Exercice, cours de statistiques et probabilités

Louis Thiry

April 6, 2022

Extension de la LGN Montrer que la loi des grands nombres reste vraie pour des v.a. positives, indépendantes, de même loi, et d'espérance commune égale a plus l'infini.

Corrigé Soit une suite $(M_i)_i$ qui tend vers plus l'infini. Montrons qu'il existe E de probabilité nulle et $n_i \in \mathbb{N}$ t.q $\forall \omega \notin E, \forall n > n_i$:

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j(\omega) > M_i$$

- Soit $K \in \mathbb{N}$, on considère les v.a.

  $$Y_j^K = \min(X_j, K)$$

  Pour K fixé, les Y_j^K sont indépendantes et i.i.d car les X_j le sont. De plus et $\forall K \in \mathbb{N}, \forall \omega$:

  $$X_j(\omega) \geq Y_j^K(\omega)$$

- Comme la suite $(Y_j^K)_K$ est une suite croissante de fonctions mesurables positives, par le théorème de convergence monotone (intégrale de Lesbegue):

  $$\lim_{K\to\infty} \mathbb{E}(Y_j^K) = \mathbb{E}(\lim_{K\to\infty} Y_j^K) = \mathbb{E}(X_j) = \infty$$

  Ainsi, il existe K_i tel que

  $$\mathbb{E}(Y_1^{K_i}) > 2M_i$$

- De plus, $\forall K \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(Y_j^K) \leq K$. On peut donc appliquer la Loi forte des grands nombres aux $Y_j^{K_i}$, et il existe E_i de probabilité nulle et $n_i \in \mathbb{N}$ t.q.:

  $$\forall \omega \notin E_i,\ \forall n \geq n_i, \quad |\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_j^{K_i}(\omega) - \mathbb{E}(Y_1^{K_i})| < M_i$$

  Donc

  $$\forall \omega \notin E_i,\ \forall n \geq n_i, \quad \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_j^{K_i}(\omega) > \mathbb{E}(Y_1^{K_i}) - M_i > M_i$$

Soit l'ensemble

$$E = \bigcup_{i\geq 0} E_i$$

On a

$$P(E) \leq \sum_{i\leq 0} P(E_i) = 0$$

c'est à dire que E est de probabilité nulle. Ainsi

$$\forall \omega \notin E,\ \forall n \geq n_i, \quad \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j(\omega) \geq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_j^{K_i}(\omega) > M_i$$

Donc

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} +\infty$$