, -\beta\}$ . De plus, en écrivant que  $\mathfrak{b}_1$  permute  $\beta$  et  $-\beta$  on prouve que  $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ . Ainsi les quatre points fixes sont racines du polynôme

$$F(X) = (X^2 - \alpha^2)(X^2 - \beta^2) = X^4 - \alpha^4$$

et ce polynôme est un facteur de  $\varphi_1$ . Plus précisément si  $v = 0$ ,  $F$  divise le numérateur, si  $v = \infty$ ,  $F$  divise le dénominateur, et si  $v = 1$ ,  $F$  divise le numérateur de  $\varphi_1$  diminuée de 1. D'autre part,  $F$  est défini sur  $\mathbf{L}_1$  car  $F(X)$  a pour racines l'ensemble des points finis et non nuls de type  $(v, r, 2)$ .

Ainsi  $\alpha^4 \in L_1$ . On voit que les plongements du groupe de Klein dans  $PSL_2(\mathbf{C})$  auxquels nous avons à faire, ne sont pas du tout quelconques.

On appelle  $H_1, H_2, H_3$ , les groupes d'automorphismes de  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  et  $F_1, F_2, F_3$ , les polynômes correspondants. Comme on l'a vu,

$$H_1 = \{1, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1\}$$

Poursuivons en étudiant l'action de  $G$  sur  $F_1$  par exemple. D'une part, on sait que  $F_1^\sigma = F_2$  puisque  $F_1$  est un facteur de  $\varphi_1$ . D'autre part, puisque  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  correspondent au même dessin, il existe une homographie  $T_{1,2}$  telle que

$$\varphi_2 = \varphi_1 \circ T_{1,2} \tag{27}$$

Donc  $F_2 = F_1^\sigma$  doit avoir les mêmes racines que  $F_1 \circ T_{1,2}$ .

Si  $T_{1,2}$  est définie par  $T_{1,2}(X) = \frac{aX+b}{cX+d}$ , où  $ad - bc \neq 0$ , alors on en déduit que les coefficients en  $X^3, X^2$ , et  $X$  du numérateur de  $F_1 \circ T_{1,2}$  sont nuls.

Ces trois coefficients sont

1.  $4a^3b - 4Ac^3d$

$$2. 6a^2b^2 - 6Ac^2d^2$$

$$3. 4ab^3 - 4Acd^3$$

On en déduit que  $T_{1,2}$  est de l'une des formes suivantes

$$1. T_{1,2}(X) = \lambda X.$$

$$2. T_{1,2}(X) = \lambda/X.$$

Maintenant,  $T_{1,2}$  est définie à un automorphisme près à droite et à gauche. Donc, si l'on se trouve dans le second cas, on peut remplacer  $T_{1,2}$  par  $b_1 T_{1,2}$  et comme  $b_1$  échange 0 et  $\infty$  on se ramène au cas 1.

$$T_{1,2}(X) = \lambda X$$

Reste à examiner la rationalité de  $\lambda$ . Pour cela, faisons agir sur (27) un élément  $\tau$  de  $\text{Gal}(\mathbf{Q}/\mathbf{M})$ . On en déduit que  $\lambda^\tau = \pm\lambda$ . Donc  $\lambda^2 \in \mathbf{M}$ .

Maintenant, en faisant agir  $\sigma$  sur (27), on trouve

$$\lambda\lambda^\sigma\lambda^{\sigma^2} = \pm 1 \tag{28}$$

Donc il existe  $\epsilon \in \mathbf{M}$  tel que  $\lambda^2 = \frac{\epsilon}{\epsilon^\sigma}$ . Soit maintenant  $\rho$  une racine carrée de  $\epsilon$ , et posons  $R(X) = \rho X$ , alors,  $\varphi \circ R$  est définie sur  $\mathbf{M}$  et invariante par  $\sigma$ , donc définie sur  $\mathbf{K}$  ou sur l'unique éventuelle sous-extension quadratique  $\mathbf{N}$  de  $\mathbf{M}/\mathbf{K}$ .

En effet, d'une part,  $\varphi \circ R$  est définie sur  $\mathbf{M}$  car  $\varphi$  n'a que des termes en  $X^2$  et  $\rho^2$  est dans  $\mathbf{M}$ . D'autre part  $\varphi \circ R$  est invariante par  $\sigma$ , car

$$\frac{\rho^\sigma}{\rho}\lambda = \pm 1$$

et  $\varphi(\pm X) = \varphi(X)$ .

On est donc descendu de  $\mathbf{M}$  à  $\mathbf{K}$  ou  $\mathbf{N}$ . De la même manière, on peut descendre si nécessaire de  $\mathbf{N}$  à  $\mathbf{K}$ .

Ceci achève notre étude des dessins d'enfants en genre 0. Énonçons le

**Théorème 1** *Tout dessin de genre 0 dont le groupe d'automorphismes est trivial ou non cyclique, admet un modèle sur son corps de définition.*

*Tout dessin de genre 0 admet un modèle sur une extension au plus quadratique de son corps de définition.*

Plus précisément, lorsque le groupe d'automorphismes est non cyclique et non trivial, on obtient une fonction de Belyi sur la sphère, définie sur le corps de définition du dessin. Il en va de même si le groupe d'automorphismes est cyclique et d'ordre impair, comme on s'en convaincra par un rapide coup d'œil sur la formule (20). Si l'ordre du groupe cyclique est pair, alors on se trouve exactement dans la situation de la section 6 et l'obstruction est exprimée par un symbole de Hilbert global. Le plus sage est alors de dessiner sur la sphère au prix d'une extension quadratique. Sur une autre courbe, la situation ne peut qu'empirer.

**Remarque**

Dans tous les cas, on a donné plus haut le moyen de trouver de telles fonctions de Belyi.

## 9 Calculs et résultats

Je décris maintenant la conduite des calculs sous Maple pour la fonction de Belyi de la formule (11).

On note

$$Q(X) = X^{12} + q_{11}X^{11} + \dots + q_1X + q_0$$

$$\Theta_1 = x^3 + r_{1,2}x^2 + r_{1,1}x + r_{1,0} \text{ et } \Theta_{-1} = x^3 + b_{-1,2}x^2 + b_{-1,1}x + b_{-1,0}$$

$$\Theta_3 = x^3 + r_{3,2}x^2 + r_{3,1}x + r_{3,0} \text{ et } \Theta_{-3} = x^3 + b_{-3,2}x^2 + b_{-3,1}x + b_{-3,0}$$

On obtient un premier ensemble d'équations en divisant (11) par  $X^{12}$  et en dérivant. Les considérations ordinaires de divisibilité donnent alors

$$\widehat{\Theta}_3^2 = XQ' - 6Q$$

Cette relation permet d'éliminer tous les coefficients de  $Q$  sauf  $q_6$ . En compensation elle donne une équation sur les coefficients de  $\Theta_3$  que l'on appelle  $E_6$ .

Une conséquence de la bicoloration est que si l'on note  $\lambda = \Lambda^2$  alors

$$\Theta_1\Theta_3^3 = Q - \Lambda X^6 \text{ et } \Theta_{-1}\Theta_{-3}^3 = Q + \Lambda X^6$$

On en déduit que le résidu de  $Q$  modulo  $\Theta_3^3$  est proportionnel à  $X^6$ . Ceci donne 8 équations en les coefficients de  $\Theta_3$  que l'on appelle  $R_0, R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_7, R_8$ . Même chose pour  $\Theta_{-3}$  et on obtient  $B_0, B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_7, B_8$ .

On prend comme dernière condition de normalisation que

$$r_{3,2} + b_{-3,2} = 1$$

Ceci permet d'éliminer  $b_{-3,2}$ .

Il reste donc 5 inconnues (les coefficients de  $\Theta_3$  et  $\Theta_{-3}$  sauf  $b_{-3,2}$ .)

On prend donc les 5 équations les moins grosses parmi celles dont on dispose à savoir  $E_6, R_0, R_8, B_0, B_8$ .

Malheureusement toutes les tentatives de résolution de ce système par la méthode de Grobner on échoué.

Mais en factorisant la différence  $R_8 - B_8$  j'ai isolé le facteur

$$b_{-3,1} + r_{3,1} = \frac{1}{50}$$

On choisit donc d'adjoindre cette relation au système ce qui permet d'éliminer  $r_{3,1}$ . Maintenant il ne reste plus que 4 inconnues et Maple ne fait plus de difficultés.

On remarquera que  $\Theta_1, \Theta_{-1}, \Theta_3, \Theta_{-3}$  ne sont pas définis sur  $\mathbf{Q}(i)$  mais sur une extension quadratique  $\mathbf{Q}(i, \sqrt{11})$ . Ceci parce que les rouges et les bleus sont exactement symétriques (même répartition des valences). Si on appelle  $\tau$  l'automorphisme de  $\mathbf{Q}(i, \sqrt{11})$  tel que  $\tau(i) = i$  et  $\tau(\sqrt{11}) = -\sqrt{11}$  alors

$$\Theta_{-1} = \Theta_1^\tau \text{ et } \Theta_{-3} = \Theta_3^\tau$$

Si l'on note par une étoile la transformation d'une fraction rationnelle à coefficients sur  $\mathbf{Q}(i)$ , telle que

$$F^*(X) = \bar{F}\left(\frac{A}{X}\right)$$

alors

$$\left(\frac{\widehat{\Theta}_1}{x^3}\right)^* = \zeta \frac{\widehat{\Theta}_1}{x^3} \quad \text{et} \quad \left(\frac{\widehat{\Theta}_3}{x^3}\right)^* = \zeta \frac{\widehat{\Theta}_3}{x^3}$$

où

$$\zeta = \frac{54280 - 42471i}{68921}$$

Comme prévu, la norme de  $\zeta$  est 1. Et donc  $\zeta = \varepsilon/\bar{\varepsilon}$   
où

$$\varepsilon = \frac{121i}{275684} - \frac{351}{275684}$$

Donc  $(\varepsilon x^{-3} \widehat{\Theta}_1)^* = \varepsilon x^{-3} \widehat{\Theta}_1$  et  $(\varepsilon x^{-3} \widehat{\Theta}_3)^* = \varepsilon x^{-3} \widehat{\Theta}_3$ .  
De plus, on remarque que

$$\lambda \zeta^4 = \frac{3^6 11^{11}}{2^{16} 5^{12} 41^{12}}$$

Et encore

$$\frac{\bar{\lambda}}{\lambda} = \left(\frac{40 - 9i}{41}\right)^{12}$$

Voici les valeurs obtenues pour  $\Theta_1$ ,  $\Theta_3$ ,  $\widehat{\Theta}_1$ ,  $\widehat{\Theta}_3$ ,  $\lambda$ .  
On a posé  $r = \sqrt{11}$ .

$$\begin{aligned} \Theta_1 &= x^3 + \left(\frac{33ir}{410} - \frac{36r}{205} + \frac{9}{10}\right)x^2 + \left(\frac{5247ir}{168100} - \frac{6831r}{84050} + \frac{45273}{168100} - \frac{4356i}{42025}\right)x \\ &\quad - \frac{7623i}{137842000} + \frac{6669r}{137842000} - \frac{22113}{137842000} + \frac{2299ir}{137842000} \\ \Theta_3 &= x^3 + \left(\frac{12r}{205} - \frac{11ir}{410} + 1/2\right)x^2 + \left(\frac{11ir}{33620} + \frac{1}{100} + \frac{309r}{84050}\right)x \\ &\quad - \frac{351r}{137842000} - \frac{1053}{137842000} - \frac{121ir}{137842000} - \frac{363i}{137842000} \\ \varepsilon x^{-3} \widehat{\Theta}_1 &= \left(\frac{121i}{275684} - \frac{351}{275684}\right)x^3 + \left(\frac{1089i}{1378420} - \frac{3159}{1378420}\right)x^2 \\ &\quad + \left(\frac{4719i}{13784200} - \frac{19593}{13784200}\right)x \\ &\quad - \frac{1773}{5513680} + \left(\frac{4719i}{56515220000} + \frac{19593}{56515220000}\right)x^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( -\frac{1089 i}{23171240200000} - \frac{3159}{23171240200000} \right) x^{-2} \\
& + \left( \frac{351}{19000416964000000} + \frac{121 i}{19000416964000000} \right) x^{-3} \\
\varepsilon x^{-3} \widehat{\Theta}_3 & = \left( \frac{121 i}{275684} - \frac{351}{275684} \right) x^3 + \left( \frac{121 i}{275684} - \frac{351}{275684} \right) x^2 \\
& + \left( \frac{847 i}{13784200} - \frac{177}{551368} \right) x - \frac{993}{137842000} \\
& + \left( \frac{177}{2260608800} + \frac{847 i}{56515220000} \right) x^{-1} \\
& + \left( -\frac{351}{4634248040000} - \frac{121 i}{4634248040000} \right) x^{-2} \\
& + \left( \frac{121 i}{19000416964000000} + \frac{351}{19000416964000000} \right) x^{-3} \\
\lambda & = \frac{3^9 \cdot 11^{13} \cdot 13 \cdot 23 \cdot 59 i}{2^6 \cdot 5^{11} \cdot 41^{12}} + \frac{3^6 \cdot 7^2 \cdot 11^{11} \cdot 31 \cdot 241 \cdot 3121}{2^{10} \cdot 5^{12} \cdot 41^{12}}
\end{aligned}$$

On entreprend maintenant de dessiner sur la conique d'équation affine

$$u^2 + v^2 + \frac{1}{4100} = 0$$

Le morphisme est donc  $x = u + iv$ , on obtient alors

$$\begin{aligned}
-2^2 41^3 \varepsilon x^{-3} \widehat{\Theta}_1 & = \left( 968 u^2 + \frac{4356 u}{5} + \frac{387079}{2050} \right) v \\
& + 2808 u^3 + \frac{12636 u^2}{5} + \frac{1607679 u}{2050} + \frac{1823643}{20500} \\
-2^2 41^3 \varepsilon x^{-3} \widehat{\Theta}_3 & = \left( 968 u^2 + 484 u + \frac{2783}{82} \right) v \\
& + 2808 u^3 + 1404 u^2 + \frac{363903 u}{2050} + \frac{44223}{20500}
\end{aligned}$$

### Références

- [**Bely**] G.V. Belyi. On Galois extensions of the maximal cyclotomic field, *Izvestiya Ak. Nauk. SSSR, ser. mat.*, 43:2 (1979), 269-276.
- [**Birc**] Bryan Birch. Arithmetic of noncongruence subgroups. *non publié*.
- [**Grot**] Alexandre Grothendieck. Esquisse d'un programme. *non publié*.
- [**Joux**] Antoine Joux. Thèse sur les applications de LLL en cryptographie et théorie de la complexité. Sous la direction de Jacques Stern. *à paraître*.
- [**LeLeLo**] A.K. Lenstra, H.W. Lenstra Jr. et L. Lovász, Factoring Polynomials with rational coefficients, *Math. Ann.* 261 (1982), 515-534.
- [**Schn**] Leila Schneps. Dessins d'enfants on the Riemann sphere. *à paraître*.
- [**ShVo**] Shabat G.B. et Voevodsky V.A. Drawing curves over number fields. *Papers in honour of A. Grothendieck. The Grothendieck Festschrift*. Birkhauser 1990, 199-229.

[Weil] André Weil. The field of definition of a variety. Amer. J. Math. (1956) 78, 509-524.