

Réseaux sociaux et de communication: modèles et algorithmes probabilistes

Laurent Massoulié

Année 2020-2021

Contents

1	Introduction	7
1.1	Contrôle distribué pour l'allocation de ressources de réseaux	7
1.2	Réseaux sociaux: propagation virale et phénomènes émergents	8
2	Chaînes de Markov	11
2.1	Chaînes de Markov	11
2.2	Propriétés fondamentales	12
2.3	Critères d'ergodicité et de non-ergodicité	16
3	Protocoles d'accès aléatoire à un canal	19
3.1	Le protocole Aloha	19
3.2	Aloha avec nombre fini de stations	20
3.3	Aloha avec nombre infini de stations	22
3.4	Variantes d'Aloha, et protocole Ethernet	24
4	Politiques d'ordonnement stabilisantes	27
4.1	Stratégie de poids maximal	27
4.2	Réseaux multi-bonds: poids maximal et "backpressure"	31
5	Contrôle de débits en réseau	35
5.1	Principes d'allocation de ressources	36
5.2	Contrôle distribué: un algorithme "primal"	38
5.3	Interprétation du protocole TCP: fonctions d'utilité implicites	40
5.4	Dynamiques de gradient: existence et unicité	42
5.5	Lagrangien, dualité et multiplicateurs de Lagrange	42
5.6	Un algorithme dual	45
6	Processus de Poisson	47
6.1	Définitions équivalentes du processus de Poisson	47
6.2	Processus de Poisson généraux	52
6.3	Propriétés utiles	53
7	Processus Markoviens de sauts	57
7.1	Les processus Markoviens de sauts	57
7.2	Structure et générateur infinitésimal	58
7.3	Explosions et processus de naissance et de mort	60
7.4	Lois stationnaires et théorèmes limites	61
7.5	Critère d'ergodicité	67

7.6	Réversibilité	68
8	Quelques modèles de réseaux	69
8.1	Le modèle d'Erlang: réseaux à pertes	69
8.2	Réseaux de Jackson	70
8.3	File à priorités préemptives	71
9	Transferts dans Internet: dynamiques de flots	75
9.1	Modèles Markoviens du nombre de transferts en cours	75
9.2	Stabilité optimale des allocations équitables	76
9.3	Comparaison entre politiques de poids maximal et de comparaison d'utilité	78
9.4	Un cas particulier réversible	79
9.5	Exemples de région de stabilité sous-optimale	80
9.5.1	Priorités strictes	80
9.5.2	Transports multi-chemins non coordonnés	81
10	Epidémies SI (Susceptible - Infecté)	83
10.1	Modèle de propagation	83
10.2	Contrôle du temps avant infection totale	84
10.3	Propagation de tous vers tous	85
11	Processus de branchement de Galton-Watson	87
11.1	Probabilité d'extinction	87
11.2	Parcours "un par un" ou par marche aléatoire	88
11.3	Taille de la population totale	89
11.4	Loi d'un branchement sur-critique conditionnellement à l'extinction	90
12	Epidémies SIR et graphes d'Erdős-Rényi	93
12.1	Modèle de Reed-Frost et graphe d'Erdős-Rényi	93
12.2	Emergence du composant géant	94
13	Connectivité dans $\mathcal{G}(n, p)$ et approximation Poissonnienne	99
13.1	Réduction à l'étude du nombre de sommets isolés	100
13.2	Méthodes du premier et du second moment	102
13.3	Distance en variation	103
13.4	Approximation Poissonnienne: méthode de Stein-Chen	105
14	Impact de la topologie sur les épidémies	109
14.1	Temps de survie des épidémies SIS	109
14.2	Transition de phase pour des graphes particuliers	111
14.3	Images Markoviennes de processus de Markov	114
14.4	Couplage de processus Markoviens de saut	116
15	Graphes en loi de puissance	123
15.1	Le modèle de Barabási-Albert	123
15.2	Inégalité d'Azuma-Hoeffding	126
15.3	Accroissements bornés et couplage	128

16 Détection de communautés par méthodes spectrales	131
16.1 Méthodes spectrales pour la détection de communautés	132
16.2 Le modèle stochastique de blocs	132
16.3 Propriétés spectrales du modèle stochastique de blocs	133
16.4 Spectre de la matrice d'adjacence moyenne	134
16.5 Perturbations des vecteurs et valeurs propres de matrices symétriques	135
16.6 Contrôle du rayon spectral de matrices aléatoires	137
16.7 Preuve du théorème 16.1	139
17 Annexe: preuves	141
17.1 Mesures stationnaires et ergodicité des chaînes de Markov	141
17.2 Dynamiques de gradient: preuve du théorème 5.3	147

Chapitre 1

Introduction

Ce cours a pour but de fournir au lecteur des outils pour mieux appréhender les réseaux au sens large, allant des réseaux de transport de données qui sous-tendent l'Internet aux réseaux sociaux—en ligne ou non. Il s'agit de proposer des **modèles** des systèmes et des phénomènes d'intérêt, des **méthodes algorithmiques** pour leur contrôle (idéalement décentralisé), et enfin des **analyses mathématiques** caractérisant le comportement et la performance de ces systèmes.

1.1 Contrôle distribué pour l'allocation de ressources de réseaux

La **première partie** est motivée par l'allocation des ressources dans les réseaux de transport de données. Les exemples considérés traitent d'allocation de capacité de transmission dans des parties clés de l'Internet (réseaux d'accès sans fil, couche dite de transport avec le protocole TCP) mais les problèmes et les solutions sont aussi pertinents plus généralement, par exemple pour l'allocation de mémoire ou de capacité de calcul dans les centres de données qui hébergent le “cloud computing”, ou encore pour des réseaux de transport de personnes plutôt que de données.

On s'intéresse tout d'abord aux protocoles d'accès à un canal partagé, et en particulier aux exemples clés que sont Aloha et Ethernet, pertinents pour la compréhension des réseaux d'accès sans fil WIFI et des standards IEEE 802.11 sous-jacents. Les algorithmes correspondants déterminent de manière décentralisée qui utilise le canal de transmission au moyen d'une approche fondamentalement probabiliste.

Pour analyser leur performance, on commence par un rappel de la théorie des chaînes de Markov à temps discret et à espace d'état fini ou dénombrable. On couvre en particulier la méthode des fonctions de Lyapunov pour établir la propriété d'ergodicité d'une chaîne de Markov.

On aborde ensuite le problème d'ordonnancement pour l'utilisation des ressources de communication d'un commutateur (*switch* en anglais) ou d'un routeur (*router* en anglais). Les routeurs assurent l'interconnexion des liens de communication de l'Internet. Si on envisage l'Internet (au moins sa partie dont les connexions sont filaires, en opposition aux connexions sans fil) comme un graphe, les connexions filaires constituent les arcs de ce graphe et les routeurs en sont les sommets.

On introduit la politique d'ordonnancement de poids maximal dont l'intérêt vient de la propriété d'optimalité suivante. Si il existe une politique d'ordonnancement qui rend le comportement du système *stable*, i.e. pour laquelle les délais restent bornés (au moins en probabilité), alors la politique de poids maximal sera elle aussi stable. La politique de poids maximal s'applique

dans bien d'autres contextes que les switches (réseaux d'accès sans fil notamment).

Nous introduisons aussi la politique dite de "backpressure", introduite pour l'ordonnement de transmissions sans fil multi-bonds, et qui elle aussi a des propriétés de stabilité optimales.

Nous considérons ensuite le problème d'allocations de capacités dans des réseaux filaires multi-bonds, géré pour la grande majorité des transferts de données dans l'Internet par le protocole TCP. Nous introduisons un cadre axiomatique inspiré de la micro-économie pour décrire des allocations cibles potentielles, et des notions d'équité de ces allocations.

Des équations différentielles modélisant des algorithmes distribués d'ajustement de débits sont introduites, et on montre leurs propriétés de convergence. Un "reverse engineering" du protocole TCP est proposé, permettant d'interpréter l'allocation qu'il réalise comme solution d'un problème d'optimisation d'une notion d'équité spécifique. On introduit au passage des outils mathématiques issus des domaines suivants: systèmes dynamiques, optimisation convexe, dualité Lagrangienne.

Afin d'aborder des modèles de files d'attente, nous introduisons ensuite le processus de Poisson et ses propriétés fondamentales, ainsi que la théorie des processus Markoviens de saut (générateur infinitésimal, propriété d'ergodicité, preuve d'ergodicité par fonctions de Lyapunov, réversibilité).

Dans ce cadre, nous analysons des modèles de files d'attente classiques: file FIFO à un serveur (ou $M/M/1/\infty$), file à infinité de serveurs ($M/M/\infty/\infty$), file à priorité, le modèle d'Erlang ou réseau à pertes, utilisé historiquement pour le dimensionnement des réseaux téléphoniques, et plus récemment pour les systèmes de vidéo à la demande distribués, et enfin des réseaux moins classiques modélisant le nombre de téléchargement en cours dans l'Internet.

1.2 Réseaux sociaux: propagation virale et phénomènes émergents

La **deuxième partie** est motivée par les réseaux sociaux (en ligne notamment), la propagation "virale" d'information qui y a lieu, et l'inférence des profils d'utilisateurs à des fins de recommandation. On s'intéresse en particulier à certains phénomènes qui deviennent apparents dans de grands réseaux, comme par exemple des transitions de phase sur le comportement de processus d'intérêt, ou des propriétés structurelles de grands graphes qui résultent de la dynamique de formation de ces graphes.

On y introduit des modèles et des cadres d'analyse issus: des processus épidémiques, des graphes aléatoires, des inégalités de concentration, des algorithmes spectraux pour la détection de communautés. Ces outils sont pertinents plus généralement, notamment pour l'analyse de réseaux de capteurs, de systèmes pair-à-pair, ou encore de réseaux d'interaction entre protéines.

On commence par l'étude des processus épidémiques les plus simples, dans lesquels un individu infecté le reste, et cherche constamment à infecter des cibles choisies au hasard (processus *susceptible infecté*, ou SI). Une telle dynamique se retrouve par exemple dans la propagation de virus informatiques, ou encore de messages parmi des capteurs. Une propriété remarquable est que la vitesse de propagation de l'infection est à peine plus lente que si les cibles sont choisies de façon optimisée. L'outil principal est ici l'inégalité de Chernoff.

On considère ensuite un processus épidémique dans lequel un individu, après avoir été infecté, tente pendant un temps limité d'infecter ses proches (processus *susceptible, infecté, retiré* ou SIR). Une telle dynamique se retrouve par exemple lors de la propagation d'une rumeur dans un réseau social. On établit des phénomènes remarquables de transition de phase, reflétant des seuils sur la force de l'épidémie délimitant trois régions: épidémie faible (ne touchant qu'une fraction négligeable), puissante (touchant une fraction non négligeable), ou totale (atteignant tout le monde).

Les outils correspondants sont les processus de branchement de Galton-Watson, les graphes aléatoires d'Erdős-Rényi, les méthodes du premier et du second moment, et enfin l'approximation poissonnienne.

On s'intéresse ensuite à des topologies de graphes particulières pour décrire qui est en contact avec qui dans le réseau. Le modèle de Barabasi-Albert, ou encore modèle d'attachement préférentiel, est introduit. On analyse ensuite la distribution asymptotique des *degrés* (ou nombres de voisins) des sommets de tels graphes. Celle-ci vérifie la propriété remarquable d'avoir une distribution en *loi de puissance*, présente dans la majorité des graphes de réseaux observés empiriquement. L'inégalité de concentration dite d'Azuma-Hoeffding est introduite pour réaliser cette analyse.

Une autre topologie remarquable est celle de graphe de petit-monde, introduite par J. Kleinberg, et pour laquelle on établit qu'un algorithme distribué de recherche d'une cible dans le réseau converge rapidement.

On étudie ensuite l'impact de la topologie de graphes sur le comportement des épidémies qui s'y propagent. Des descripteurs topologiques simples, comme le *rayon spectral* et la *constante isopérimétrique* du graphe permettent de rendre compte du comportement d'épidémies de type SIR ainsi que SIS (*susceptible, infecté, susceptible*). Ces processus SIS sont pertinents pour décrire par exemple la propagation d'information dans des capteurs à mémoire volatile, ou encore la propagation de virus mutants tels que la grippe. On introduit des outils de couplage de processus de Markov pour conduire ces analyses.

On aborde enfin le problème de **détection de communautés**, i.e. identification de groupes de sommets semblables à partir de l'observation d'un graphe. Ce problème générique est pertinent dans le cadre des réseaux sociaux en ligne par exemple pour la recommandation de contacts. On introduit des méthodes spectrales, qu'on analyse lorsqu'on observe un graphe échantillonné selon le modèle stochastique par blocs (SBM ou stochastic block model en anglais, une généralisation du graphe aléatoire d'Erdős-Rényi).

L'analyse de sensibilité aux perturbations des valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice Hermitienne, ainsi que le contrôle du rayon spectral de matrices aléatoires, sous-tend les résultats correspondants.

Chapitre 2

Chaînes de Markov

Le traitement des chaînes de Markov dans ce chapitre est volontairement succinct. Le lecteur pourra consulter par exemple les cours [3] et [14], ou le livre [2] pour un traitement plus approfondi et détaillé.

2.1 Chaînes de Markov

On considère un ensemble dénombrable (fini ou infini) E .

Une matrice $P = (p_{ij})_{i,j \in E}$ est dite de probabilités de transition si $p_{ij} \geq 0$ et $\sum_{k \in E} p_{ik} = 1$ pour tous $i, j \in E$.

Une chaîne de Markov de probabilités de transition P est une suite $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires qui vérifie la propriété suivante: pour tout $n > 0$ et toute suite $x_0^n := \{x_0, \dots, x_n\} \in E^{n+1}$, on a

$$\mathbb{P}(X_n = x_n | X_0^{n-1} = x_0^{n-1}) = \mathbb{P}(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}) = p_{x_{n-1}x_n}. \quad (2.1)$$

Notant $\{\nu_x\}_{x \in E}$ la loi de X_0 , on a alors la factorisation, pour tout $x_0^n \in E^{n+1}$:

$$\mathbb{P}(X_0^n = x_0^n) = \nu_{x_0} \prod_{i=1}^n p_{x_{i-1}x_i}. \quad (2.2)$$

On note \mathbb{P}_ν la loi de la chaîne correspondante, et \mathbb{E}_ν l'espérance sous cette loi. On note \mathbb{P}_x la loi de la chaîne conditionnellement à $X_0 = x$, et \mathbb{E}_x l'espérance sous cette loi. On a alors pour toute loi ν sur E , en conditionnant par rapport à la valeur x de X_0 :

$$\mathbb{P}_\nu = \sum_{x \in E} \nu_x \mathbb{P}_x.$$

De l'équation (2.2) on obtient immédiatement pour tous n, m tels que $1 \leq n \leq m$, et tout $x_0^{n+m} \in E^{n+m+1}$ tel que $\mathbb{P}(X_n = x_n) > 0$:

$$\mathbb{P}(X_0^{n+m} = x_0^{n+m} | X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_0^{n-1} = x_0^{n-1} | X_n = x_n) \mathbb{P}(X_{n+1}^{n+m} = x_{n+1}^{n+m} | X_n = x_n).$$

En d'autres termes, pour une chaîne de Markov, conditionnellement à sa valeur présente (X_n), son passé (X_0^{n-1}) est indépendant de son futur (X_{n+1}^{n+m}).

Exemple 2.1. Supposons donnée une suite de variables aléatoires i.i.d. (indépendantes, identiquement distribuées) $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans un espace F , indépendantes de la variable aléatoire X_0 à valeurs dans E . Alors, pour toute fonction $f : E \times F \rightarrow E$, la suite définie par récurrence par

$$X_n = f(X_{n-1}, Y_n)$$

est une chaîne de Markov, dont on pourra (exercice) expliciter la matrice P de probabilités de transition en fonction de f et de la loi des Y_n .

Réciproquement, étant donnée une matrice de transition P , en prenant une suite $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires i.i.d. uniformément distribuées sur $[0, 1]$, on peut construire (exercice) une fonction $f : E \times [0, 1] \rightarrow E$ telle que la construction par récurrence ci-dessus est une chaîne de Markov de matrice de transition P .

D'après cet exemple, on voit qu'une chaîne de Markov $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est en fait un système dynamique à temps discret, entraîné par un input aléatoire i.i.d. $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

2.2 Propriétés fondamentales

Dans la suite, sauf mention contraire on dénote par \mathcal{F}_n la tribu engendrée par les variables aléatoires X_0^n , soit $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0^n)$.

Définition 2.1. Une suite $\{\mathcal{F}_n\}_{n \geq 0}$ de tribus ordonnée pour l'inclusion (i.e. $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$) est appelée filtration. On appelle \mathcal{F}_n -temps d'arrêt un temps aléatoire T à valeurs dans \mathbb{N} tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\{T = n\} \in \mathcal{F}_n$. De manière équivalente, lorsque $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0^n)$, il existe pour tout $n \in \mathbb{N}$ une fonction $\phi_n : E^{n+1} \rightarrow \{0, 1\}$ telle que

$$\mathbf{1}_{T=n} = \phi_n(X_0^n).$$

Exemple 2.2. Pour tout ensemble $F \subset E$, on note $T_F := \inf\{n > 0 : X_n \in F\}$. Il s'agit d'un \mathcal{F}_n -temps d'arrêt: en effet, on a pour tout $n > 0$:

$$\mathbf{1}_{T=n} = \mathbf{1}_{X_n \in F} \prod_{k=1}^{n-1} \mathbf{1}_{X_k \notin F}.$$

Dans le cas particulier $F = \{x\}$ pour un élément x de E on note T_x le temps d'arrêt correspondant.

Théorème 2.1. (Propriété de Markov forte) Pour une chaîne de Markov $\{X_n\}_{n \geq 0}$ de matrice de transition P et un \mathcal{F}_n -temps d'arrêt associé, conditionnellement à $T < \infty$ et $X_T = x$, la suite X_T^∞ est une chaîne de Markov de matrice de transition P issue de x , et indépendante de X_0^T .

Preuve. On fixe $k \in \mathbb{N}$, et $x_0^k \in E^{k+1}$. On se donne par ailleurs une suite y_0^∞ à valeurs dans E . Pour tout $n \geq 0$, on a:

$$\mathbb{P}(T = n, X_0^T = y_0^T, X_T = x, X_T^{T+k} = x_0^k) = \mathbb{P}(\phi_n(y_0^n) = 1, X_0^n = y_0^n, X_n = x, X_n^{n+k} = x_0^k),$$

où ϕ_n est la fonction apparaissant dans la définition de temps d'arrêt.

D'après la propriété de Markov, ce dernier terme s'écrit

$$\mathbb{P}(\phi_n(y_0^n) = 1, X_0^n = y_0^n, X_n = x) \mathbb{P}_x(X_0^k = x_0^k) = \mathbb{P}(T = n, X_0^T = y_0^T, X_T = x) \mathbb{P}_x(X_0^k = x_0^k).$$

En sommant l'identité ainsi obtenue sur $n \geq 0$, on obtient:

$$\mathbb{P}(T < \infty, X_T = x, X_0^T = y_0^T, X_T^{T+k} = y_0^k) = \mathbb{P}(T < \infty, X_0^T = y_0^T, X_T = x) \mathbb{P}_x(X_0^k = x_0^k),$$

d'où le résultat annoncé. \square

Définition 2.2. On note $T_x = \inf\{n > 0 : X_n = x\}$. Un état x est dit **récurrent** (respectivement, **récurrent positif**) si et seulement si $\mathbb{P}_x(T_x < +\infty) = 1$ (respectivement, $\mathbb{E}_x(T_x) < +\infty$). Il est dit **transient** si et seulement si il n'est pas récurrent, i.e. $\mathbb{P}_x(T_x < +\infty) < 1$.

On note $p_{xy}^n := \mathbb{P}_x(X_n = y)$ la probabilité d'atteindre y depuis x en n étapes, et $N_x := \sum_{n>0} \mathbf{1}_{X_n=x}$ le nombre total de visites à x après l'instant $n = 0$.

Proposition 2.1. (i) Les assertions suivantes (a), (b), (c) sont équivalentes: (a) x est récurrent; (b) $N_x = +\infty$ \mathbb{P}_x -presque sûrement; (c) $\mathbb{E}_x(N_x) = \sum_{n>0} p_{xx}^n = +\infty$.

(ii) Les assertions suivantes (a'), (b'), (c') sont équivalentes: (a') x est transient; (b') $N_x < +\infty$ \mathbb{P}_x -presque sûrement; (c') $\mathbb{E}_x(N_x) = \sum_{n>0} p_{xx}^n < +\infty$.

Preuve. On note $T_{x,1} := T_x$ et pour $k > 1$, $T_{x,k} := \inf\{n > T_{x,k-1} : X_n = x\}$ le k -ème instant positif de visite de la chaîne à l'état x . On pose $\theta = \mathbb{P}_x(T_x < \infty)$.

N_x est le nombre de k tels que $T_{x,k} < \infty$. D'après la propriété de Markov forte et le fait que $X_{T_{x,k}} = x$, on a

$$\mathbb{P}_x(T_{x,k} < \infty) = \mathbb{E}_x(\mathbf{1}_{T_{x,k-1} < \infty} \mathbf{1}_{T_{x,k} < \infty}) = \theta \mathbb{P}_x(T_{x,k-1} < \infty),$$

d'où par récurrence

$$\mathbb{P}_x(T_{x,k} < \infty) = \theta^k.$$

Si (a) est vérifiée, alors $\theta = 1$ et donc avec probabilité 1, $N_x = +\infty$. (b) implique immédiatement (c). Pour (i) il reste à prouver (c) \Rightarrow (a) ou de manière équivalente (a') \Rightarrow (c').

Si $\theta < 1$, on a

$$\mathbb{E}_x(N_x) = \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}_x(N_x > k) = \sum_{k > 0} \mathbb{P}_x(T_{x,k} < \infty) = \sum_{k > 0} \theta^k < +\infty,$$

soit précisément (a') \Rightarrow (c').

Par négation de (i) on obtient (a') \Leftrightarrow (c') \Leftrightarrow (b'') avec (b'') : $\mathbb{P}_x(N_x < \infty) > 0$. Or il est immédiat que (b') \Rightarrow (b''), et que (c') \Rightarrow (b'), d'où le résultat. \square

Exemple 2.3. (Marche aléatoire sur \mathbb{N} réfléchi en 0)

Pour une séquence i.i.d. de variables aléatoires Δ_n à valeurs dans \mathbb{Z} , on construit la marche aléatoire réfléchi en 0 correspondante, S_n , en posant

$$S_{n+1} = \max(0, S_n + \Delta_n).$$

Supposant que l'espérance $\mathbb{E}(\Delta_n)$ est finie et telle que $\mathbb{E}(\Delta_n) > 0$, montrons que la marche aléatoire est transiente. Notant $\delta = \mathbb{E}\Delta_n > 0$, d'après la loi forte des grands nombres on a la limite presque sûre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta_i = \delta.$$

Nécessairement, il existe alors $n_0 \in \mathbb{N}$ un instant (aléatoire) tel que

$$n \geq n_0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \Delta_i \geq n \frac{\delta}{2}.$$

Notons $Z := \inf_{n \in \mathbb{N}} \sum_{i=1}^n \Delta_i - n\delta/2$. D'après ce qui précède, $Z > -\infty$ avec probabilité 1. On écrit alors, pour $s > 0$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\exists n \geq 0 : S_n = 0 | S_0 = s) &= \mathbb{P}(\exists n \geq 0 : s + \sum_{i=1}^n \Delta_i \leq 0) \\ &\leq \mathbb{P}(\exists n \geq 0 : Z + n\delta/2 + s \leq 0) \\ &= \mathbb{P}(s \leq -Z). \end{aligned}$$

Cette quantité est strictement inférieure à 1 pour s assez grand. En fait, elle tend vers 0 lorsque $s \rightarrow \infty$. On peut en déduire que l'état 0 est transient: partant de 0, avec probabilité positive on excède un niveau s donné en un nombre fini d'étapes, puisque nécessairement $\mathbb{P}(\Delta_i > 0) > 0$. Enfin, la probabilité de ne jamais retourner en 0 après cet instant est strictement positive d'après ce qui précède.

Définition 2.3. La chaîne est dite **irréductible** si pour tous $x, y \in E$ il existe un entier $n > 0$ et une suite $x_0^n \in E^{n+1}$ avec $x_0 = x$, $x_n = y$ telle que

$$\prod_{i=1}^n p_{x_{i-1}x_i} > 0.$$

Lemme 2.1. Pour une chaîne irréductible, si un état $x \in E$ est récurrent (respectivement, récurrent positif), alors tous les états $y \in E$ le sont aussi. On dit alors que la chaîne est irréductible récurrente (respectivement récurrente positive). On la dit transiente si et seulement si elle n'est pas récurrente.

Preuve. Supposons x récurrent. Soit $y \in E$. L'irréductibilité garantit l'existence de n_1, n_2 tels que $p_{yx}^{n_1} > 0$, $p_{xy}^{n_2} > 0$. L'inégalité

$$\sum_{n \geq 0} p_{yy}^n \geq \sum_{n > 0} p_{yx}^{n_1} p_{xx}^n p_{xy}^{n_2}$$

est aisément vérifiée, et la proposition 2.1 nous donne que le membre de droite est infini. Le membre de gauche l'est aussi. y est donc lui aussi récurrent.

Supposons x récurrent positif et $y \in E$ quelconque. On note $\tau_k = T_{x,k} - T_{x,k-1}$ la durée de la k -ème excursion depuis x , et $Z_k = \mathbf{1}\{y \in X_{T_{x,k-1}, T_{x,k}}\}$ l'indicatrice du fait qu'on visite y pendant cette excursion. Enfin on note U le premier instant $T_{x,k}$ après lequel on a visité y , et V l'instant $T_{x,k}$ postérieur à U tel qu'on a à nouveau visité y entre U et V .

La propriété de Markov forte donne que $V - U$ et U ont même distribution. Comme deux visites ont été faites à y à l'instant V , elle donne aussi que V majore une variable aléatoire de distribution $\mathbb{P}_y(T_y \in \cdot)$. Il vient donc

$$\mathbb{E}_y(T_y) \leq \mathbb{E}_x(V) = 2\mathbb{E}_x(U) = 2 \sum_{k \geq 1} \mathbb{E}_x(\tau_k; Z_1 = \dots = Z_{k-1} = 0) = 2 \sum_{k \geq 1} \mathbb{E}_x(T_x) \theta^{k-1},$$

où $\theta := \mathbb{P}_x(Z_1 = 0)$. Nécessairement $\theta < 1$ car sinon on aurait $\mathbb{P}_x(T_y < \infty) = 0$ ce qui est exclu par irréductibilité. Donc $\mathbb{E}_y(T_y) < \infty$ comme annoncé. \square

Exemple 2.4. Soit un graphe $G = (V, E)$ avec un ensemble dénombrable de sommets V . Notant d_x le nombre de sommets adjacents dans G au sommet x , ou degré de x dans G , et supposant que $\forall x \in V$, $d_x < \infty$, on pose $p_{xy} = d_x^{-1} \mathbf{1}_{x \sim y}$, où $x \sim y$ signifie que x et y sont voisins dans G (i.e. $(x, y) \in E$).

La chaîne de Markov $\{X_n\}$ correspondante est une promenade aléatoire sur les sommets du graphe, où à chaque étape n on saute d'un sommet X_n vers un nouveau sommet choisi uniformément au hasard parmi les voisins de X_n . On a alors irréductibilité si et seulement si le graphe est connexe.

Définition 2.4. La **période** d'un état $x \in E$ est définie comme le PGCD des entiers n tels que $\mathbb{P}_x(X_n = x) = p_{xx}^n > 0$.

L'état x est dit **apériodique** si sa période vaut 1.

Proposition 2.2. *Pour une chaîne irréductible, chaque état a la même période. Une chaîne irréductible est alors dite apériodique si l'un, et alors chacun, de ces états a pour période 1.*

Preuve. Soient x, y deux états de périodes respectives d_x, d_y . En particulier l'ensemble des n tels que $p_{xx}^n > 0$ est inclus dans $d_x\mathbb{N}$. Soient r, s tels que $p_{xy}^r > 0$ et $p_{yx}^s > 0$. Alors $p_{xx}^{r+s} > 0$ d'où $d_x | r + s$. Par ailleurs pour tout n tel que $p_{yy}^n > 0$, on a aussi $p_{xx}^{r+n+s} \geq p_{xy}^r p_{yy}^n p_{yx}^s > 0$, et donc $d_x | r + s + n$. Il vient alors $d_x | n$ pour tout n tel que $p_{yy}^n > 0$, d'où $d_x | d_y$ puisque d_y est le PGCD de cette famille d'entiers n . En échangeant les rôles de x et y on a aussi $d_y | d_x$, d'où le résultat. \square

Définition 2.5. *La loi de probabilité π sur E est dite **stationnaire**, ou **invariante**, pour la matrice de transition P si et seulement si*

$$\forall x \in E, \pi_x = \sum_{y \in E} \pi_y p_{yx}.$$

Remarque 2.1. *Par la même relation on définit aussi une mesure π non négative invariante, cette mesure étant potentiellement de masse totale infinie.*

Le terme “distribution stationnaire” est justifié par le fait que, étant donnée π une distribution stationnaire pour la matrice de transition P , si X_0 est distribué selon π , alors chaque X_n est distribué selon π , ce qui se vérifie aisément. On a en fait l'identité en loi, pour tous n, k :

$$\mathbb{P}_\pi(X_0^k \in \cdot) = \mathbb{P}_\pi(X_n^{n+k} \in \cdot).$$

Les théorèmes suivants sont fondamentaux. Leur preuve est donnée en annexe.

Théorème 2.2. *Une chaîne de Markov ayant un état x récurrent admet une mesure (pas nécessairement de masse totale finie) invariante ν , donnée par la formule*

$$\nu_y := \mathbb{E}_x \sum_{n=1}^{T_x} \mathbf{1}_{X_n=y}.$$

Si la chaîne est irréductible, cette mesure invariante est unique à une constante multiplicative près parmi les mesures non négatives invariantes, et met une masse strictement positive sur chaque état $y \in E$.

Théorème 2.3. *(Théorème ergodique). Une chaîne de Markov irréductible de matrice de transition P admet une loi invariante π si et seulement si elle est récurrente positive. On dit alors que la chaîne est ergodique. La loi invariante est unique, donnée par*

$$\forall x, y \in E, \pi_x = \frac{1}{\mathbb{E}_x(T_x)} = \frac{\mathbb{E}_y \sum_{n=1}^{T_y} \mathbf{1}_{X_n=x}}{\mathbb{E}_y T_y}. \quad (2.3)$$

et pour toute fonction f telle que $\sum_{x \in E} \pi_x |f(x)| < +\infty$, on a la convergence presque sûre, ou théorème ergodique (les moyennes en temps sont égales aux moyennes en espace):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n f(X_m) = \sum_{x \in E} \pi_x f(x). \quad (2.4)$$

On a enfin:

Théorème 2.4. *Pour une chaîne de Markov X_0^∞ ergodique (i.e., irréductible, récurrente positive), supposée de plus apériodique, on a alors la convergence en loi suivante pour toute loi initiale ν :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_\nu(X_n = x) = \pi_x.$$

On a une forme de réciproque de ce dernier théorème et du théorème ergodique avec le résultat suivant:

Théorème 2.5. *Une chaîne de Markov irréductible non ergodique (i.e. transiente ou récurrente nulle) est telle que pour tout $x \in E$:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = x) = 0. \quad (2.5)$$

2.3 Critères d'ergodicité et de non-ergodicité

Nous donnons ici des critères d'ergodicité ou de transience / récurrence nulle de chaînes de Markov qui ne nécessitent pas de déterminer de mesure stationnaire. La méthode consiste à trouver une "fonction d'énergie" adaptée au processus considéré et à établir que l'évaluation de cette fonction en l'état de la chaîne a tendance à croître (transience) ou décroître (ergodicité). En cela elle s'apparente à la méthode de Lyapunov pour prouver la convergence de solutions d'équations différentielles.

Théorème 2.6. *(Critère de Foster-Lyapunov: ergodicité, temps discret). Soit $\{X_n\}_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov irréductible sur l'espace discret E de matrice de probabilités de transition P . Si il existe une fonction $V : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que pour des constantes $\epsilon > 0$ et b , et un ensemble fini $K \subset E$, et tout $x \in E$ on ait*

$$\mathbb{E}(V(X_{n+1}) - V(X_n) | X_n = x) \leq \begin{cases} -\epsilon, & x \notin K, \\ b - \epsilon, & x \in K, \end{cases}$$

alors la chaîne est ergodique.

Preuve. Pour tout instant $n \geq 0$ on a

$$\mathbb{E}(V(X_{n+1}) - V(X_n) | X_n) \leq -\epsilon + b\mathbf{1}_{X_n \in K}.$$

Sommant de $n = 0$ à $N - 1$ pour un $N \in \mathbb{N}$ arbitraire on a donc

$$\mathbb{E}(V(X_N) - V(X_0)) + \epsilon N \leq b \sum_{n=0}^{N-1} \mathbb{P}(X_n \in K).$$

Il vient donc

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbb{P}(X_n \in K) \geq \frac{\epsilon}{b} - \frac{\mathbb{E}V(X_0)}{bN}.$$

Il vient donc

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbb{P}(X_n \in K) \geq \frac{\epsilon}{b} > 0.$$

Pour conclure, invoquons le théorème 2.5: si la chaîne est non-ergodique, pour tout $x \in K$, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = x) = 0,$$

et donc

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbb{P}(X_n \in K) \leq \sum_{x \in K} \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbb{P}(X_n = x) = 0,$$

une contradiction qui implique l'ergodicité. \square

Corollaire 2.1. *Supposons pour une chaîne irréductible $\{X_n\}_{n \geq 0}$ qu'il existe une fonction $V : E \rightarrow \mathbb{R}_+$, des constantes $\epsilon > 0, b$, un entier $L > 0$ et un ensemble fini $K \subset E$ tels que*

$$\mathbb{E}(V(X_L) - V(X_0) | X_0 = x) \leq \begin{cases} -\epsilon, & x \notin K, \\ b - \epsilon, & x \in K, \end{cases}$$

Alors la chaîne $\{X_n\}$ est ergodique.

Preuve. La chaîne de Markov $\{Y_n\} := \{X_{Ln}\}$ est telle que, d'après la preuve qui précède,

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N \mathbb{P}(Y_n \in K) \geq \frac{\epsilon}{b} > 0.$$

Il existe donc nécessairement un élément x de K tel que

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N \mathbb{P}(X_n = x) > 0.$$

L'ergodicité en découle encore en invoquant le théorème 2.5. \square

Nous citons maintenant un théorème qui constitue une forme de réciproque du critère de Foster qu'on vient d'énoncer, en ce sens qu'il fournit des conditions pour prouver la non-ergodicité. Comme nous ne l'utiliserons pas par la suite, sa preuve n'est pas fournie dans ce manuscrit. On pourra la trouver en consultant la Proposition 5.4, p. 22 dans [2]; ou encore la Proposition 5.6, p.119 dans [14]).

Théorème 2.7. *Soit $\{X_n\}_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov irréductible sur l'espace discret E de matrice de probabilités de transition P . On suppose l'existence d'une fonction $V : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ non constante, d'un ensemble fini K et d'un élément $x \in E$ tels que $\forall y \in K, V(x) > V(y)$.*

On suppose de plus avoir:

$$\mathbb{E}(V(X_{n+1}) - V(X_n) | X_n = x) \geq 0, \quad x \notin K.$$

(i) *Alors, si la fonction V est bornée, la chaîne est transiente.*

(ii) *Si la fonction V satisfait*

$$\sup_{x \in E} \mathbb{E}(|V(X_{n+1}) - V(X_n)| | X_n = x) < +\infty,$$

alors la chaîne ne peut pas être ergodique.

Chapitre 3

Protocoles d'accès aléatoire à un canal

On s'intéresse ici à un scénario où plusieurs émetteurs cherchent à transmettre vers un même destinataire, avec pour contrainte que leurs émissions sont inaudibles par le destinataire si elles sont simultanées, pour cause d'interférence. On parle alors de collision entre les émissions.

Ce scénario se présente dans de nombreuses situations: transmissions d'émetteurs terrestres vers un même satellite; transmission de paquets de données le long d'un câble (Ethernet par exemple); émission sans fil en Wi-Fi vers un point d'accès;...

Lorsque l'ensemble des émetteurs est fixe dans le temps, et connu du destinataire, il est possible de gérer les collisions de diverses manières. Citons par exemple un protocole à jetons: le destinataire émet un message "broadcast", i.e. que tous les émetteurs entendent, donnant un "jeton" à l'un des émetteurs en le nommant dans ce message. Les autres émetteurs se taisent, attendant de recevoir eux-mêmes le jeton, pendant que l'émetteur choisi émet. Lorsque ce dernier a fini sa transmission, il le signale au destinataire, qui peut alors donner le jeton à un autre.

Dans le cas où l'ensemble des émetteurs est grand et ceux-ci transmettent rarement, le protocole à jetons n'est pas satisfaisant: une transmission devrait attendre potentiellement longtemps avant de recevoir le jeton, le canal étant alors inutilisé la plupart du temps. Les émetteurs peuvent aussi varier au cours du temps; le protocole à jetons nécessite alors de maintenir à jour une liste des émetteurs potentiels, ce qui entraîne une complexité supplémentaire.

Le protocole Aloha, proposé dans les années 60 pour relier des terminaux distribués sur les îles Hawaïennes à un ordinateur central, est l'archétype des méthodes dites d'accès aléatoire, qui sont conçues spécifiquement pour ce type de scénarios. Le protocole Ethernet, conçu en 1973 pour gérer les communications de machines connectées à un même réseau local, raffine les principes du protocole Aloha. Il est aussi décliné sous diverses variantes dans les versions successives des standards IEEE 802.11 pour les communications locales sans fil (Wi-Fi).

3.1 Le protocole Aloha

On considère un grand nombre d'émetteurs qui utilisent le même canal pour émettre des paquets d'information. Supposant le temps partitionné en intervalles d'émission de longueur fixe, ou "slots", on fait l'hypothèse qu'une transmission engagée dans un tel intervalle n'aboutit que si elle est la seule tentative effectuée pendant cet intervalle. Dans le cas contraire, l'interférence entre les tentatives simultanées les fait échouer.

Le protocole Aloha est conçu pour permettre à chaque émetteur de déterminer quand tenter d'envoyer son message, l'hypothèse étant que l'émetteur n'a comme seule information le fait qu'il a échoué ou réussi lors de chaque tentative.

Selon le protocole Aloha, chaque message non encore transmis est émis avec une probabilité p , indépendamment des autres messages et des tentatives passées pour ce message.

3.2 Aloha avec nombre fini de stations

On suppose qu'un nombre fini de stations $s \in \mathcal{S}$ cherchent à émettre sur le même canal. On note $A_{n,s}$ le nombre de nouveaux messages à transmettre par la station s apparus pendant l'intervalle n . On suppose aussi que chaque station s choisit de transmettre pendant l'intervalle de temps n avec probabilité p_s si elle a au moins un message en attente.

Notons $L_{n,s}$ le nombre de messages en attente à la station s au début de l'intervalle n . On se donne une suite de variables aléatoires $B_{n,s}$ de Bernoulli de paramètre p_s qui détermineront si la station s tente d'émettre ou non pendant l'intervalle s . Plus précisément, la station s tente de transmettre pendant n si et seulement si $B'_{n,s} = 1$, où

$$B'_{n,s} = B_{n,s} \mathbf{1}_{L_{n,s} > 0}.$$

L'équation d'évolution des $L_{n,s}$ est alors donnée par:

$$L_{n+1,s} = L_{n,s} + A_{n,s} - B'_{n,s} \prod_{s' \neq s} (1 - B'_{n,s'}). \quad (3.1)$$

Les hypothèses statistiques sur le trafic sont que pour tout s , la suite $\{A_{n,s}\}_{n>0}$ est i.i.d., ces suites étant mutuellement indépendantes. On suppose de plus que chaque $A_{n,s}$ a un second moment fini. On notera λ_s le nombre moyen de messages soumis par s à chaque intervalle:

$$\mathbb{E}(A_{n,s}^2) < \infty, \quad \lambda_s := \mathbb{E}(A_{n,s}). \quad (3.2)$$

On fait aussi l'hypothèse suivante:

$$\forall s \in \mathcal{S}, \quad \mathbb{P}(A_{n,s} = 0) \in]0, 1[. \quad (3.3)$$

On suppose par ailleurs que les $\{B_{n,s}\}$ sont indépendants des $\{A_{n,s}\}$ et mutuellement indépendants. Notant $L_n = (L_{n,s})_{s \in \mathcal{S}}$ le vecteur des demandes en attente aux stations à chaque instant n , il est clair que la suite $\{L_n\}_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov. On vérifie aisément par ailleurs que:

Proposition 3.1. *Sous l'hypothèse (3.3), La chaîne $\{L_n\}_{n \geq 0}$ est irréductible et apériodique.*

Nous établissons maintenant une condition suffisante pour l'ergodicité de cette chaîne:

Proposition 3.2. *Supposons*

$$\forall s \in \mathcal{S}, \quad \lambda_s < p_s \prod_{s' \neq s} (1 - p_{s'}). \quad (3.4)$$

Alors la chaîne est ergodique.

Preuve. En vue d'utiliser le critère de Foster-Lyapunov 2.6 nous introduisons la fonction de Lyapunov quadratique $V(L) := \sum_{s \in \mathcal{S}} L_s^2$. On introduit la notation

$$\Delta_{n,s} = A_{n,s} - B'_{n,s} \prod_{s' \neq s} (1 - B'_{n,s'}),$$

de sorte que $L_{n+1,s} = L_{n,s} + \Delta_{n,s}$. Il vient alors

$$\mathbb{E}(V(L_{n+1}) - V(L_n) | L_n = \ell) = \sum_{s \in \mathcal{S}} \mathbb{E}[\Delta_{n,s}^2 + 2\ell_s \Delta_{n,s} | L_n = \ell].$$

On majore la somme des premiers termes comme suit:

$$\sum_{s \in \mathcal{S}} \mathbb{E}[\Delta_{n,s}^2 | L_n = \ell] \leq \sum_{s \in \mathcal{S}} \mathbb{E}[A_{n,s}^2 + 1],$$

qui est majorée par une constante C indépendante de ℓ d'après (3.2). On a par ailleurs

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[2\ell_s \Delta_{n,s} | L_n = \ell] &= 2\ell_s \left[\lambda_s - p_s \mathbb{E}(\prod_{s' \neq s} (1 - B'_{n,s'}) | L_n = \ell) \right] \\ &\leq 2\ell_s [\lambda_s - p_s \prod_{s' \neq s} (1 - p_{s'})]. \end{aligned}$$

Notant $\epsilon = \min_s [p_s \prod_{s' \neq s} (1 - p_{s'}) - \lambda_s]$, on a $\epsilon > 0$ par hypothèse (3.4). Ceci entraîne

$$\mathbb{E}(V(L_{n+1}) - V(L_n) | L_n = \ell) \leq C - \epsilon \sum_{s \in \mathcal{S}} (\ell_s).$$

Le critère de Foster est donc applicable, en prenant comme ensemble fini d'états

$$K = \{\ell \in \mathbb{N}^{\mathcal{S}} : \sum_{s \in \mathcal{S}} \ell_s < 2C/\epsilon\}.$$

□

On peut se demander si cette condition suffisante d'ergodicité, ou stabilité, est précise ou non. La question n'est pas à ce jour complètement élucidée (sauf pour le cas limité à deux stations). On pourra consulter [5] pour une discussion plus détaillée du sujet. On a cependant:

Proposition 3.3. *Supposons que pour chaque s on a*

$$\lambda_s > p_s \prod_{s' \neq s} (1 - p_{s'}). \quad (3.5)$$

Alors la chaîne $\{L_n\}$ est transiente.

Preuve. On va construire le processus modifié L'_n comme suit:

$$\begin{aligned} L'_0 &= L_0, \\ L'_{n+1,s} &= \max(0, L'_{n,s} + A_{n,s} - B_{n,s} \prod_{s' \neq s} (1 - B_{n,s'})). \end{aligned}$$

Chaque processus $\{L'_{n,s}\}$ est alors une promenade aléatoire sur \mathbb{N} , telle que considérée dans l'exemple 2.3. La condition (3.5) implique que cette marche aléatoire est transiente, et plus

encore, que l'événement $\{\exists n \geq 0 : L'_{n,s} = 0\}$ a une probabilité tendant vers 0 lorsque $L_{0,s}$ tend vers l'infini. Choisissons alors une condition initiale $L_0 = \ell$ telle que pour tout s , on ait :

$$\mathbb{P}(\exists n \geq 0 : L'_{n,s} = 0 | L_{0,s} = \ell_s) \leq \frac{1}{2|\mathcal{S}|}.$$

La probabilité que l'un de ces événements se produise est au plus la somme de leurs probabilités, d'où

$$\mathbb{P}(\exists s \in \mathcal{S}, n \geq 0 : L'_{n,s} = 0 | L'_0 = \ell) \leq \frac{1}{2}.$$

Or sur l'événement complémentaire, on a $L'_{n,s} = L_{n,s} \forall n, s$. Ceci entraîne

$$\mathbb{P}(\forall s \in \mathcal{S}, \forall n \in \mathbb{N}, L_{n,s} > 0) \geq \frac{1}{2}.$$

La chaîne est donc transiente, l'état 0 étant lui-même transient. \square

Si on considère un grand nombre N de stations, chacune soumettant un trafic faible, soit $\lambda_s \equiv \lambda/N$ de sorte que le trafic total est constant, égal à λ , et chacune utilise le même paramètre $p_s \equiv p$ pour un p fixé, la condition suffisante de stabilité ci-dessus s'écrit

$$\lambda < Np(1-p)^{N-1}.$$

Elle est presque nécessaire, puisqu'on vient de voir que si l'inégalité stricte est renversée, alors on a transience. Pour pouvoir concilier ergodicité avec une valeur de λ ne tendant pas vers 0 lorsque $N \rightarrow \infty$, il faudrait alors prendre $p = O(1/N)$, et donc une résolution des conflits désespérément lente.

On peut cependant se demander si lorsque chaque station est active de manière très sporadique, par exemple juste pour transmettre un unique message, la situation s'améliore.

Cette question motive la considération du modèle avec nombre infini de stations qui suit, dans l'optique de mieux comprendre Aloha dans le régime d'intérêt pratique de nombreuses stations peu actives.

3.3 Aloha avec nombre infini de stations

Notons A_n le nombre de nouveaux messages à transmettre à la fin de l'intervalle n . En se donnant une famille i.i.d. $\{B_{n,i}\}_{n,i \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires de Bernoulli de paramètre p , indépendantes de $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, l'évolution du nombre L_n de messages en attente au début de l'intervalle n peut alors s'écrire

$$L_{n+1} = L_n + A_n - \mathbf{1}_{\sum_{i=1}^{L_n} B_{n,i}=1}.$$

Supposant que la suite $\{A_n\}$ est i.i.d., alors la suite $\{L_n\}$ est une chaîne de Markov à valeurs dans \mathbb{N} . Elle est irréductible aperiodique si $1 > \mathbb{P}(A_n > 0) > 0$.

Non-ergodicité d'Aloha

Nous établissons maintenant que pour tout $p \in]0, 1[$, et toute loi des A_n telle que $1 > \mathbb{P}(A_n > 0) > 0$, la chaîne $\{L_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas ergodique, ce qu'on interprète comme une incapacité du protocole à réguler durablement l'accès. Plus précisément, nous établissons le résultat suivant :

Proposition 3.4. *La chaîne de Markov $\{L_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ pour le protocole Aloha de paramètre $p \in]0, 1[$ avec $\mathbb{P}(A_n = 0) \in]0, 1[$ est transiente. De plus avec probabilité 1, $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = +\infty$, et il existe un temps aléatoire $T > 0$ tel que à partir de T le canal est constamment en collision, i.e.:*

$$\forall n \geq T, \sum_{i=1}^{L_n} B_{n,i} \geq 2.$$

Preuve. On fixe une condition initiale $L_0 = \ell \in \mathbb{N}$, et on définit la marche aléatoire \hat{L}_n comme suit:

$$\hat{L}_0 = L_0 = \ell, \hat{L}_{n+1} = \hat{L}_n + A_n, n \geq 0.$$

On note $\hat{Z}_n = \mathbf{1}\{\sum_{i=1}^{\hat{L}_n} B_{n,i} \geq 2\}$, et $Z_n = \mathbf{1}\{\sum_{i=1}^{L_n} B_{n,i} \geq 2\}$. Sur l'événement $\mathcal{E} := \{\forall n \in \mathbb{N}, \hat{Z}_n = 1\}$, on a par récurrence sur n que $\hat{L}_n = L_n, \hat{Z}_n = Z_n$ et le canal est toujours en collision. Montrons que la probabilité de \mathcal{E} est positive pour ℓ suffisamment grand.

Par la loi forte des grands nombres, on a la convergence presque sûre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_0 + \dots + A_{n-1}}{n} = \mathbb{E}(A_0) > 0.$$

Notant $a = \mathbb{E}(A_0)$, et $Y := \sup_{n \in \mathbb{N}} [n(a/2) - (A_0 + \dots + A_{n-1})]$, cette convergence presque sûre entraîne que $Y < +\infty$ presque sûrement. On a par ailleurs pour tout n :

$$\hat{L}_n \geq n(a/2) - Y + \ell.$$

On écrit alors:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\sum_{n \geq 0} (1 - \hat{Z}_n) | A_0^\infty] &= \sum_{n \geq 0} (1-p)^{\hat{L}_n} + \hat{L}_n p (1-p)^{\hat{L}_n - 1} \\ &\leq \sum_{n \geq 0} (1-p)^{n(a/2) - Y + \ell} + C(1-p/2)^{n(a/2) - Y + \ell} \\ &= (1-p)^{\ell - Y} \frac{1}{1 - (1-p)^{a/2}} + (1-p/2)^{\ell - Y} \frac{C}{1 - (1-p/2)^{a/2}}. \end{aligned}$$

En effet, on peut majorer $Lp(1-p)^{L-1}$ par $C(1-p/2)^L$ uniformément en $L \geq 0$ pour une constante C bien choisie. Soit $K > 0$ tel que $\mathbb{P}(Y \leq K) \geq 1/2$. On obtient alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\bar{\mathcal{E}}) &= \mathbb{P}(\bar{\mathcal{E}}, Y \leq K) + \mathbb{P}(\bar{\mathcal{E}}, Y > K) \\ &\leq 1/2 + \mathbb{E}(\sum_{n \geq 0} (1 - \hat{Z}_n) \mathbf{1}_{Y \leq K}) \\ &\leq 1/2 + (1-p)^{\ell - K} \frac{1}{1 - (1-p)^{a/2}} + (1-p/2)^{\ell - K} \frac{C}{1 - (1-p/2)^{a/2}}, \end{aligned}$$

où on a exploité l'évaluation précédente. Pour un choix de ℓ suffisamment grand, on peut rendre cette borne supérieure aussi proche de $1/2$ qu'on le souhaite; par exemple, pour $\ell \geq \ell_0$, on a $\mathbb{P}(\mathcal{E}) \geq 1/4$. Ceci établit déjà la transience de la chaîne: avec probabilité strictement positive, partant de ℓ_0 on ne retourne pas en 0.

On considère maintenant la succession de temps d'arrêt T_k qui correspondent aux instants n où $Z_n = 0$ et $L_n \geq \ell_0$ pour la chaîne de Markov $\{(L_n, Z_n)\}$. A chaque T_k , la valeur correspondante L_{T_k} est supérieure ou égale à ℓ_0 , donc avec probabilité minorée par $1/4$ le canal sera pour toujours en collision et par conséquent $T_{k+1} = +\infty$. Ceci entraîne par récurrence sur k que $\mathbb{P}(T_k < +\infty) \leq (3/4)^k$, et donc avec probabilité 1 seulement un nombre fini de T_k est fini.

A part aux instants T_k , on ne peut avoir $Z_n = 0$ que pour $L_n < \ell_0$. Par transience de la chaîne $\{L_n\}$, celle-ci ne fait, avec probabilité 1, qu'un nombre fini de visites à l'ensemble fini $\{0, \dots, \ell_0 - 1\}$. On a donc établi qu'avec probabilité 1, $Z_n = 0$ seulement pour un nombre fini d'instant n . \square

3.4 Variantes d'Aloha, et protocole Ethernet

Nous considérons maintenant deux tentatives distinctes d'améliorer le protocole.

La première consiste à fournir aux émetteurs une information supplémentaire, par rapport au feedback minimal exploité par Aloha. Supposons que le nombre total $L_n = \ell$ de transmissions en attente est connu de chacun. La probabilité de succès de transmission, soit $p\ell(1-p)^{\ell-1}$, peut alors être maximisée par rapport au paramètre du protocole, p . En annulant la dérivée de cette probabilité par rapport à p on obtient

$$\ell(1-p)^{\ell-1} - p\ell(\ell-1)(1-p)^{\ell-2} = 0,$$

soit $p(\ell) = 1/\ell$.

Proposition 3.5. *Soit $\lambda = \mathbb{E}(A_n)$ le nombre moyen d'arrivées par intervalle de temps, qu'on suppose encore satisfaire $\mathbb{P}(A_n > 0) \in]0, 1[$. On suppose que chaque émetteur tente de transmettre dans l'intervalle n avec probabilité $p(L_n) = 1/L_n$. La chaîne est alors ergodique dès que $\lambda < 1/e \approx 0,368$.*

Preuve. Nous utilisons le critère de Foster-Lyapunov 2.6, choisissant pour fonction de Lyapunov $V(L) = L$. On a l'évaluation

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(V(L_{n+1}) - V(L_n) | L_n = \ell) &= \lambda - (1 - \frac{1}{\ell})^{\ell-1} \\ &\leq \lambda - \frac{1}{e} + \epsilon \end{aligned}$$

pour tout $\epsilon > 0$ fixé, pour ℓ assez grand. Prenant $\epsilon = (1/e - \lambda)/2$, ce dernier terme s'écrit $-\epsilon$. Le critère de Foster donne alors l'ergodicité. \square

Remarque 3.1. *On a supposé ici que l'état du système, le backlog L_n était connu de chaque émetteur. Il est possible d'obtenir un mécanisme stable sur la même plage de valeurs, $\lambda \in [0, 1/e[$ en s'affranchissant de cette hypothèse, si on suppose cependant que chaque émetteur entend le résultat de l'utilisation du canal, soit $Z_n = \{0, 1, *\}$ selon qu'il y a eu zéro, une, ou plusieurs transmissions lors de chaque intervalle n , le cas $*$ correspondant à une collision.*

Sur la base de ce feedback, chaque utilisateur peut maintenir une estimation approchée de L_n , mettons \hat{L}_n , par une récurrence du type

$$\hat{L}_{n+1} = \max(1, \hat{L}_n + a\mathbf{1}_{Z_n=0} + b\mathbf{1}_{Z_n=1} + c\mathbf{1}_{Z_n=*}),$$

pour un triplet (a, b, c) . Un émetteur choisit alors d'émettre avec probabilité $1/\hat{L}_n$.

Pour des choix judicieux de (a, b, c) (par exemple, $(2-e, 0, 1)$), on peut montrer que la chaîne (L_n, \hat{L}_n) est alors ergodique; cf. [7], chapitre 4 ou [10], chapitre 5.2.

La seconde méthode utilisée pour améliorer la performance d'Aloha est l'approche utilisée par le protocole Ethernet. Il s'agit, sans fournir aux émetteurs de feedback supplémentaire par rapport à Aloha, de les faire réduire leur probabilité de transmettre après chaque tentative infructueuse.

Le protocole Ethernet procède de la manière suivante. Après son k -ème échec, un émetteur choisit un nombre uniformément au hasard dans l'intervalle $\{1, \dots, 2^k\}$ (qu'on appelle la *fenêtre de congestion*) pour déterminer au bout de combien d'intervalles il retentera de transmettre. On a alors le résultat suivant:

Théorème 3.1. *(cf. [14], chapitre 1, proposition 1.6, ou [10], chapitre 5.3 théorème 5.11).*

Supposant la loi des arrivées A_n Poisson de paramètre $\lambda > 0$, le nombre total de transmissions réussies effectuées par le protocole Ethernet est infini avec probabilité 1 si $\lambda < \log(2) \approx 0,693$, et est fini avec probabilité 1 si $\lambda > \log(2)$.

Pour autant, il ne s'ensuit pas que le protocole Ethernet induit une chaîne ergodique lorsque $\lambda < \log(2)$. En effet, une variante d'Ethernet a été proposée, selon laquelle après k échecs la probabilité de retransmission est 2^{-k} à chaque slot, une modification mineure d'Ethernet qui rend le système descriptible selon une chaîne de Markov plus simple. On a alors

Théorème 3.2. *(Aldous, 1987 [1]) Pour tout $\lambda > 0$, la chaîne de Markov décrivant le protocole Ethernet modifié est transiente.*

A ce jour, il n'est pas su s'il existe un protocole basé uniquement sur l'observation du canal par les émetteurs aux instants où ils transmettent et qui induise un système ergodique pour une valeur de λ positive. Les experts penchent pour une réponse négative, mais le problème est mathématiquement ardu, et a résisté aux tentatives de résolution pour le moment!

Commentaires

Le protocole Aloha est instable (i.e. non ergodique), mais en fait l'observation de simulations avec nombre fini d'émetteurs illustre un phénomène de métastabilité: le système reste très longtemps dans un mode de fonctionnement acceptable, avec un backlog faible et des temps d'attente limités, avant qu'une succession de choix aléatoires malencontreux ne conduise à la congestion.

Un protocole d'accès aléatoire au canal peut être utilisé pour réserver des intervalles plus longs de transmission, ce qui fait qu'on peut espérer une utilisation proche de 1 du canal lorsque le ratio de la durée des intervalles utilisés pour l'accès aléatoire par rapport à la durée des intervalles de transmission effective de données tend vers 0.

L'observation du phénomène de métastabilité mentionné ci-dessus, le fait qu'Ethernet parvient à transmettre une infinité de paquets (au moins pour $\lambda < \log(2)$), même s'il ne rend pas le système ergodique, le fait que le nombre de sources bien que grand est en fait fini, rendent compte de la performance satisfaisante en pratique des protocoles Ethernet et ses déclinaisons en IEEE 802.11x.

Chapitre 4

Politiques d'ordonnancement stabilisantes

4.1 Stratégie de poids maximal

On considère le problème d'ordonnancement générique suivant. Chaque $r \in \mathcal{R}$ indice un type de service. A chaque instant $n \in \mathbb{N}$, on peut choisir un vecteur de service s_n dans l'ensemble \mathcal{S}_n , où $\mathcal{S}_n \subset \mathbb{N}^{\mathcal{R}}$ peut changer d'un instant à l'autre, $s_n(r)$ désignant le nombre maximal de requêtes de type r traitées pendant cet instant. On suppose de plus que pour une constante $s_{max} \in \mathbb{N}$, on a $\mathcal{S}_n \subset [0, s_{max}]^{\mathcal{R}}$, i.e. les régions \mathcal{S}_n sont bornées.

Une fois ce service effectué on a l'arrivée de $A_n(r) \in \mathbb{N}$ nouvelles requêtes de service de type r .

Notant $X_n(r)$ le nombre de requêtes de type r en attente à la fin de l'instant de service n , on a alors l'équation d'évolution

$$\forall r \in \mathcal{R}, n \in \mathbb{N}, X_n(r) = (X_{n-1}(r) - s_n(r))^+ + A_n(r).$$

On fait les hypothèses statistiques suivantes. Les vecteurs A_n sont i.i.d., de moyenne $a \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{R}}$, et les ensembles \mathcal{S}_n sont i.i.d., de loi ν , et indépendants des A_n . On pose alors la définition

Définition 4.1. *Pour tout $\mathcal{S} \subset [s_{max}]^{\mathcal{R}}$, on désigne par $env(\mathcal{S})$ l'enveloppe convexe de l'ensemble \mathcal{S} . La région de capacité \mathcal{C} du système est alors définie comme*

$$\mathcal{C} = \left\{ x \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{R}} : \forall \mathcal{S} \subset [s_{max}]^{\mathcal{R}}, \exists z(\mathcal{S}) \in env(\mathcal{S}) : \forall r \in \mathcal{R}, x_r \leq \sum_{\mathcal{S}} \nu(\mathcal{S}) z_r(\mathcal{S}) \right\} \quad (4.1)$$

Lorsque la loi ν est concentrée sur un unique ensemble $\mathcal{S} \subset \mathbb{N}^{\mathcal{R}}$, la région \mathcal{C} est l'ensemble des vecteurs $x \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{R}}$ tels qu'il existe un vecteur $y \geq x$ dans l'enveloppe convexe de \mathcal{S} .

Exemple 4.1. *Commutation de paquets dans les routeurs: pour un routeur avec N ports d'entrée et N ports de sortie, la fonction dite de commutation de paquets au sein du routeur doit permettre d'envoyer un paquet reçu à n'importe quel port d'entrée vers n'importe quel port de sortie. Une architecture couramment étudiée consiste à maintenir à chaque port d'entrée $i \in [N] := \{1, \dots, N\}$, N files d'attente distinctes, une par port de sortie, où sont stockés les paquets destinés au port correspondant. L'architecture dite "crossbar" permet alors à chaque étape de créer un appariement arbitraire parmi les $N!$ possibilités entre les ports d'entrée et de sortie.*

Le cadre précédent permet de modéliser ce contexte: on associe un type de service à chaque paire $(i, j) \in [N] \times [N]$ de ports d'entrée et de sortie; $X_n(i, j)$ est le nombre de paquets en attente au port d'entrée i destinés au port de sortie j . L'ensemble \mathcal{S} des vecteurs de service possibles correspond aux matrices $s_{i,j}$ de permutation.

On a alors (théorème de Birkhoff-von Neumann) la caractérisation suivante de la région de capacité comme l'ensemble des matrices $x \in [0, 1]^{[N] \times [N]}$ telles que

$$\forall i, j \in [N] \times [N], \sum_{k \in [N]} x_{i,k} \leq 1, \sum_{k \in [N]} x_{k,j} \leq 1.$$

Exemple 4.2. *Ordonnancement dans les réseaux sans fil: une station émettrice dispose d'une puissance d'émission P par unité de temps. Elle envoie des paquets de données vers les stations destinataires $r \in \mathcal{R}$. Le vecteur $G \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{R}}$ des gains de transmission de l'émetteur vers les destinataires est i.i.d.. A chaque instant n , la station doit choisir une unique destination $r \in \mathcal{R}$ vers qui transmettre, la quantité d'information reçue étant alors donnée par PG_r (il s'agit d'une idéalisation; cf. formule de Shannon pour la capacité d'un canal Gaussien, fonction du rapport signal sur bruit, qui dans un régime de puissance faible après linéarisation redonne le modèle décrit ici). Si les produits PG_r sont entiers, on se retrouve encore dans le cadre précédent.*

On introduit dans ce cadre la politique de poids maximal:

Définition 4.2. *Etant données des fonctions de poids $\phi_r : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$, la politique d'ordonnancement de poids maximal correspondante consiste par définition à choisir à chaque étape n un vecteur $s_n \in \mathcal{S}_n$ qui réalise le maximum dans*

$$\max_{s \in \mathcal{S}_n} \sum_{r \in \mathcal{R}} s_r \phi_r(X_{n-1}(r)).$$

Dans la suite on s'intéresse uniquement aux fonctions de poids $\phi_r(x) = w_r x^\alpha$ pour des poids $w_r > 0$ et un exposant commun $\alpha > 0$.

Exemple 4.3. *La politique "serve the longest queue first", consistant pour un serveur traitant plusieurs files d'attente de toujours choisir de servir en priorité celle contenant le plus de requêtes en attente peut être vue comme un cas particulier de la politique de poids maximal, avec $w_r \equiv 1$ et $\alpha = 1$.*

Théorème 4.1. *On fixe une politique de poids maximal (w, α) avec $w_r, \alpha > 0$. On suppose que $\forall r \in \mathcal{R}, \mathbb{E}(A(r)^{1+\alpha}) < \infty$ et $a_r > 0$. Si pour un $\epsilon > 0$, on a $(1 + \epsilon)a \in \mathcal{C}$, où $a = \mathbb{E}(A_n)$ et \mathcal{C} est la région de capacité, alors la chaîne de Markov $\{X_n\}$ est ergodique. Si $a \notin \mathcal{C}$, alors pour toute politique d'ordonnancement, la chaîne de Markov $\{X_n\}$ est transiente.*

Remarque 4.1. *La politique de poids maximal est myope: elle fait une décision à l'instant n sur la base de l'ensemble \mathcal{S}_n de volumes de service réalisables à cet instant, sans prise en compte explicite de la distribution $\nu(\mathcal{S})$. Elle n'implique pas non plus d'estimation explicite des taux d'arrivée moyens a_r . Il est donc remarquable qu'une stratégie aussi simple permette de stabiliser le système dès que cela est faisable (le seul cas qu'on n'a pas traité est lorsque le vecteur a est à la frontière de l'ensemble \mathcal{C} ; pour cela on peut établir que, si les A_n ont une variance non nulle, la chaîne de Markov peut être rendue récurrente nulle mais pas ergodique). De par sa simplicité, cette politique est aussi adaptative: lors d'un changement dans les taux moyens d'arrivée, aucun changement dans la politique n'est nécessaire pour préserver l'ergodicité.*

Preuve. Ergodicité des politiques de poids maximal: Soit $\epsilon > 0$ tel que $(1 + \epsilon)a \in \mathcal{C}$. En vue d'appliquer le critère d'ergodicité de Lyapunov-Foster, on introduit la fonction V définie sur $\mathbb{N}^{\mathcal{R}}$ par

$$\forall x \in \mathbb{N}^{\mathcal{R}}, V(x) := \sum_{r \in \mathcal{R}} (1 + \alpha)^{-1} w_r x_r^{1+\alpha}.$$

On fixe $x \in \mathbb{N}^{\mathcal{R}}$ et on cherche à majorer $\mathbb{E}(V(X_n) - V(X_{n-1}) | X_{n-1} = x)$.

On note

$$h_r := X_n(r) - X_{n-1}(r) = A_n(r) + \max(-s_n(r), -X_{n-1}(r)).$$

La dérivée de la fonction $x_r \rightarrow w_r(1 + \alpha)^{-1}x_r^{1+\alpha}$ étant $x_r \rightarrow w_r x_r^\alpha$, une formule de Taylor au premier ordre donne l'existence de scalaires aléatoires $\theta_r \in [0, 1]$ tels que

$$\mathbb{E}(V(X_n) - V(X_{n-1}) | X_{n-1} = x) = \mathbb{E}\left(\sum_{r \in \mathcal{R}} w_r (x_r + \theta_r h_r)^\alpha h_r | X_{n-1} = x\right).$$

On écrit ce second membre comme la somme $A + B$ de deux termes donnés par

$$A = \mathbb{E}\left(\sum_{r \in \mathcal{R}} w_r x_r^\alpha h_r | X_{n-1} = x\right)$$

et

$$B = \mathbb{E}\left[\sum_{r \in \mathcal{R}} w_r \{(x_r + \theta_r h_r)^\alpha - x_r^\alpha\} h_r | X_{n-1} = x\right].$$

On évalue le terme A comme suit:

$$\begin{aligned} A &= \mathbb{E}\left(\sum_{r \in \mathcal{R}} w_r x_r^\alpha (A_n(r) + \max(-s_n(r), -x_r)) | X_{n-1} = x\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\sum_{r \in \mathcal{R}} w_r x_r^\alpha (a_r + \max(-s_n(r), -x_r)) | X_{n-1} = x\right) \\ &\leq \mathbb{E}\left(\sum_{r \in \mathcal{R}} w_r x_r^\alpha (a_r - s_n(r)) | X_{n-1} = x\right) + \sum_{r \in \mathcal{R}} w_r s_{max}^{\alpha+1}, \end{aligned}$$

où on a remplacé h_r par son expression, utilisé l'indépendance de A_n et de X_{n-1} , et majoré $x_r^\alpha \max(-s_n(r), -x_r)$ par $-x_r^\alpha s_n(r) + s_{max}^{\alpha+1}$.

D'après la condition $a(1 + \epsilon) \in \mathcal{C}$, on a l'existence d'une distribution $\nu(\cdot | \mathcal{S})$ sur \mathcal{S} telle que

$$\sum_{\mathcal{S}} \nu(\mathcal{S}) \sum_{s \in \mathcal{S}} \nu(s | \mathcal{S}) s \geq (1 + \epsilon)a.$$

D'après la définition de la politique de poids maximal, on a sur l'événement $\{X_n = x\}$:

$$\sum_{r \in \mathcal{R}} w_r x_r^\alpha s_n(r) \geq \sum_{s \in \mathcal{S}_n} \nu(s | \mathcal{S}_n) \sum_{r \in \mathcal{R}} w_r x_r^\alpha s(r).$$

D'après l'indépendance entre X_{n-1} et \mathcal{S}_n , les deux dernières conditions donnent

$$\mathbb{E}\left(\sum_r w_r x_r^\alpha s_n(r) | X_{n-1} = x\right) \geq \sum_{\mathcal{S}} \nu(\mathcal{S}) \sum_{s \in \mathcal{S}} \nu(s | \mathcal{S}) \sum_{r \in \mathcal{R}} w_r x_r^\alpha s(r) \geq (1 + \epsilon) \sum_{r \in \mathcal{R}} w_r x_r^\alpha a_r.$$

Notant $C = \sum_{r \in \mathcal{R}} w_r s_{max}^{\alpha+1}$, on a donc la majoration

$$A \leq -\epsilon \sum_{r \in \mathcal{R}} w_r x_r^\alpha a_r + C.$$

On majore maintenant le terme B comme suit. Pour $\alpha \leq 1$, on a

$$|(x_r + \theta_r h_r)^\alpha - x_r^\alpha| \leq |\theta_r h_r|^\alpha \leq |h_r|^\alpha,$$

et donc

$$B \leq \sum_{r \in \mathcal{R}} w_r \mathbb{E}(|h_n(r)|^\alpha | X_n = x).$$

On peut par exemple majorer $|h_n(r)|^\alpha$ par $A_n(r)^\alpha + s_{max}^\alpha$, et ensuite utiliser l'indépendance entre A_n et X_{n-1} pour conclure que B est majorée par une constante $C' = \sum_{r \in \mathcal{R}} w_r (\mathbb{E} A_n(r)^\alpha + s_{max}^\alpha)$.

Dans le cas $\alpha > 1$, on utilise une formule de Taylor au premier ordre pour obtenir la majoration

$$|(x_r + \theta_r h_r)^\alpha - x_r^\alpha| \leq (x_r + |h_r|)^\alpha - x_r^\alpha \leq \alpha (x_r + |h_r|)^{\alpha-1} |h_r|.$$

Nous utilisons maintenant l'inégalité valide pour tous réels a, b, c non négatifs:

$$(a + b)^c \leq 2^c [a^c + b^c]$$

pour obtenir

$$|(x_r + \theta_r h_r)^\alpha - x_r^\alpha| \leq \alpha 2^{\alpha-1} [|h_r|^\alpha + |h_r| x_r^{\alpha-1}].$$

Utilisant à nouveau l'inégalité $|h_r|^c \leq A_n(r)^c + s_{max}^c$ valable pour $c \geq 0$, on obtient

$$B \leq \sum_{r \in \mathcal{R}} w_r \alpha 2^{\alpha-1} [\mathbb{E}(A_n(r)^\alpha) + s_{max}^\alpha + \{s_{max} + \mathbb{E} A_n(r)\} x_r^{\alpha-1}].$$

En combinant ces évaluations on obtient la majoration (en changeant la définition de la constante C , et pour des coefficients $\beta_r > 0$):

$$\mathbb{E}(V(X_n) - V(X_{n-1}) | X_{n-1} = x) \leq -\epsilon \sum_{r \in \mathcal{R}} w_r x_r^\alpha a_r + C + \sum_{r \in \mathcal{R}} \beta_r x_r^{\alpha-1}.$$

Pour appliquer le critère de Lyapunov-Foster, il nous reste à déterminer un ensemble fini $K \subset \mathbb{N}^{\mathcal{R}}$ et un $\epsilon' > 0$ tel que pour $x \notin K$, le membre de droite de cette expression soit majoré par $-\epsilon'$. Posons $\epsilon' = 1$ (n'importe quelle constante marche) et

$$K = \{x \in \mathbb{N}^{\mathcal{R}} : -\epsilon \sum_{r \in \mathcal{R}} w_r x_r^\alpha a_r + C + \sum_{r \in \mathcal{R}} \beta_r x_r^{\alpha-1} > -1\}.$$

Il est alors facile de vérifier que $|K| < \infty$: pour $x \in K$ nécessairement

$$\epsilon \min_{r \in \mathcal{R}} (w_r a_r) [\sup_{r \in \mathcal{R}} x_r]^\alpha < C + 1 + \left(\sum_{r \in \mathcal{R}} \beta_r \right) [\sup_{r \in \mathcal{R}} x_r]^{\alpha-1},$$

et donc soit $x = 0$, soit en divisant par $[\sup_{r \in \mathcal{R}} x_r]^{\alpha-1}$, nécessairement

$$\epsilon \min_{r \in \mathcal{R}} (w_r a_r) [\sup_{r \in \mathcal{R}} x_r] \leq C + 1 + \left(\sum_{r \in \mathcal{R}} \beta_r \right),$$

d'où la conclusion d'ergodicité.

Transience: On suppose maintenant $a \notin \mathcal{C}$. Comme l'ensemble \mathcal{C} est convexe et fermé, d'après le théorème de séparation de convexes disjoints (cf par exemple [4], corollaire 2.3 p.22), il existe un vecteur $b \in \mathbb{R}^{\mathcal{R}}$ et un $\delta > 0$ tels que pour tout $x \in \mathcal{C}$, on ait

$$\sum_{r \in \mathcal{R}} b_r a_r \geq \delta + \sum_{r \in \mathcal{R}} b_r x_r.$$

Montrons que ce vecteur b peut être choisi à coordonnées non négatives. En effet, soit $x \in \mathcal{C}$. Le vecteur x' tel que $x'_r = x_r$ si $b_r \geq 0$ et $x'_r = 0$ si $b_r < 0$ est aussi dans \mathcal{C} , par définition de \mathcal{C} . On a donc, puisque $a \geq 0$,

$$\sum_{r \in \mathcal{R}} b_r^+(a_r - x_r) \geq \sum_{r \in \mathcal{R}} b_r(a_r - x'_r) \geq \delta.$$

On suppose donc $\forall r \in \mathcal{R}, b_r \geq 0$. On note

$$F(x) = \sum_{r \in \mathcal{R}} b_r x_r.$$

La dynamique des $X_n(r)$ est telle que

$$X_n(r) \geq X_{n-1}(r) - s_n(r) + A_n(r),$$

d'où

$$F(X_n) \geq F(X_0) + n \sum_{r \in \mathcal{R}} b_r \left[\frac{A_1(r) + \dots + A_n(r)}{n} - \frac{s_1(r) + \dots + s_n(r)}{n} \right].$$

La loi forte des grands nombres garantit que la première fraction dans le membre de droite converge presque sûrement vers a_r , tandis que la seconde fraction est, à une erreur tendant presque sûrement vers 0 près, dans \mathcal{C} . Cela entraîne:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} F(X_n) \geq \delta > 0.$$

Le processus est donc nécessairement transient, puisqu'il ne passe qu'un temps fini en chaque état. \square

4.2 Réseaux multi-bonds: poids maximal et “backpressure”

On part encore de l'existence d'un ensemble fini \mathcal{R} de types de service, et on note $X_n(r)$ le nombre de services de type r en attente après l'instant n . Cependant le traitement d'une tâche de type r peut soit la faire disparaître, soit la transformer en une tâche de type $r' \in \mathcal{R}$, $r' \neq r$. On va noter $s(r, r')$ le nombre de services de tâches r pouvant être traitées en un pas de temps de façon à les transformer en tâches de type r' , avec $r \in \mathcal{R}$, $r' \in \mathcal{R}' := \mathcal{R} \cup \{ext\}$, où ext désigne la complétion de la tâche. On note $\mathcal{S} \subset \mathbb{N}^{\mathcal{R} \times \mathcal{R}'}$ l'ensemble des vecteurs de traitement réalisables.

On suppose qu'il existe $s_{max} < \infty$ qui majore chaque $s(r, r')$ réalisable. On suppose par ailleurs que l'ensemble \mathcal{S} est monotone, i.e. si $s \leq s'$ et $s' \in \mathcal{S}$, alors $s \in \mathcal{S}$.

Enfin on suppose que pendant l'instant n , un nombre $A_n(r)$ de nouvelles requêtes de service de type r apparaissent, les vecteurs A_n étant supposés i.i.d. de moyenne $a = (a_r)_{r \in \mathcal{R}}$.

Notant $X_n(r)$ le nombre de services de type r restants après l'instant n , leur évolution sera alors la suivante: pour le choix d'un vecteur $s_n \in \mathcal{S}$, on aura

$$X_n(r) = X_{n-1}(r) + A_n(r) + \sum_{r' \in \mathcal{R}} D_n(r', r) - \sum_{r' \in \mathcal{R}'} D_n(r, r'),$$

où $D_n(r, r') \in [0, s_n(r, r')]$. On supposera que les $D_n(r, r')$ sont choisis tels que

$$\forall r \in \mathcal{R}, \sum_{r' \in \mathcal{R}'} D_n(r, r') = \min(X_{n-1}(r), \sum_{r' \in \mathcal{R}'} s_n(r, r')).$$

Pour finaliser la spécification de cette politique, on peut par exemple spécifier les $D_n(r, r')$ pour un r fixé séquentiellement en r' , posant

$$D_n(r, r') = \min(s_n(r, r'), X_{n-1}(r) - \sum_{r'' < r'} D_n(r, r'')).$$

Dans ce cadre, la politique dite de poids maximal avec “backpressure” consiste à choisir un vecteur s_n qui réalise le maximum dans

$$\max_{s \in \mathcal{S}} \sum_{r \in \mathcal{R}} \sum_{r' \in \mathcal{R}', r' \neq r} s(r, r') [w_r X_{n-1}(r)^\alpha - w_{r'} X_{n-1}(r')^\alpha].$$

Exemple 4.4. On suppose donné un graphe orienté $G = (V, E)$ avec des capacités entières c_e pour chaque arête $e \in E$. Un ensemble \mathcal{F} de types de trafic $f \in \mathcal{F}$ est donné, et à chaque f correspond un noeud d'entrée $s(f)$ et un noeud destination $d(f)$. N'importe quel chemin du graphe peut être utilisé pour acheminer le trafic de type f depuis son entrée en $s(f)$ dans le réseau vers sa destination $d(f)$.

On peut alors associer à chaque paire $(v, f) \in V \times \mathcal{F}$ telle que $v \neq d(f)$ un type de service r correspondant. A chaque pas de temps il s'agit de déterminer pour chaque arête $e = (v, w)$, quel type de trafic f en attente à v acheminer vers le noeud w ; si on choisit un type f tel que $w = d(f)$ le trafic acheminé atteint alors sa destination. Sinon il est simplement déplacé dans le réseau vers un autre noeud.

Une variante de cet exemple consiste à associer la capacité aux noeuds du graphe plutôt qu'aux arêtes. Dans ce cas il s'agit de choisir pour chaque noeud v de capacité c_v d'une part quel trafic f présent en v transmettre au moyen de cette capacité, et aussi vers quel voisin w le transmettre.

Définition 4.3. La région de capacité est par définition l'ensemble des vecteurs $z_r \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{R}}$ tels que pour un vecteur c dans l'enveloppe convexe de \mathcal{S} on ait

$$\forall r \in \mathcal{R}, z_r + \sum_{r' \in \mathcal{R}, r' \neq r} c(r', r) \leq \sum_{r' \in \mathcal{R}', r' \neq r} c(r, r').$$

Remarque 4.2. Il n'est pas difficile d'étendre le cadre présent au scénario où les ensembles \mathcal{S}_n de vecteurs de transmission réalisables à chaque étape n varient de manière i.i.d.. On pourra s'inspirer de la section précédente (politiques de poids maximal) pour généraliser ce qui est décrit ici (définition de région de stabilité, théorème ci-dessous) à un tel scénario.

Le processus décrit ci-dessus est irréductible sous les conditions suivantes:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_n(r) = 0 \forall r) &> 0, \\ \forall r_0 \in \mathcal{R}, \exists k > 0, r_1, \dots, r_{k-1} \in \mathcal{R}, r_k = ext, s_1, \dots, s_k \in \mathcal{S} : \prod_{i=1}^k s_i(r_{i-1}, r_i) &> 0, \end{aligned} \quad (4.2)$$

et si la politique de choix du vecteur de service est telle qu'avec probabilité positive n'importe quel vecteur $s \in \mathcal{S}$ peut être sélectionné. Cela n'est pas a priori garanti pour les politiques de poids maximal, que l'on pourrait modifier en introduisant un choix probabiliste entre le vecteur de service choisi par cette politique et un autre vecteur de service choisi uniformément au hasard dans \mathcal{S} .

Une condition plus forte garantissant l'irréductibilité sous (4.2) sans modifier la politique de poids maximal consiste à imposer l'existence d'un ordre total \leq sur les types de service r tel que $\exists s \in \mathcal{S} : s(r, r') > 0 \Rightarrow r < r'$.

Enfin, l'irréductibilité peut être vérifiée pour la politique de poids maximal sous (4.2) si l'ensemble \mathcal{S}_n des vecteurs de service disponibles à l'instant n est un sous-ensemble i.i.d. de \mathcal{S} qui avec probabilité positive ne contient que le vecteur s pour tout $s \in \mathcal{S}$.

On a le théorème suivant:

Théorème 4.2. *On suppose l'existence d'un $\epsilon > 0$ tel que $(a_r + \epsilon)_{r \in \mathcal{R}} \in \mathcal{C}$. Pour des poids $w_r > 0$ et un exposant $\alpha > 0$, sous la politique de poids maximal et backpressure (w, α) , supposant $\forall r \in \mathcal{R}, \mathbb{E}(A_n(r)^{1+\alpha}) < \infty$ et l'irréductibilité du processus X_n , alors celui-ci est ergodique.*

Inversement, si $a \notin \mathcal{C}$, alors toute politique rend le processus transient.

Preuve. Ergodicité: On prend comme fonction de Lyapunov

$$V(x) := \sum_{r \in \mathcal{R}} \frac{w_r}{1 + \alpha} x_r^{1+\alpha}.$$

On note

$$h_r = X_n(r) - X_{n-1}(r) = A_n(r) + \sum_{r' \in \mathcal{R}, r' \neq r} D_n(r', r) - \sum_{r' \in \mathcal{R}', r' \neq r} D_n(r, r').$$

Pour tout $x \in \mathbb{N}^{\mathcal{R}}$ on a, d'après le théorème de Rolle (ou la formule de Taylor à l'ordre 1), l'existence de $\theta_r \in (0, 1)$ tels que

$$\mathbb{E}[V(X_n) - V(X_{n-1}) | X_{n-1} = x] = \sum_{r \in \mathcal{R}} \mathbb{E}[w_r (x_r + \theta_r h_r)^\alpha h_r | X_{n-1} = x].$$

On décompose ce terme en une somme $A + B$ avec

$$\begin{aligned} A &= \sum_{r \in \mathcal{R}} \mathbb{E}[w_r x_r^\alpha h_r | X_{n-1} = x], \\ B &= \sum_{r \in \mathcal{R}} \mathbb{E}[w_r \{(x_r + \theta_r h_r)^\alpha - x_r^\alpha\} h_r | X_{n-1} = x]. \end{aligned}$$

Contrôle de A : en utilisant l'expression de h_r , on obtient:

$$\begin{aligned} A &= \sum_{r \in \mathcal{R}} w_r x_r^\alpha a_r - \sum_{r \neq r'} \mathbb{E}[D_n(r, r') (w_r x_r^\alpha - w_{r'} x_{r'}^\alpha) | X_{n-1} = x] \\ &= \sum_{r \in \mathcal{R}} w_r x_r^\alpha a_r - \sum_{r \neq r'} \mathbb{E}[s_n(r, r') (w_r x_r^\alpha - w_{r'} x_{r'}^\alpha) | X_{n-1} = x] \\ &\quad + \sum_{r \neq r'} \mathbb{E}[\{s_n(r, r') - D_n(r, r')\} (w_r x_r^\alpha - w_{r'} x_{r'}^\alpha) | X_{n-1} = x]. \end{aligned}$$

Notant $A = A_1 - A_2 + A_3$ cette dernière décomposition, la politique de poids maximal choisit s_n qui maximise A_2 , lequel s'écrit encore

$$\sum_{r \in \mathcal{R}} \mathbb{E}[w_r x_r^\alpha \sum_{r' \neq r} (s_n(r', r) - s_n(r', r)) | X_{n-1} = x].$$

D'après la condition $(a_r + \epsilon)_{r \in \mathcal{R}} \in \mathcal{C}$, comme le maximum d'une fonction linéaire est réalisé en un point extrême d'un ensemble convexe, on a nécessairement:

$$\sum_r w_r x_r^\alpha \sum_{r' \neq r} (s_n(r', r) - s_n(r', r)) \geq \sum_r w_r x_r^\alpha (a_r + \epsilon) = A_1 + \epsilon \sum_{r \in \mathcal{R}} w_r x_r^\alpha.$$

Par ailleurs, puisque $D_n(r, r') \leq s_n(r, r')$, et on ne peut avoir inégalité stricte $D_n(r, r') < s_n(r, r')$ que si $X_{n-1}(r) < |\mathcal{R}| c_{max}$, on a:

$$A_3 \leq \sum_r c_{max} w_r [|\mathcal{R}| c_{max}]^\alpha,$$

soit une constante C indépendante de x . Au final,

$$A \leq -\epsilon \sum_{r \in \mathcal{R}} w_r x_r^\alpha + C,$$

Contrôle de B : On distingue deux cas. Si $\alpha \leq 1$, on a

$$|(x_r + \theta_r h_r)^\alpha - x_r^\alpha| \leq |\theta_r h_r|^\alpha \leq |h_r|^\alpha,$$

et donc

$$B \leq \sum_r w_r \mathbb{E}[|h_r|^{1+\alpha} | X_{n-1} = x] \leq \sum_r w_r \mathbb{E}[2^{1+\alpha} (A_n(r))^{1+\alpha} + (2|\mathcal{R}|c_{max})^{1+\alpha} | X_{n-1} = x].$$

On a alors $B \leq C$ pour une constante indépendante de x .

Si $\alpha > 1$, on a, invoquant encore le théorème de Rolle (ou la formule de Taylor à l'ordre 1), l'existence de $\theta'_r \in (0, 1)$ tel que:

$$\begin{aligned} |(x_r + \theta_r h_r)^\alpha - x_r^\alpha| &\leq |(x_r + |h_r|)^\alpha - x_r^\alpha| \\ &\leq \alpha (x_r + \theta'_r |h_r|)^{\alpha-1} |h_r| \\ &\leq \alpha 2^{\alpha-1} (x_r^{\alpha-1} + |h_r|^{\alpha-1}) |h_r|. \end{aligned}$$

On en déduit

$$B \leq \alpha 2^{\alpha-1} \sum_{r \in \mathcal{R}} w_r \mathbb{E}[x_r^{\alpha-1} |h_r|^2 + |h_r|^{\alpha+1} | X_{n-1} = x].$$

Utilisant $|h_r|^c \leq 2^c (A_n(r))^c + (2|\mathcal{R}|c_{max})^c$ pour $c = 2$, $c = 1 + \alpha$, ainsi que l'hypothèse $\mathbb{E}(A_n(r)^{1+\alpha}) < \infty$, on en déduit que pour deux constantes C_1, C_2 , on a

$$B \leq C_1 (\sup_r x_r)^{\alpha-1} + C_2.$$

On vérifie alors comme dans la preuve du précédent théorème que le critère de Lyapunov-Foster s'applique.

Transience: On suppose que $a \notin \mathcal{C}$. D'après le théorème de séparation il existe donc $b \in \mathbb{R}^{\mathcal{R}}$ et $\delta > 0$ tels que pour tout $z \in \mathcal{C}$, $\sum_{r \in \mathcal{R}} a_r b_r \geq \delta + \sum_{r \in \mathcal{R}} z_r b_r$. En utilisant comme dans la preuve du théorème précédent la monotonie de \mathcal{C} on peut choisir b à coordonnées non-négatives.

Notons $V(x) := \sum_{r \in \mathcal{R}} b_r x_r$. Pour une condition initiale X_0 , et pour un $n > 0$ arbitraire, on a

$$X_n(r) = X_0(r) + \sum_{m=1}^n A_m(r) + \sum_{m=1}^n \sum_{r'} D_m(r', r) - D_m(r, r').$$

Notant $z_n(r) := -(1/n) \sum_{m=1}^n \sum_{r'} D_m(r', r) - D_m(r, r')$, on distingue deux cas.

Premier cas: Il existe r tel que $z_n(r) < 0$. Alors on a $X_n(r) \geq \sum_{m=1}^n A_m(r)$.

Deuxième cas: Pour tout r , $z_n(r) \geq 0$. Alors par définition $z_n \in \mathcal{C}$. Le résultat de séparation implique alors:

$$V(X_n) \geq n \left[\delta + \sum_r b_r \left[\frac{1}{n} \left(\sum_{m=1}^n A_m(r) \right) - a_r \right] \right].$$

En combinant ces deux cas, on a donc:

$$\max_{r \in \mathcal{R}} (X_n(r)) \geq n \min \left(\min_r \frac{1}{n} \left(\sum_{m=1}^n A_m(r) \right), \frac{1}{\sum_r b_r} \left[\delta + \sum_r b_r \left[\frac{1}{n} \left(\sum_{m=1}^n A_m(r) \right) - a_r \right] \right] \right).$$

La loi des grands nombres permet de conclure que $\max_r X_n(r)$ tend vers $+\infty$ presque sûrement, et donc le processus est transient. \square

Chapitre 5

Contrôle de débits en réseau

Dans ce chapitre on considère un ensemble fixe \mathcal{S} (fini) d'utilisateurs, ou transmissions, ou flux, indicés par $s \in \mathcal{S}$, en compétition pour les ressources $\ell \in \mathcal{L}$ d'un réseau, l'ensemble \mathcal{L} étant lui aussi supposé fini. C_ℓ désigne la capacité de la ressource ℓ .

A chaque flux s on associe un ensemble $\mathcal{L}_s \subset \mathcal{L}$ de ressources. On fait l'hypothèse que le flux requiert la même capacité x_s de chaque ressource $\ell \in \mathcal{L}_s$.

Notant $A_{s\ell} = \mathbf{1}_{\ell \in \mathcal{L}_s}$, une allocation de capacités $\{x_s\}_{s \in \mathcal{S}} \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{S}}$ est donc faisable si et seulement si:

$$\sum_{s \in \mathcal{S}} A_{s\ell} x_s \leq C_\ell, \ell \in \mathcal{L}. \quad (5.1)$$

On notera \mathcal{C} le sous-ensemble de $\mathbb{R}_+^{\mathcal{S}}$ de vecteurs x vérifiant ces contraintes.

Ce cadre permet de modéliser les situations suivantes:

Partage de la “bande passante” dans l'Internet: Ici, chaque flux correspond à une transmission de données le long d'un chemin physique du réseau d'un serveur vers un terminal. La capacité x_s correspond au nombre d'octets par unité de temps transférée depuis le serveur jusqu'au terminal. Cette quantité x_s est donc une idéalisation: en réalité l'information est paquetisée, et les paquets sont transmis séquentiellement à des instants discrets le long de chaque lien du chemin.

Transmission “multicast” dans l'Internet: Les liens $\ell \in \mathcal{L}_s$ forment un arbre avec la source de transmission pour racine et les récepteurs pour feuilles.

Contrôle d'allocation de bande passante et de CPU dans le “cloud computing”: Une extension simple de ce modèle peut être proposée pour refléter l'allocation de ressources en “cloud computing”. Dans ce contexte, à chaque usager $s \in \mathcal{S}$ correspond le “calcul” d'un contenu (par exemple la compression d'un document à un nouveau format) et l'acheminement le long de liens du réseau du contenu ainsi synthétisé depuis le serveur vers le client. En séparant l'ensemble des ressources \mathcal{L} en les liens \mathcal{L}' et les serveurs \mathcal{L}'' , les capacités C_ℓ sont donc en bits/s pour $\ell \in \mathcal{L}'$ et en cycles CPU pour $\ell \in \mathcal{L}''$. Supposons que pour le transfert $s \in \mathcal{S}$, il faut $\alpha_{s\ell}$ cycles de CPU auprès de chaque serveur $\ell(s) \in \mathcal{L}''_s$ pour synthétiser un bit, qui devra ensuite être transmis le long des liens $\ell' \in \mathcal{L}'(s)$. Les contraintes de capacité sur les débits x_s auxquels chaque usager s peut recevoir du contenu prennent encore la forme (5.1), avec $A_{s\ell} = \mathbf{1}_{\ell \in \mathcal{L}'(s)} + \alpha_{s\ell} \mathbf{1}_{\ell \in \mathcal{L}''(s)}$.

5.1 Principes d'allocation de ressources

L'équité au sens max-min

Une allocation $\{x_s\}_{s \in \mathcal{S}}$ est dite max-min équitable si elle est faisable, et pour chaque usager $s \in \mathcal{S}$, il existe un lien ℓ utilisé par s tel que x_s est le maximum des débits alloués aux usagers s' utilisant ℓ , et de plus ce lien ℓ est saturé. En équations:

$$\forall s \in \mathcal{S}, \exists \ell \in \mathcal{L}_s : x_s = \max\{x_{s'}, \mathcal{L}_{s'} \ni \ell\} \& \sum_{s' \in \mathcal{S}} A_{s\ell} x_{s'} = C_\ell. \quad (5.2)$$

De manière équivalente, l'allocation $\{x_s\}_{s \in \mathcal{S}}$ est max-min équitable si et seulement si elle est faisable, et pour toute autre allocation faisable $\{y_s\}_{s \in \mathcal{S}}$, si il existe $s \in \mathcal{S}$ tel que $y_s > x_s$, alors il existe $s' \in \mathcal{S}$ tel que $y_{s'} < x_{s'} \leq x_s$. En d'autres termes, c'est l'allocation faisable qui maximise le plus petit des débits alloués, et qui parmi de telles allocations maximise le second plus petit débit obtenu, et ainsi de suite.

Exercice 5.1. *Prouver l'existence et l'unicité de l'allocation max-min équitable. Indice: déterminer cette allocation en suivant une procédure de remplissage (water-filling en anglais) par étapes: augmenter graduellement à la même vitesse le débit de chaque usager jusqu'à saturation d'un lien (on obtient une première allocation de $\min_{\ell \in \mathcal{L}} C_\ell/n_\ell$, n_ℓ désignant le nombre d'usagers utilisant ℓ). Geler l'allocation des usagers traversant un lien saturé, et continuer l'augmentation graduelle pour tous les usagers qui ne traversent pas encore de lien saturé, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'allocation de chaque usager soit gelée.*

L'équité proportionnelle

Une variante de ce principe d'équité a été proposée par Frank Kelly [9]. L'allocation $\{x_s\}_{s \in \mathcal{S}}$ est dite proportionnellement équitable si elle est faisable, et si pour chaque allocation faisable alternative $\{y_s\}_{s \in \mathcal{S}}$, la somme sur s des variations relatives $(y_s - x_s)/x_s$ est non positive:

$$\forall y \in \mathcal{C}, \sum_{s \in \mathcal{S}} \frac{y_s - x_s}{x_s} \leq 0. \quad (5.3)$$

Une caractérisation alternative de l'équité proportionnelle permet d'établir directement son unicité:

Proposition 5.1. *L'allocation proportionnellement équitable dans \mathcal{C} réalise le maximum du problème d'optimisation suivant:*

$$\text{Max} \quad \sum_{s \in \mathcal{S}} \ln(x_s) \quad (5.4)$$

$$\text{sur} \quad x \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{S}} \quad (5.5)$$

$$\text{tel que} \quad x \in \mathcal{C}. \quad (5.6)$$

Preuve. Soit x une allocation proportionnellement équitable, qu'on suppose donc exister. Soit $y \in \mathcal{C}$ une autre allocation faisable. Définissant pour $t \in [0, 1]$, $f(t) = \sum_{s \in \mathcal{S}} \ln(ty_s + (1-t)x_s)$, le vecteur $tx + (1-t)y$ appartient bien à \mathcal{C} car \mathcal{C} est un ensemble convexe. La fonction log est concave, donc f est concave. Par ailleurs sa dérivée en $t = 0$ vaut

$$\sum_{s \in \mathcal{S}} \frac{y_s - x_s}{x_s},$$

et est donc négative ou nulle par définition de l'équité proportionnelle. Une fonction concave est en-dessous de sa tangente, et donc

$$\sum_{s \in \mathcal{S}} \ln(y_s) - \ln(x_s) = f(1) - f(0) \leq (1 - 0)f'(0) \leq 0.$$

Ceci établit que x est une solution de (5.4).

Réciproquement, une solution de (5.4) existe, et est unique car la fonction à maximiser étant strictement concave, son maximum sur un ensemble convexe est nécessairement atteint en un point unique. Le raisonnement précédent implique que ce maximiseur x est bien proportionnellement équitable. \square

Caractérisation alternative de l'équité proportionnelle

Une des premières contributions de John Nash [12] à la théorie des jeux a consisté à proposer une approche axiomatique pour caractériser le résultat d'une négociation, ou marchandage, entre plusieurs agents (en anglais: Nash's bargaining solution. Voir aussi [10]).

Le cadre proposé par Nash est le suivant. Pour un ensemble \mathcal{S} d'agents $s \in \mathcal{S}$, si ceux-ci ne coopèrent pas ils obtiennent chacun un bien-être (welfare) $x_s^0 \in \mathbb{R}$; ils peuvent cependant coopérer et s'accorder pour obtenir un vecteur x de bien-être appartenant à l'ensemble $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^{\mathcal{S}}$. L'ensemble \mathcal{C} est supposé convexe, et tel qu'il existe $x \in \mathcal{C}$ avec $x \geq x^0$. Notant $\phi(\mathcal{C}, x^0)$ une allocation obtenue par négociation, les axiomes proposés par Nash sont les suivants:

1. Invariance par changement d'échelle: pour tous poids $\lambda_s > 0$, $\mu_s \in \mathbb{R}$, notant $y_s^0 = \lambda_s x_s^0 + \mu_s$ et

$$\mathcal{C}' = \{(\lambda_s x_s + \mu_s)_{s \in \mathcal{S}}, x \in \mathcal{C}\}$$

$$\text{alors } \phi(\mathcal{C}', y^0) = (\lambda_s \phi(\mathcal{C}, x^0)_s + \mu_s)_{s \in \mathcal{S}}.$$

2. Efficacité au sens de Pareto: $\phi(\mathcal{C}, x^0) \geq x^0$ et, s'il existe une allocation $x \in \mathcal{C}$ telle que $x \geq \phi(\mathcal{C}, x^0)$, alors $\phi(\mathcal{C}, x^0) = x$.
3. Symétrie: si la région \mathcal{C} et le vecteur x^0 sont symétriques (invariants par n'importe quelle permutation des indices $s \in \mathcal{S}$), alors les allocations $\phi(\mathcal{C}, x^0)_s$ sont identiques pour tout $s \in \mathcal{S}$.
4. Indépendance par rapport aux alternatives superflues: si on restreint la région \mathcal{C} à un sous-ensemble $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ qui contient $\phi(\mathcal{C}, x^0)$, alors $\phi(\mathcal{C}', x^0) = \phi(\mathcal{C}, x^0)$.

Le résultat établi par Nash (initialement pour deux agents, mais valide pour un nombre arbitraire d'agents) est le suivant: une allocation x satisfaisant ces axiomes réalise le maximum de $\prod_{s \in \mathcal{S}} (x_s - x_s^0)$ sur les vecteurs $x \in \mathcal{C}$ tels que $x \geq x^0$. Preuve: exercice.

Généralisation: fonctions d'utilité et cadre micro-économique

On suppose désormais qu'une fonction $U_s : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ est associée à chaque usager $s \in \mathcal{S}$, et que l'*utilité*, ou bien-être, que l'usager s retire d'une allocation x_s est $U_s(x_s)$.

L'objectif qu'on adopte maintenant, conformément à l'usage en micro-économie, consiste en la maximisation du bien-être total cumulé, défini comme la somme des utilités individuelles:

$$\text{Maximiser } \sum_{s \in \mathcal{S}} U_s(x_s) \tag{5.7}$$

$$\text{sur } x \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{S}} \tag{5.8}$$

$$\text{tel que } x \in \mathcal{C}. \tag{5.9}$$

Le terme “Maximisation de l’utilité du réseau” (Network Utility Maximisation) est parfois utilisé pour décrire ce principe d’allocation.

L’équité proportionnelle est un cas particulier: il correspond au choix de fonctions d’utilité toutes identiques, $U_s(x) = \ln(x)$.

Un autre exemple d’intérêt consiste à prendre

$$U_s(x) = w_s \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}, \quad x > 0 \quad (5.10)$$

où $w_s > 0$ est un poids positif, et $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$ est un paramètre commun à toutes les fonctions d’utilité U_s .

Définition 5.1. *L’allocation réalisant le maximum dans (5.7) pour le choix des fonctions d’utilité (5.10) est par définition l’allocation α -équitable pondérée par les poids w_s .*

5.2 Contrôle distribué: un algorithme “primal”

Nous considérons maintenant une version relaxée des contraintes strictes (5.1): nous supposons que l’utilisation de chaque lien $\ell \in \mathcal{L}$ à un débit y_ℓ induit un coût $C_\ell(y_\ell)$, où la fonction C_ℓ est supposée croissante, continument dérivable et convexe. On notera $p_\ell(y_\ell) = C'_\ell(y_\ell)$. Il s’agit donc d’une fonction continue et croissante d’après l’hypothèse de convexité de la fonction C_ℓ .

L’objectif naturel d’optimisation dans ce contexte est alors le suivant:

$$\text{Maximiser } \sum_{s \in \mathcal{S}} U_s(x_s) - \sum_{\ell \in \mathcal{L}} C_\ell(y_\ell) \quad (5.11)$$

$$\text{sur } x \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{S}} \quad (5.12)$$

$$\text{avec } \forall \ell \in \mathcal{L}, y_\ell = \sum_{s \in \mathcal{S}} A_{s\ell} x_s. \quad (5.13)$$

On considère alors l’algorithme “primal” suivant pour le contrôle des débits x_s (la dépendance des x_s et des y_ℓ par rapport au temps n’est pas explicitée pour alléger les notations):

$$\frac{d}{dt} x_s = \kappa_s(x_s) \left(U'_s(x_s) - \sum_{\ell} A_{s\ell} p_\ell(y_\ell) \right). \quad (5.14)$$

Dans cette équation, le facteur $\kappa_s(x_s)$ est une fonction continue à valeurs positives et module la vitesse d’adaptation de x_s ; cette quantité ne dépend que de x_s et peut donc être calculée par la source de trafic s . Il en va de même pour la quantité $U'_s(x_s)$. L’adaptation du débit x_s selon (5.14) est donc implémentable par la source de trafic x_s dès lors que la quantité $\sum_{\ell} A_{s\ell} p_\ell(y_\ell)$ lui est connue.

Interprétations possibles: le “prix” $p_\ell(y_\ell)$ peut être interprété comme le délai d’attente des paquets de données au lien ℓ . La somme $\sum_{\ell} A_{s\ell} p_\ell(y_\ell)$ s’interprète alors comme le délai total de transmission de paquets le long de la route entre la source de s et sa destination. Dans le cas de transferts de données sur Internet, le protocole de transmission TCP impose l’envoi d’un accusé de réception par la destination à la source lors de l’arrivée d’un paquet. Le délai à la source entre l’envoi d’un paquet et le retour de l’accusé de réception correspondant fournit ainsi une estimation de ce délai agrégé le long du chemin.

Alternativement, le prix $p_\ell(y_\ell)$ peut représenter la fraction de paquets rejetés à l’accès du lien ℓ . On en obtient de manière heuristique la fraction de paquets perdus au total pour la source s comme $1 - \prod_{\ell: A_{s\ell}=1} (1 - p_\ell(y_\ell))$. Pour de petites valeurs des p_ℓ ce dernier terme est approximativement $\sum_{\ell \in \mathcal{L}} A_{s\ell} p_\ell$.

Stabilité par la méthode de Lyapunov

Pour établir la convergence de l'algorithme primal décrit précédemment, on aura recours au résultat suivant.

Théorème 5.1. *Etant donné un ensemble $O \subset \mathbb{R}^n$ et une fonction continue $F : O \rightarrow \mathbb{R}^n$, soit $(x(t))_{t>0}$ une solution de l'équation différentielle $\dot{x} = F(x)$, supposée rester dans O pour tout $t > 0$.*

Soit une fonction $V : O \rightarrow \mathbb{R}$, supposée continument dérivable et telle que pour tous $a, A \in \mathbb{R}$, $a \leq A$, les ensembles $\{x \in O : V(x) \leq A\}$ et $\{x \in O : V(x) \in [a, A]\}$ sont compacts ou vides.

Notant $B = \operatorname{argmin}\{V(x); x \in O\}$ l'ensemble des points qui réalisent le minimum V^ de V sur O , on suppose que*

$$\forall x \in O \setminus B, \nabla V(x) \cdot F(x) < 0. \quad (5.15)$$

Alors on a:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t)) = V^* \text{ et } \lim_{t \rightarrow \infty} d(x(t), B) = 0.$$

En particulier si B est réduit à un point x^* , on a $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^*$.

La fonction V dans cet énoncé est dite fonction de Lyapunov.

Preuve. Notons que

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) = \nabla V(x(t)) \cdot F(x(t)).$$

D'après (5.15), on a décroissance de $V(x(t))$. La trajectoire $t \rightarrow x(t)$ est donc confinée à l'ensemble $\{x : V(x) \leq V(x(0))\}$, qu'on a supposé compact.

Pour un $\epsilon > 0$ donné, et un t tel que $V(x(t)) \geq V^* + \epsilon$, on a:

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) \leq \sup_{x \in O: V(x) \in [V^* + \epsilon, V(x(0))]} \nabla V(x) \cdot F(x).$$

L'ensemble $\{x \in O : V(x) \in [V^* + \epsilon, V(x(0))]\}$ est par hypothèse compact. La fonction dans le membre de droite est continue d'après les hypothèses sur F et V et y atteint donc son maximum. Celui-ci est donc strictement négatif, d'après l'hypothèse (5.15). Cela implique qu'il existe $T(\epsilon)$ tel que pour $t \geq T(\epsilon)$, $V(x(t)) \leq V^* + \epsilon$. La convergence de $V(x(t))$ vers V^* en découle. Par ailleurs de toute sous-suite de $x(t)$ on peut extraire un sous-suite convergente, et nécessairement celle-ci converge vers un point de B , ce qui établit la convergence de $d(x(t), B)$ vers 0. \square

Pour garantir que le problème (5.11) admet un optimum fini, il est aisé de vérifier que l'hypothèse suivante suffit:

$$\forall s \in \mathcal{S}, \exists \bar{x}_s \text{ tel que } U'_s(\bar{x}_s) < \sum_{\ell \in \mathcal{L}} A_{s\ell} p_\ell(\bar{x}_s). \quad (5.16)$$

Nous faisons de plus l'hypothèse

$$\forall s \in \mathcal{S}, U_s \text{ strictement concave, continument dérivable sur } (0, \infty), \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} U'_s(x) = +\infty. \quad (5.17)$$

Nous avons alors le

Théorème 5.2. *Pour des fonctions de gain κ_s continues à valeurs strictement positives, des fonctions d'utilité U_s strictement concaves et vérifiant (5.16)–(5.17), des fonctions de coût C_ℓ convexes et continument dérivables sur \mathbb{R}_+ , toute solution de l'équation différentielle (5.14) converge vers l'unique solution dans $\mathbb{R}_+^{\mathcal{S}}$ du problème d'optimisation (5.11).*

Preuve. On note

$$W(x) = \sum_{s \in \mathcal{S}} U_s(x_s) - \sum_{\ell \in \mathcal{L}} C_\ell(y_\ell)$$

la fonction à optimiser dans (5.11), et on pose $V = -W$.

La dérivée temporelle de $V(x(t))$ s'écrit d'après (5.14):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(x) &= - \sum_{s \in \mathcal{S}} \frac{d}{dt} x_s [U'_s(x_s) - \sum_{\ell \in \mathcal{L}} A_{s\ell} C'_\ell(y_\ell)] \\ &= - \sum_{s \in \mathcal{S}} \kappa_s(x_s) [U'_s(x_s) - \sum_{\ell \in \mathcal{L}} A_{s\ell} p_\ell(y_\ell)]^2. \end{aligned}$$

Cette dérivée est donc strictement négative sauf en un point x auquel on a

$$\forall s \in \mathcal{S}, U'_s(x_s) = \sum_{\ell \in \mathcal{L}} A_{s\ell} p_\ell(y_\ell).$$

En un tel point la fonction W a un gradient nul, et atteint donc son maximum car elle est concave. Ce maximum est unique sous l'hypothèse de stricte concavité des U_s , qui implique la stricte concavité de W .

Il ne nous reste plus qu'à vérifier les hypothèses de compacité requises pour conclure en invoquant le théorème précédent. Pour cela, on remarque que d'après (5.16), pour chaque s la valeur de $x_s(t)$ n'excédera jamais $\max(x_s(0), \bar{x}_s)$ puisque $x_s(t)$ décroît au-delà de ce seuil. La trajectoire $\{x(t)\}_{t \geq 0}$ reste nécessairement dans un compact de $\mathbb{R}_+^{\mathcal{S}}$, soit K .

La condition $\bar{U}'_s(0^+) = +\infty$ et le caractère continument différentiable de C_ℓ garantissent l'existence d'un $\epsilon > 0$ tel que pour tous $s \in \mathcal{S}$, $t \geq \epsilon$, on ait $x_s(t) \geq \epsilon > 0$. Considérant alors pour ensemble O le compact $K \cap [\epsilon, +\infty)^{\mathcal{S}}$, les ensembles $\{x \in O : V(x) \leq A\}$ et $\{x \in O : V(x) \in [a, A]\}$ sont d'après la continuité de V des intersections de compacts et de fermés, donc des compacts. \square

Remarque 5.1. *On pourrait préciser des conditions d'existence et d'unicité de solutions des équations différentielles $\dot{x} = F(x)$ considérées. Par exemple, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, il suffit que la fonction F soit Lipschitzienne. Des conditions plus faibles sont possibles, et s'avèrent nécessaires pour traiter du cas de l'algorithme dual; cf sections 5.4 et 5.6.*

5.3 Interprétation du protocole TCP: fonctions d'utilité implicites

Le protocole TCP (Transport Control Protocol) régule les transmissions de paquets de données sur Internet, notamment pour tout transfert de pages Web (impliquant alors le protocole HTTP) ou tout transfert de fichiers au moyen du protocole FTP.

Ici nous nous contentons d'une description schématique et partielle de ce protocole (en particulier on ignore la phase initiale dite de "slow start" et on se concentre sur la phase dite de "congestion avoidance"), notre but étant de modéliser son opération en termes d'un algorithme primal tel que précédemment introduit.

Le protocole TCP régule l'envoi de paquets depuis l'expéditeur au moyen d'une "fenêtre de congestion", $cwnd$, qui détermine le nombre de paquets pouvant être transmis avant d'avoir reçu l'accusé de réception correspondant par le destinataire. Le mécanisme adopté par l'expéditeur est le suivant. A l'arrivée d'un accusé de réception, la fenêtre de congestion est augmentée d'une quantité $1/cwnd$. Par ailleurs lorsqu'un paquet est perdu en route (ce que l'expéditeur infère d'après l'absence d'accusés de réception correspondants), la fenêtre de congestion est divisée par 2.

5.3. INTERPRÉTATION DU PROTOCOLE TCP: FONCTIONS D'UTILITÉ IMPLICITES 41

Pour préciser notre modèle, nous introduisons un paramètre supplémentaire, le temps de délai aller-retour (RTT pour Round Trip Time) entre l'expédition d'un paquet et la réception de l'accusé de réception correspondant.

Nous considérons à nouveau un ensemble \mathcal{S} de transferts s , chacun ayant un RTT, T_s , supposé fixe, associé. On adopte un modèle fluide de l'envoi des paquets, x_s désignant le débit d'envoi de ces paquets. L'identification $x_s = cwnd_s/T_s$ est aussi faite. Enfin on suppose que le taux d'arrivée d'accusés de réception est donné par x_s , alors que le taux de pertes de paquets est donné par $x_s \sum_{\ell} A_{s\ell} p_{\ell}$, où p_{ℓ} est le taux de perte au lien ℓ , supposé fonction de la charge totale $y_{\ell} := \sum_s A_{\ell s} x_s$: $p_{\ell} = C'_{\ell}(y_{\ell})$, où C_{ℓ} est une fonction de coût, et C'_{ℓ} sa dérivée.

Au final notre modèle est le suivant:

$$\frac{d}{dt} cwnd_s = T_s \frac{d}{dt} x_s = x_s \frac{1}{cwnd_s} - x_s \left(\sum_{\ell} A_{s\ell} p_{\ell} \right) cwnd_s / 2,$$

le premier terme correspondant au taux d'accroissement de la fenêtre, et le second à son taux de réduction. Il vient donc

$$\frac{d}{dt} x_s = T_s^{-2} - \frac{1}{2} x_s^2 \sum_{\ell} A_{s\ell} p_{\ell} = \frac{x_s^2}{2} \left[\frac{2}{(x_s T_s)^2} - \sum_{\ell} A_{s\ell} p_{\ell} \right]. \quad (5.18)$$

Cette dernière expression est de la forme (5.14) avec comme fonction de gain $\kappa_s(x) = x_s^2/2$ et une fonction d'utilité U_s vérifiant $U'_s(x_s) = \frac{2}{(x_s T_s)^2}$. Cela est compatible avec le choix $U_s(x_s) = w_s x_s^{1-\alpha} / (1-\alpha)$ pour $w_s = 2/T_s^2$ et $\alpha = 2$. On peut ainsi interpréter le protocole TCP comme réalisant implicitement une maximisation d'utilité, et allouant les débits selon un critère de 2-équité pondérée par des poids $w_s = 2/T_s^2$.

Remarque 5.2. Le débit d'équilibre correspondant x_s^* est, en notant $p(s) = \sum_{\ell} A_{s\ell} p_{\ell}$ le taux de perte sur le chemin de l'utilisateur s , donné par

$$x_s^* = \frac{\sqrt{2}}{T_s \sqrt{p(s)}}.$$

Cette dépendance du débit en $1/T_s$ et en $1/\sqrt{p(s)}$ est vérifiée en pratique, et peut aussi être retrouvée via une modélisation plus précise du protocole TCP.

Cette dépendance forte du débit réalisé sur le RTT T_s peut éventuellement être problématique: le débit obtenu depuis un serveur lointain via une fibre optique largement surdimensionnée peut s'avérer plus faible que le débit obtenu depuis un serveur proche via un lien de faible capacité; un choix systématique du serveur pour lequel le débit réalisé par TCP est le plus grand peut conduire à une utilisation inefficace des ressources disponibles.

Remarque 5.3. L'analyse heuristique de TCP ci-dessus et les modèles d'algorithmes primal précédents peuvent guider la conception de nouveaux algorithmes. Ainsi, si on recherche une allocation d'équilibre proportionnellement équitable, i.e. une fonction d'utilité $U_s(x_s) = \log(x_s)$, on vise alors à l'équilibre $1/x_s = p(s)$. Pour obtenir cela on peut par exemple remplacer l'adaptation $cwnd_s \leftarrow cwnd_s/2$ lors de la détection de pertes par $cwnd_s \leftarrow cwnd_s - 1/T_s$.

Remarque 5.4. Une variante de l'analyse ci-dessus consiste à remplacer le premier terme $x_s/cwnd_s$ dans l'expression de la dérivée de $cwnd_s$ par $x_s(1-p(s))/cwnd_s$, arguant que seuls les paquets non perdus induisent un accusé de réception. L'analyse donne alors, posant $\kappa_s(x) = T_s^{-2} + x_s^2/2$:

$$\frac{d}{dt} x_s = \kappa_s(x) \left[\frac{1}{1 + (x_s T_s)^2 / 2} - p(s) \right].$$

Cette modification mineure du modèle conduit alors à identifier comme nouvelle fonction d'utilité

$$U_s(x_s) = \frac{\sqrt{2}}{T_s} \operatorname{Arctan}(T_s x_s / \sqrt{2}).$$

5.4 Dynamiques de gradient: existence et unicité

On considère une fonction F sur \mathbb{R}_+^d et des fonctions $\kappa_i : \mathbb{R}_+^d \rightarrow (0, \infty)$. On dit par abus de langage que la fonction x satisfait l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt} x_i = \kappa_i(x) [-\partial_i F(x)]_{x_i}^+ \quad (5.19)$$

si la fonction satisfait pour tout t l'équation intégrale

$$x_i(t) = x_i(0) + \int_0^t \kappa_i(x(u)) [-\partial_i F(x(u))]_{x_i(u)}^+ du, \quad (5.20)$$

où

$$[a]_b^+ = \begin{cases} a & \text{si } b > 0, \\ \max(0, a) & \text{si } b = 0, \end{cases}$$

et si de plus l'intégrale $\int_0^t \left| \kappa_i(x(u)) [-\partial_i F(x(u))]_{x_i(u)}^+ \right| du$ est finie (on dit alors que la fonction $x_i(t)$ est absolument continue).

Le membre de droite de (5.19) est potentiellement discontinu en x , ce qui rend le théorème de Cauchy-Lipschitz inapplicable. Pour autant on a:

Théorème 5.3. *Soit une fonction $F : \mathbb{R}_+^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ convexe, continument différentiable sur chaque ensemble $\{x : F(x) \leq A\}$ pour tout $A \in \mathbb{R}$. On suppose chacun de ces ensembles compact. Soient des fonctions $\kappa_i : \mathbb{R}_+^d \rightarrow (0, \infty)$, supposées minorées au-dessus de 0, continument dérivables de dérivées uniformément bornées.*

Alors l'équation (5.19) admet une unique solution pour chaque condition initiale $x(0) \in \mathbb{R}_+^d$.

De plus la valeur $F(x(t))$ décroît avec t vers F^ , la valeur minimale de F sur \mathbb{R}_+^d . Si la fonction F admet un unique minimiseur x^* sur \mathbb{R}_+^d , alors $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^*$.*

La preuve du théorème 5.3 est donnée en annexe. Elle fait appel à certains outils d'analyse fonctionnelle qui seront cités sans preuve et ne seront pas utilisés par la suite.

Remarque 5.5. *Le théorème précédent montre comment le calcul différentiel "intuitif" peut trouver un cadre rigoureux pour une dynamique de descente de gradient lorsqu'on cherche à minimiser une fonction convexe régulière sur \mathbb{R}_+^d . Par ailleurs la construction discrète utilisée pour prouver l'existence donne un schéma itératif qui pourrait être implémenté au moins approximativement de manière distribuée.*

5.5 Lagrangien, dualité et multiplicateurs de Lagrange

On considère le problème d'optimisation

$$\text{Minimiser} \quad J(x) \quad (5.21)$$

$$\text{sur} \quad x \in \mathcal{C}^0 \quad (5.22)$$

$$\text{tel que} \quad \forall \ell \in \mathcal{L}, f_\ell(x) \leq 0 \quad (5.23)$$

pour un ensemble convexe $\mathcal{C}^0 \subset \mathbb{R}^S$, et des fonctions J, f_ℓ convexes et différentiables sur \mathcal{C}^0 .

On définit le Lagrangien de ce problème comme la fonction

$$L(x, \lambda) = J(x) + \sum_{\ell \in \mathcal{L}} \lambda_\ell f_\ell(x), \quad x \in \mathcal{C}^0, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{L}}. \quad (5.24)$$

Les poids non-négatifs λ_ℓ ci-dessus sont appelés multiplicateurs de Lagrange associés à la contrainte correspondante $f_\ell(x) \leq 0$ dans (5.21).

On définit le problème dual suivant associé à (5.21):

$$\text{Maximiser} \quad D(\lambda) \quad (5.25)$$

$$\text{sur} \quad \lambda \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{L}}, \quad (5.26)$$

où par définition

$$D(\lambda) := \inf_{x \in \mathcal{C}^0} L(x, \lambda). \quad (5.27)$$

Pour tout x solution faisable (i.e., satisfaisant (5.22)–(5.23)) de (5.21)–(5.23), et tout $\lambda \geq 0$, on a

$$L(x, \lambda) \leq J(x) \quad (5.28)$$

et donc, notant J^* et D^* les valeurs optimales de (5.21) et (5.25) respectivement, il vient $D^* \leq J^*$.

Définition 5.2. Un vecteur $\lambda^* \geq 0$ est dit de Kuhn-Tucker si pour tout $x \in \mathcal{C}^0$ on a

$$L(x, \lambda^*) \geq J^*. \quad (5.29)$$

Le théorème suivant est une version particulière du théorème de Kuhn-Tucker; pour un traitement plus en profondeur, consulter par exemple [15].

Théorème 5.4. Supposons qu'il existe un vecteur de Kuhn-Tucker λ^* . Alors

(i) λ^* est solution optimale du problème dual et $D^* = J^*$.

(ii) Un point x^* qui réalise le minimum dans (5.21) réalise le minimum de $L(x, \lambda^*)$ sur $x \in \mathcal{C}^0$.

(iii) Pour un vecteur $x^* \in \text{int}(\mathcal{C}^0)$ solution optimale de (5.21), auquel les fonctions J, f_ℓ sont différentiables, on a les deux propriétés suivantes:

$$\forall \ell \in \mathcal{L}, \quad \lambda_\ell^* f_\ell(x^*) = 0, \quad (\text{complémentarité}) \quad (5.30)$$

$$\nabla J(x^*) + \sum_{\ell \in \mathcal{L}} \lambda_\ell^* \nabla f_\ell(x^*) = 0, \quad (\text{stationnarité}) \quad (5.31)$$

(iv) Supposant que pour un vecteur λ^* (qu'on ne suppose plus a priori de Kuhn-Tucker) et un point $x^* \in \mathcal{C}^0$ satisfaisant les contraintes $f_\ell(x^*) \leq 0$ on a complémentarité et stationnarité, alors λ^* est donc de Kuhn-Tucker, et x^* est solution optimale.

Preuve. (i) La propriété (5.29) garantit que $D(\lambda^*) \geq J^*$. Le résultat vient alors de ce que $D^* \leq J^*$.

(ii) En combinant (5.29) et (5.28) il vient que x^* solution optimale de (5.21) minimise $L(x, \lambda^*)$ sur \mathcal{C}^0 .

(iii) D'après (ii), au point x^* on a nécessairement la propriété de stationnarité, qui exprime que le gradient de $L(x, \lambda^*)$ par rapport à x s'annule en x^* . Par ailleurs, on a $J(x^*) = L(x^*, \lambda^*)$ et donc chacun des termes $\lambda_\ell^* f_\ell(x^*)$, qui sont nécessairement non positifs puisque x^* satisfait les contraintes $f_\ell(x^*) \leq 0$ et $\lambda^* \geq 0$, doit être nul. C'est la propriété de complémentarité.

(iv) Si x^* satisfait la propriété de stationnarité alors la fonction convexe $x \rightarrow L(x, \lambda^*)$ est minimisée en x^* . Puisque x^* satisfait les contraintes $f_\ell(x^*) \leq 0$, la contrainte de complémentarité implique que $L(x, \lambda^*) \geq L(x^*, \lambda^*) = J(x^*) \geq J^*$. λ^* est de Kuhn-Tucker. De plus pour tout x solution faisable de (5.21) on a $J(x) \geq L(x, \lambda^*) \geq L(x^*, \lambda^*) = J(x^*)$ d'où l'optimalité de x^* . \square

Remarque 5.6. *La preuve s'adapte facilement pour établir une version plus générale du théorème, selon laquelle on remplace la condition $x^* \in \text{int}(\mathcal{C}^0)$ dans (iii) par $x^* \in \mathcal{C}^0$, auquel cas on doit redéfinir la stationnarité de x^* comme*

$$\forall x \in \mathcal{C}^0, \left\langle x - x^*, \nabla J(x^*) + \sum_{\ell \in \mathcal{L}} \lambda_\ell^* \nabla f_\ell(x^*) \right\rangle \leq 0.$$

Cette modification est nécessaire pour traiter du cas d'optima réalisés à la frontière du domaine \mathcal{C}^0 .

Nous donnons pour finir une condition suffisante pour l'existence d'un vecteur λ^* de Kuhn-Tucker.

Lemme 5.1. *Supposons que la valeur J^* est finie ($J^* > -\infty$) et l'existence d'un vecteur $\hat{x} \in \mathcal{C}^0$ tel que pour tout $\ell \in \mathcal{L}$, $f_\ell(\hat{x}) < 0$. Alors il existe un vecteur de Kuhn-Tucker λ^* .*

Preuve. On considère l'ensemble

$$\mathcal{C}^1 := \{(z_0, (z_\ell)_{\ell \in \mathcal{L}}) \in \mathbb{R}^{1+|\mathcal{L}|} : \exists x \in \mathcal{C}^0 \text{ tel que } J(x) - J^* < z_0 \text{ et } \forall \ell \in \mathcal{L}, f_\ell(x) \leq z_\ell\}.$$

Cet ensemble est non vide: il contient par exemple le vecteur $(J(\hat{x}) - J^* + 1, (f_\ell(\hat{x}))_{\ell \in \mathcal{L}})$. Il est par ailleurs convexe (vérification aisée). On considère aussi l'ensemble $\mathcal{C}^2 = (\mathbb{R}_-)^{1+|\mathcal{L}|}$, lui aussi non vide et convexe. Leur intersection est vide, car sinon il existerait un vecteur $x \in \mathcal{C}^0$ tel que $J(x) < J^*$ et $\forall \ell \in \mathcal{L}$, $f_\ell(x) \leq 0$, ce qui contredit le caractère optimal de J^* . On a alors (cf. par exemple corollaire 2.3 p. 22, poly de R.O. de J.F. Bonnans et S. Gaubert) l'existence d'une forme linéaire $q \neq 0$ telle que

$$\forall z^1 \in \mathcal{C}^1, z^2 \in \mathcal{C}^2, q \cdot z^1 \geq q \cdot z^2.$$

Les coordonnées q_i sont nécessairement non négatives, car sinon en faisant varier z^2 dans \mathcal{C}^2 on pourrait obtenir toutes les valeurs de \mathbb{R}_+ pour le membre de droite. Le résultat de séparation s'exprime alors comme l'existence de poids q_i non tous nuls, non négatifs, tels que pour tout z^1 dans \mathcal{C}^1 , on a

$$q \cdot z^1 \geq 0.$$

Reprenant la définition de \mathcal{C}^1 , cela implique que pour tout $x \in \mathcal{C}^0$, on a

$$q_0(J(x) - J^*) + \sum_{\ell \in \mathcal{L}} q_\ell f_\ell(x) \geq 0.$$

En choisissant $x = \hat{x}$ dans cette expression, il vient que nécessairement $q_0 > 0$. Posant $\lambda_\ell^* = q_\ell/q_0$, on obtient finalement le vecteur λ^* de Kuhn-Tucker recherché. \square

Exercice 5.2. *Montrer que lorsque $\alpha \rightarrow 1$, l'allocation α -équitable avec poids identiques converge vers l'allocation proportionnellement équitable.*

Exercice 5.3. *Montrer que lorsque $\alpha \rightarrow \infty$, l'allocation α -équitable tend vers l'allocation max-min équitable.*

5.6 Un algorithme dual

L'algorithme primal (5.14) est applicable dans le cas de contraintes relaxées de capacité, caractérisées par les fonctions de coût C_ℓ et leurs dérivées p_ℓ . L'algorithme dual de cette section permet de traiter le cas de contraintes strictes de capacité, i.e. de résoudre le problème d'optimisation d'origine (5.7).

On remarque que la contrainte de capacité stricte correspond à un cas limite où la fonction de coût vaut 0 pour un argument $\leq C_\ell$, et $+\infty$ pour un argument $> C_\ell$.

En changeant les signes pour se ramener à une minimisation convexe plutôt qu'une maximisation concave, par définition le problème dual de (5.7) est défini comme suit:

$$\text{Minimiser } D(\lambda) \tag{5.32}$$

$$\text{sur } \lambda \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{L}}, \tag{5.33}$$

où

$$D(\lambda) := \sup_{x \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{S}}} \sum_{s \in \mathcal{S}} U_s(x_s) + \sum_{\ell \in \mathcal{L}} \lambda_\ell [C_\ell - \sum_{s \in \mathcal{S}} A_{s\ell} x_s].$$

Nous allons appliquer le théorème 5.4 et le lemme 5.1 pour établir

Théorème 5.5. *Supposons les fonctions $U_s(x)$ concaves et différentiables sur \mathbb{R}_+ , avec $U'_s(0+) = +\infty$. Alors il existe un unique vecteur $x^* \in (0, +\infty)^{\mathcal{S}}$ qui réalise l'optimum dans (5.7), et il existe un vecteur λ^* de Kuhn-Tucker associé tel que*

$$\forall s \in \mathcal{S}, U'_s(x_s^*) = \sum_{\ell \in \mathcal{L}} A_{s\ell} \lambda_\ell^*, \tag{5.34}$$

$$\forall s \in \mathcal{S}, \forall \ell \in \mathcal{L}, \lambda_\ell^* [C_\ell - \sum_{s \in \mathcal{S}} A_{s\ell} x_s^*] = 0. \tag{5.35}$$

Preuve. La condition $U'_s(0+) = +\infty$ garantit que la fonction objectif $\sum_{s \in \mathcal{S}} U_s(x_s)$ admet un optimum x^* dans $(0, \infty)^{\mathcal{S}}$, et donc les fonctions objectif et contrainte sont bien différentiables en ce point. De plus les conditions du lemme 5.1 sont aussi vérifiées. L'existence d'un vecteur de Kuhn-Tucker λ^* en découle. Le théorème 5.4 (iii) s'applique alors et donne le résultat recherché. \square

Explicitons le problème dual. Supposons

$$U_s \text{ strictement concave, continument dérivable, } U'_s(0+) = +\infty, U'_s(+\infty) = 0.$$

Sous ces hypothèses, U'_s est continue dérivable, strictement décroissante, et envoie $(0, +\infty)$ sur lui-même. La bijection réciproque $g_s := U'_s{}^{-1}$ est donc bien définie, décroissante, et envoie encore $(0, \infty)$ sur lui-même. Pour λ tel que $\forall s, \lambda^s := \sum_{\ell} A_{s\ell} \lambda_\ell > 0$, on a alors

$$D(\lambda) = \sum_{s \in \mathcal{S}} U_s(g_s(\lambda^s)) + \sum_{\ell \in \mathcal{L}} \lambda_\ell [C_\ell - \sum_{s \in \mathcal{S}} A_{s\ell} g_s(\lambda^s)].$$

L'algorithme dual que nous considérons prend alors la forme suivante. A tout instant t (on omet de représenter la dépendance des x_s et des λ_ℓ en t), on pose

$$x_s = g_s(\lambda^s), \tag{5.36}$$

i.e. les sources de trafic adaptent instantanément leur débit x_s pour maximiser $L(x, \lambda)$. Les ressources $\ell \in \mathcal{L}$ adaptent leur paramètre selon la dynamique

$$\frac{d}{dt}\lambda_\ell = \kappa_\ell(\lambda) \left[\sum_{s \in \mathcal{S}} A_{\ell s} x_s - C_\ell \right]_{\lambda_\ell}^+. \quad (5.37)$$

Voyons en quoi cette équation s'interprète comme une descente de gradient pour la minimisation de la fonction $D(\lambda)$. On a

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_\ell} D(\lambda) = \left[C_\ell - \sum_{s \in \mathcal{S}} A_{s\ell} x_s \right] + \sum_{s \in \mathcal{S}} \frac{\partial}{\partial \lambda_\ell} (x_s) \left[U'_s(x_s) - \sum_{\ell' \in \mathcal{L}} A_{s\ell'} \lambda_{\ell'} \right].$$

Le second terme est nul d'après le choix (5.36). On a donc bien un gradient projeté, et le théorème 5.3 de la section précédente s'applique, modulo des hypothèses techniques adéquates de régularité et positivité des fonctions κ_ℓ, U_s impliquées.

Remarque 5.7. *En prenant comme facteur de gain $\kappa_\ell \equiv 1$, la dérivée de λ_ℓ devient $[\sum_{s \in \mathcal{S}} A_{\ell s} x_s - C_\ell]_{\lambda_\ell}^+$ dans la dynamique de gradient (5.37). On peut interpréter cette dynamique comme celle de la quantité de données en attente à l'entrée du lien ℓ : le terme $\sum_{s \in \mathcal{S}} A_{\ell s} x_s - C_\ell$ est la différence entre le taux d'arrivée et le taux de service de données au lien ℓ . Et de même que la quantité de données en attente pour être transmises le long de ℓ , le multiplicateur est contraint à prendre des valeurs non négatives par l'opération $[\cdot]_{\lambda_\ell}^+$.*

Ainsi la file d'attente en entrée du lien émule naturellement une dynamique de gradient pour le problème dual.

Une implémentation possible de l'algorithme dual est alors comme suit. La source s , pour réguler son débit d'envoi x_s selon (5.36) utilise en guise de $\lambda^s = \sum_{\ell \in \mathcal{L}} A_{s\ell} \lambda_\ell$ le volume de trafic envoyé, et encore en attente à l'un des liens ℓ tels que $A_{s\ell} = 1$. Une telle approche sous-tend la variante TCP-Vegas du protocole TCP.

Chapitre 6

Processus de Poisson

La loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ est par définition la loi de probabilité $\{e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}\}_{k \in \mathbb{N}}$ sur \mathbb{N} . On la notera aussi $\text{Poi}(\lambda)$.

Elle est incontournable en probabilités du fait de la **loi des petits nombres**, selon laquelle:

Proposition 6.1. *Etant données n variables aléatoires $X_{n,1}, \dots, X_{n,n}$ de Bernoulli, indépendantes de paramètres respectifs $p_{n,1}, \dots, p_{n,n}$ alors sous les hypothèses*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{i=1}^n p_{n,i} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n p_{n,i} = \lambda > 0, \quad (6.1)$$

on a la convergence en distribution de $Y_n := \sum_{i=1}^n X_{n,i}$ vers la loi de Poisson de paramètre λ .

Preuve. La convergence en loi $Y_n \rightarrow Y$ est équivalente, pour des variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{N} , à la convergence ponctuelle $\phi_{Y_n}(z) \rightarrow \phi_Y(z)$ des fonctions génératrices ϕ_{Y_n} pour toute valeur de $z \in (0, 1)$. Or

$$\begin{aligned} \phi_{Y_n}(z) &= \prod_{i=1}^n (1 - p_{n,i} + zp_{n,i}) \\ &= \exp\left(\sum_{i=1}^n \ln(1 - p_{n,i} + zp_{n,i})\right) \\ &= \exp\left(\sum_{i=1}^n p_{n,i}(z - 1) + O\left(\sum_{i=1}^n p_{n,i}^2\right)\right). \end{aligned}$$

Sous les hypothèses (6.1) la convergence de $\phi_{Y_n}(z)$ vers $\exp(\lambda(z - 1))$ en découle, d'où le résultat. \square

6.1 Définitions équivalentes du processus de Poisson

Un processus ponctuel sur \mathbb{R}_+ est par définition une suite strictement croissante ordonnée $0 < T_1 < T_2 < \dots < T_n < \dots$ d'instantanés aléatoires. On peut encore spécifier cette suite via les variables de comptage

$$N_t := \sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_{T_n \leq t}, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Ces données sont équivalentes puisqu'on peut retrouver chaque T_n à partir de $\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ comme le n -ème instant de saut de la fonction $t \rightarrow N_t$ sur \mathbb{R}_+ . Enfin, on peut la spécifier via la collection des variables $N(C)$ pour des ensembles mesurables C de \mathbb{R}_+ définies comme

$$N(C) := \sum_{n > 0} \mathbf{1}_{T_n \in C}.$$

On a alors

Définition 6.1. *Le processus ponctuel $\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ est dit de Poisson si pour toute suite $t_1^n \in \mathbb{R}_+^n$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$, les variables $(N_{t_i} - N_{t_{i-1}})_{i=1, \dots, n}$ sont mutuellement indépendantes, la loi de l'accroissement $N_{t_i} - N_{t_{i-1}}$ ne dépendant que de la différence $t_i - t_{i-1}$.*

Proposition 6.2. *Pour un tel processus, il existe $\lambda > 0$ appelé intensité du processus tel que la loi de chaque incrément $N_t - N_s$ est $\text{Poi}(\lambda(t - s))$.*

Preuve. Fixons $z \in (0, 1)$. Pour $t > 0$ rationnel, les propriétés requises entraînent que

$$\mathbb{E}(z^{N_t}) = [\mathbb{E}(z^{N_1})]^t. \quad (6.2)$$

Cette expression s'étend à t irrationnel par limite monotone. Par ailleurs, $\mathbb{E}(z^{N_1})$ ne saurait être nul, car sinon $\mathbb{E}(z^{N_t}) = 0$ pour tout $t > 0$, ce qui ne saurait avoir lieu puisque

$$\mathbb{E}(z^{N_t}) \geq \mathbb{P}(N_t = 0) = \mathbb{P}(T_1 > t),$$

et le membre de droite doit tendre vers 1 lorsque $t \rightarrow 0$ d'après l'hypothèse $T_1 > 0$ presque sûrement. On a alors

$$\ln \mathbb{E}(z^{N_1}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [\mathbb{E}(z^{N_t}) - 1] = \lim_{t \rightarrow 0} \sum_{k \geq 1} \frac{1}{t} \mathbb{P}(N_t = k) (z^k - 1).$$

Si on montre que

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^{-1} \mathbb{P}(N_t \geq 2) = 0, \quad (6.3)$$

on pourra déduire de ce qui précède que

$$\ln \mathbb{E}(z^{N_1}) = (z - 1) \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \mathbb{P}(N_t = 1),$$

ce qui entraînera l'existence de $\lambda := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \mathbb{P}(N_t = 1) \geq 0$ tel que $\mathbb{E}(z^{N_1}) = e^{\lambda(z-1)}$. Nécessairement $\lambda > 0$ car sinon on aurait $T_1 = +\infty$ presque sûrement, ce qui est en contradiction avec la définition d'un processus ponctuel. De cette expression et de (6.2), on déduit alors que chaque incrément $N_t - N_s$ admet une loi $\text{Poi}(\lambda(t - s))$.

Prouvons (6.3), en écrivant pour $t > 0$

$$\cup_{n \geq 0} \{N_{nt} = 0, N_{(n+1)t} \geq 2\} \subset \{T_2 < T_1 + t\}.$$

Notant $e^{-\theta} = \mathbb{P}(N_1 = 0) = \lim_{z \rightarrow 0} \mathbb{E}(z^{N_1})$, où nécessairement $\theta > 0$ (car sinon $T_1 = +\infty$), la probabilité de l'événement du membre de gauche est d'après les hypothèses

$$\sum_{n \geq 0} (\mathbb{P}(N_t = 0))^n \mathbb{P}(N_t \geq 2) = \mathbb{P}(N_t \geq 2) \frac{1}{1 - e^{-t\theta}},$$

d'après

$$\mathbb{P}(N_t = 0) = \lim_{z \rightarrow 0} \mathbb{E}(z^{N_t}) = \lim_{z \rightarrow 0} [\mathbb{E}(z^{N_1})]^t = e^{-\theta t}.$$

Comme la probabilité du membre de droite tend vers 0 lorsque $t \rightarrow 0$, puisque cet événement décroît vers $\{T_2 \leq T_1\}$, la probabilité du membre de gauche doit tendre vers 0, soit

$$\mathbb{P}(N_t \geq 2) = o(t).$$

□

Théorème 6.1. *Pour un processus de Poisson d'intensité λ , la suite $\tau_1 = T_1, \tau_2 = T_2 - T_1, \dots, \tau_i = T_i - T_{i-1}$ est i.i.d., chaque τ_i admettant la densité exponentielle de paramètre λ sur \mathbb{R}_+ :*

$$f_\lambda(x) = \mathbf{1}_{x>0} \lambda e^{-\lambda x}.$$

Preuve. On évalue la transformée de Laplace $\mathbb{E}(\prod_{i=1}^n e^{-\alpha_i \tau_i})$ pour des poids $\alpha_i^n \in \mathbb{R}_+^n$ en procédant par discrétisation. Soit $h > 0$ fixé. Pour tout $n \geq 1$ on note $Z_n = \mathbf{1}_{N_{nh} - N_{(n-1)h} \geq 1}$, et on définit $S_1 = \inf\{n > 0 : Z_n \geq 1\}$, et par récurrence $S_i = \inf\{n > S_{i-1} : Z_n = 1\}$. Enfin on pose

$$\tau_i^{(h)} = h(S_i - S_{i-1}).$$

Sur l'événement

$$A_h := \{\forall i = 1, \dots, n, \tau_i > h\},$$

on a $\forall i = 1, \dots, n, |\tau_i - \tau_i^{(h)}| \leq h$, et donc

$$\prod_{i=1}^n e^{-\alpha_i \tau_i} = (1 + O(h)) \prod_{i=1}^n e^{-\alpha_i \tau_i^{(h)}}.$$

Par construction les $S_i - S_{i-1}$ sont i.i.d., géométriques de paramètre $1 - e^{-\lambda h}$, d'où

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \prod_{i=1}^n e^{-\alpha_i \tau_i^{(h)}} &= \prod_{i=1}^n \mathbb{E} e^{-\alpha_i \tau_i^{(h)}} \\ &= \prod_{i=1}^n \left[\sum_{k \geq 1} e^{-\lambda(k-1)h} (1 - e^{-\lambda h}) e^{-\alpha_i k h} \right] \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{e^{-\alpha_i h} (1 - e^{-\lambda h})}{1 - e^{-(\alpha_i + \lambda)h}} \\ &= (1 + o(1)) \prod_{i=1}^n \frac{\lambda}{\lambda + \alpha_i}. \end{aligned}$$

Le résultat vient alors en écrivant

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\prod_{i=1}^n e^{-\alpha_i \tau_i}) &= \mathbb{E}(\prod_{i=1}^n e^{-\alpha_i \tau_i} \mathbf{1}_{A_h}) + \mathbb{E}(\prod_{i=1}^n e^{-\alpha_i \tau_i} \mathbf{1}_{\bar{A}_h}) \\ &\leq \mathbb{E}((1 + O(h)) \prod_{i=1}^n e^{-\alpha_i \tau_i^{(h)}}) + 1 - \mathbb{P}(A_h) \end{aligned}$$

ainsi que l'inégalité similaire obtenue en échangeant les rôles de τ_i et $\tau_i^{(h)}$, qui combinées donnent:

$$-(1 - \mathbb{P}(A_h)) + (1 + O(h)) \mathbb{E} \prod_{i=1}^n e^{-\alpha_i \tau_i^{(h)}} \leq \mathbb{E}(\prod_{i=1}^n e^{-\alpha_i \tau_i}) \leq 1 - \mathbb{P}(A_h) + (1 + O(h)) \mathbb{E} \prod_{i=1}^n e^{-\alpha_i \tau_i^{(h)}}.$$

L'évaluation précédente de la transformée de Laplace des $\tau_i^{(h)}$ ainsi que la propriété $\lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{P}(A_h) = 1$, elle-même venant de ce que A_h croît vers l'événement $\{\tau_i > 0, i \leq n\}$ donnent alors le résultat. \square

Proposition 6.3. *Pour une suite de variables aléatoires $\{\tau_i\}_{i \geq 1}$ i.i.d. de distribution Exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, les variables aléatoires $T_1 = \tau_1, T_2 = T_1 + \tau_2, \dots$ vérifient la propriété suivante.*

Le nombre $N_t = \sum_{i \geq 1} \mathbf{1}_{T_i \leq t}$ admet une loi Poissonnienne de paramètre λt . Conditionnellement à $N_t = n$, les variables aléatoires T_1^n sont distribuées comme l'échantillon trié $U_{(1)} < U_{(2)} < \dots < U_{(n)}$ de n variables aléatoires U_1, \dots, U_n i.i.d. uniformément distribuées sur $(0, t)$.

Preuve. Ecrivons

$$\mathbb{P}(N_t = n) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n \tau_i \leq t < \sum_{i=1}^{n+1} \tau_i\right).$$

On montre par récurrence que T_i admet une loi Gamma de paramètres λ, i , c'est-à-dire de densité sur \mathbb{R}_+

$$f_{\lambda,i}(x) = \frac{(\lambda x)^{i-1}}{(i-1)!} \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{x \in \mathbb{R}_+},$$

en utilisant le fait que la densité de T_i est la convolution de celle de T_{i-1} et de la densité Exponentielle de paramètre λ :

$$f_{\lambda,i+1}(x) = \mathbf{1}_{x \in \mathbb{R}_+} \int_0^x \frac{(\lambda y)^{i-1}}{(i-1)!} \lambda e^{-\lambda y} \lambda e^{-\lambda(x-y)} dy.$$

Il vient donc

$$\mathbb{P}(N_t = n) = \int_0^t \frac{(\lambda y)^{n-1}}{(n-1)!} \lambda e^{-\lambda y} e^{-\lambda(t-y)} dy = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!},$$

d'où la loi Poissonnienne de N_t de paramètre λt .

Pour une fonction fixée $F : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$ continue bornée, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[F(T_1^n) | N_t = n] &= \frac{e^{-\lambda t} n!}{(\lambda t)^n} \int_{\mathbb{R}_+^n} F(s_1, s_1 + s_2, \dots, s_1 + \dots + s_n) \mathbf{1}_{s_1 + \dots + s_n \leq t} \prod_{i=1}^n \lambda e^{-\lambda s_i} ds_i (e^{-\lambda(t-s_1-\dots-s_n)}) \\ &= \frac{n!}{t^n} \int_{\mathbb{R}_+^n} F(s_1, s_1 + s_2, \dots, s_1 + \dots + s_n) \mathbf{1}_{s_1 + \dots + s_n \leq t} \prod_{i=1}^n ds_i. \end{aligned}$$

Le changement de variables $(s_1^n) \rightarrow (t_1^n)$ avec $t_i = s_1 + \dots + s_i$ met en bijection les n -uplets s_1^n dans \mathbb{R}_+^n tels que $s_1 + \dots + s_n \leq t$ avec les n -uplets t_1^n dans \mathbb{R}_+^n de coordonnées croissantes et tels que $t_n \leq t$. De plus la transformation linéaire correspondante a pour déterminant $+1$. La formule de changement de variables donne alors:

$$\mathbb{E}[F(T_1^n) | N_t = n] = \frac{n!}{t^n} \int_{\mathbb{R}_+^n} F(t_1^n) \mathbf{1}_{t_1 < t_2 < \dots < t_n < t} \prod_{i=1}^n dt_i. \quad (6.4)$$

La densité de n variables i.i.d. uniformément distribuées sur $(0, t)$ est précisément

$$f(t_1^n) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{t} \mathbf{1}_{0 < t_i < t} dt_i.$$

Par symétrie, le n -échantillon correspondant réordonné et la permutation qui le réordonne sont indépendants, la permutation étant uniformément distribuée sur le groupe symétrique \mathcal{S}_n , et l'échantillon réordonné admettant la densité

$$\tilde{f}(t_1^n) = n! \mathbf{1}_{0 < t_1 < \dots < t_n < t} \prod_{i=1}^n \frac{1}{t} dt_i.$$

L'identification de cette densité avec la fonction contre laquelle $F(t_1^n)$ est intégrée dans (6.4) permet de conclure. \square

Nous introduisons maintenant la transformée de Laplace d'un processus ponctuel $N = \{T_i\}_{i>0}$. Pour une fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, on note

$$N(f) = \sum_{n>0} f(T_n).$$

La transformée de Laplace de N évaluée en la fonction f , qu'on note $\mathcal{L}_N(f)$ est définie par

$$\mathcal{L}_N(f) = \mathbb{E}e^{-N(f)}.$$

Sa donnée sur une classe suffisamment riche de fonctions f caractérise la loi du processus ponctuel. En particulier, sa donnée sur la famille des fonctions non négatives, constantes par morceaux, à support compact suffit. En effet, pour deux suites t_1^n et α_1^n de \mathbb{R}_+^n , telles que $t_1 < t_2 \dots < t_n$, en posant $t_0 = 0$ et

$$f(t) = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{t_{i-1} < t \leq t_i} \alpha_i,$$

on obtient

$$N(f) = \sum_{i=1}^n \alpha_i (N_{t_i} - N_{t_{i-1}}).$$

La connaissance de $\mathcal{L}_N(f)$ pour cette classe de fonctions f équivaut à la connaissance de la transformée de Laplace des variables $(N_{t_i} - N_{t_{i-1}})_{i=1}^n$ et donc caractérise leur distribution. En utilisant à nouveau l'argument que l'événement A_h défini plus haut a une probabilité tendant vers 1 lorsque h tend vers 0, on peut déduire que la donnée de ces lois pour tout t_1^n caractérise complètement la loi du processus.

Remarque 6.1. *La connaissance de $\mathcal{L}_N(f)$ pour d'autres classes de fonctions suffit encore à caractériser la loi de N . Par exemple les fonctions non négatives continues à support compact suffisent, puisque par convergence monotone on peut approcher une fonction constante par morceaux par une fonction continue bornée, et donc déduire $\mathcal{L}_N(f)$ pour f constante par morceaux comme limite monotone.*

A partir de la proposition précédente, nous pouvons caractériser la transformée de Laplace d'un processus de Poisson.

Proposition 6.4. *Soit le processus ponctuel $N = \{T_n\}_{n>0}$ construit à partir de la suite $\{\tau_i\}_{i>0}$ d'interarrivées, supposée i.i.d. de distribution exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Alors pour toute fonction non négative intégrable à support compact $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, on a l'expression suivante pour la transformée de Laplace du processus:*

$$\mathcal{L}_N(f) = \mathbb{E}(e^{-N(f)}) = \exp\left(-\lambda \int_{\mathbb{R}_+} (1 - e^{-f(x)}) dx\right). \quad (6.5)$$

Preuve. Soit $[0, t]$ un intervalle contenant le support de la fonction. Au vu de la proposition précédente, on peut engendrer le processus sur $[0, t]$ en tirant au sort N_t selon une loi de Poisson de paramètre λt , puis conditionnellement en cette valeur, en choisissant les points U_1, \dots, U_{N_t} de manière i.i.d. uniformément distribués sur $[0, t]$. On a alors $N(f) = \sum_{i=1}^{N_t} f(U_i)$, et donc

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_N(f) &= \sum_{n \geq 0} e^{-\lambda t \frac{(\lambda t)^n}{n!}} \mathbb{E} \prod_{i=1}^n e^{-f(U_i)} \\ &= \sum_{n \geq 0} e^{-\lambda t \frac{(\lambda t)^n}{n!}} \left(\frac{1}{t} \int_0^t e^{-f(u)} du \right)^n \\ &= \exp\left(-\lambda t + \lambda \int_0^t e^{-f(u)} du\right), \end{aligned}$$

d'où l'expression annoncée. □

Cette expression permet immédiatement de retrouver le fait que les incréments $N_{t_i} - N_{t_{i-1}}$ sont indépendants et distribués selon une loi de Poisson de paramètre $\lambda(t_i - t_{i-1})$. En effet, prenant f constante par morceaux comme précédemment, on obtient

$$\mathbb{E}e^{-\sum_{i=1}^n \alpha_i(N_{t_i} - N_{t_{i-1}})} = \exp\left(-\sum_{i=1}^n \lambda(t_i - t_{i-1})(1 - e^{-\alpha_i})\right),$$

qui est bien la transformée de Laplace de variables de Poisson indépendantes de paramètres tels qu'annoncé. Plus généralement, cette proposition permet de voir que pour une collection de parties mesurables C_1, \dots, C_n disjointes de \mathbb{R}_+ , la loi des nombres $N(C_i)$ de points correspondants est celle de variables aléatoires de Poisson indépendantes, de paramètres respectifs $\lambda \int_{C_i} dx$.

Remarque 6.2. *On vient de voir que pour le processus ponctuel construit à partir d'une suite i.i.d. $\{\tau_i\}_{i>0}$ d'interarrivées exponentiellement distribuées de paramètre λ , alors pour tous $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n$ les incréments correspondants $N_{t_i} - N_{t_{i-1}}$ sont indépendants de lois respectives $\text{Poi}(\lambda(t_i - t_{i-1}))$. Ceci implique qu'il s'agit d'un processus de Poisson, et établit au passage son existence.*

6.2 Processus de Poisson généraux

On se place maintenant sur l'espace \mathbb{R}^d avec $d \geq 1$, et on se munit d'une fonction $\lambda : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$, supposée localement intégrable (i.e. mesurable et d'intégrale finie sur tout compact). On pose alors

Définition 6.2. *Un processus ponctuel N sur \mathbb{R}^d est donné soit par une collection, finie ou dénombrable, de points $\{T_i\}_{i>0}$ distincts de \mathbb{R}^d , soit par la donnée des nombres $N(C)$ de tels points tombant dans chaque partie mesurable C de \mathbb{R}^d .*

Un tel processus ponctuel est dit Poisson de mesure d'intensité λ , pour une fonction $\lambda : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ localement intégrable si pour toute collection finie disjointe d'ensembles mesurables bornés $C_1, \dots, C_n \subset \mathbb{R}^d$, les variables $N(C_i)$ correspondantes sont mutuellement indépendantes, chacune ayant pour loi $\text{Poi}(\int_{C_i} \lambda(x)dx)$.

Pour montrer l'existence de tels processus, on s'appuie sur la construction précédente. On partitionne \mathbb{R}^d en une union disjointe de C_i tels que $\forall i \geq 1, \int_{C_i} \lambda(x)dx < \infty$, et on construit la restriction de N à chaque C_i indépendamment des autres, en suivant la procédure suivante.

On prend une suite $\{U_{i,n}\}_{n \geq 1}$ de variables aléatoires i.i.d. de densité $(\int_{C_i} \lambda(y)dy)^{-1} \lambda(x) \mathbf{1}_{x \in C_i}$ sur C_i , et un nombre aléatoire N_i de loi $\text{Poisson}(\int_{C_i} \lambda(x)dx)$, indépendant des $\{U_{i,n}\}_{n \geq 1}$.

On forme alors la restriction $N_{(i)}$ de N à C_i comme donnée par la collection des $U_{i,n}$ pour $n = 1, \dots, N_i$.

Pour une fonction non négative mesurable, intégrable sur C_i on a alors, notant $\lambda_i = \int_{C_i} \lambda(y)dy$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \exp(-\sum_{n=1}^{N_i} f(U_{i,n})) &= \sum_{n \geq 0} e^{-\lambda_i} \frac{\lambda_i^n}{n!} \lambda_i^{-n} \left(\int_{C_i} \lambda(x) e^{-f(x)} dx \right)^n \\ &= \exp\left(-\int_{C_i} \lambda(x)(1 - e^{-f(x)}) dx\right). \end{aligned}$$

En considérant le processus ponctuel N obtenu comme union de ces restrictions $N_{(i)}$ aux différents C_i , par indépendance des constructions individuelles, il vient, pour f non négative, intégrable à support compact:

$$\mathcal{L}_N(f) = \mathbb{E}e^{-N(f)} = \prod_{i \geq 1} \mathbb{E}e^{-N_{(i)}(f)} = \exp\left(-\sum_{i \geq 1} \int_{C_i} \lambda(x)(1 - e^{-f(x)}) dx\right).$$

Comme les C_i forment par hypothèse une partition de \mathbb{R}^d , la somme ci-dessus vaut $\int_{\mathbb{R}^d} \lambda(x)(1 - e^{-f(x)})dx$. En spécialisant le choix de f comme précédemment, l'expression de cette transformée de Laplace implique que le processus ainsi construit satisfait la définition donnée d'un processus de Poisson d'intensité λ . On a donc prouvé le

Théorème 6.2. *Pour $\lambda : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ localement intégrable, il existe un processus de Poisson d'intensité correspondante. Sa transformée de Laplace est donnée pour toute $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ intégrable à support compact par*

$$\mathcal{L}_N(f) = \exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d} \lambda(x)(1 - e^{-f(x)})dx\right).$$

6.3 Propriétés utiles

Propriété de Markov

Pour un processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$, $n \geq 1$, $t_1^n \in \mathbb{R}^n$ tel que $0 < t_1 < \dots < t_n$, et $x_1^n \in \mathbb{N}^n$, on a alors

$$\mathbb{P}(N_{t_n} = x_n | N_{t_1} = x_1, \dots, N_{t_{n-1}} = x_{n-1}) = \mathbb{P}(N_{t_n} = x_n | N_{t_{n-1}} = x_{n-1}) = \mathbb{P}(N_{t_n - t_{n-1}} = x_n - x_{n-1}).$$

Cette propriété découle directement de la définition (indépendance des accroissements, et invariance de leur loi par translation).

Propriété de Markov forte

Théorème 6.3. *On note $\mathcal{F}_t = \sigma(N_s, 0 \leq s \leq t)$ la tribu engendrée par la donnée du processus N restreint à $[0, t]$. Soit T un temps d'arrêt associé (i.e., $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$). Alors, si N est un processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$ sur \mathbb{R}_+ , sur l'événement $\{T < +\infty\}$ le processus $\{N_{t+T} - N_T\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ est aussi de Poisson d'intensité λ , et de plus est indépendant de $\{N_t\}_{t \leq T}$ (i.e. indépendant de \mathcal{F}_T).*

Preuve. Soit A un événement de \mathcal{F}_T , $n \geq 1$, $0 < t_1 < \dots < t_n$ des réels positifs, et k_1, \dots, k_n des entiers non-négatifs. Soit $g : \mathbb{N}^n \rightarrow \{0, 1\}$ définie par $g(x_1^n) = \prod_{i=1}^n \mathbf{1}_{x_i = k_i}$. On aura la propriété annoncée si pour n'importe quel choix de tels A , t_1^n et g , on a:

$$\mathbb{E}(g(N_{T+t_1} - N_T, \dots, N_{T+t_n} - N_T) \mathbf{1}_A \mathbf{1}_{T < \infty}) = \mathbb{E}(g(N_{t_1}, \dots, N_{t_n})) \mathbb{P}(A \cap \{T < \infty\}). \quad (6.6)$$

Pour $\ell \in \mathbb{N}$ arbitraire, on introduit la variable aléatoire

$$X_\ell := \sum_{m \geq 0} g(N_{m2^{-\ell} + t_1} - N_{m2^{-\ell}}, \dots, N_{m2^{-\ell} + t_n} - N_{m2^{-\ell}}) \mathbf{1}_A \mathbf{1}_{(m-1)2^{-\ell} < T \leq m2^{-\ell}}.$$

Sur l'événement $\{(m-1)2^{-\ell} < T \leq m2^{-\ell}\}$, l'indicatrice $\mathbf{1}_A$ n'est fonction que des $\{N_t\}$ pour $t \leq m2^{-\ell}$. Par indépendance des accroissements, et invariance de leur loi, on a donc pour tout $\ell \geq 1$:

$$\mathbb{E}(X_\ell) = \mathbb{E}(g(N_{t_1}, \dots, N_{t_n})) \mathbb{P}(A \cap \{T < \infty\}).$$

Par ailleurs, on a la convergence presque sûre, lorsque $a \searrow b$, de $N_{t_i+a} - N_a$ vers $N_{t_i+b} - N_b$. Ceci entraîne la convergence presque sûre

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} X_\ell = g(N_{T+t_1} - N_T, \dots, N_{T+t_n} - N_T) \mathbf{1}_A \mathbf{1}_{T < \infty}.$$

Par convergence dominée, l'espérance de X_ℓ converge donc lorsque $\ell \rightarrow \infty$ vers le membre de gauche de (6.6). Comme on a établi que cette espérance vaut le membre de droite de (6.6) pour tout ℓ , le résultat en découle. \square

Remarque 6.3. On exprime parfois la dernière propriété comme l'indépendance du processus translaté $\{N_{t+T} - N_T\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ avec la tribu \mathcal{F}_T , définie comme l'ensemble des événements A tels que pour tout $t \geq 0$, $A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.

Stabilité par échantillonnage

Proposition 6.5. Soient $\{U_n\}_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $[k]$, et $N = \{T_n\}_{n \geq 1}$ un processus de Poisson d'intensité λ , indépendant des $\{U_n\}_{n \geq 1}$. On construit alors les k processus ponctuels N^i , $i \in [k]$ en assignant à N^i les points T_n de N tels que $U_n = i$. Alors les processus N^i sont mutuellement indépendants, de Poisson, d'intensité λp_i où $p_i = \mathbb{P}(U_n = i)$.

Preuve. On va obtenir le résultat en calculant la transformée de Laplace jointe des processus N_i . Pour cela on se donne k fonctions $f_i : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}_+$ continues, et on écrit, utilisant l'indépendance des $\{U_n\}_{n \geq 1}$ et de N :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} e^{-\sum_{i \in [k]} N^i(f_i)} &= \mathbb{E} \prod_{n \geq 1: T_n \leq t} (\sum_{i \in [k]} \mathbf{1}_{U_n = i} e^{-f_i(T_n)}) \\ &= \mathbb{E} \prod_{n \geq 1: T_n \leq t} (\sum_{i \in [k]} p_i e^{-f_i(T_n)}) \\ &= \mathcal{L}_N(g), \end{aligned}$$

en posant $g(x) = -\ln(\sum_{i \in [k]} p_i e^{-f_i(x)})$. En appliquant la formule de la transformée de Laplace de N il vient

$$\begin{aligned} \mathbb{E} e^{-\sum_{i \in [k]} N^i(f_i)} &= \exp\left(-\lambda \int_{\mathbb{R}_+} (1 - e^{-g(x)}) dx\right) \\ &= \exp\left(-\sum_i \lambda p_i \int_{\mathbb{R}_+} (1 - e^{-f_i(x)}) dx\right). \end{aligned}$$

L'indépendance des N_i ainsi que la caractérisation de leur loi en découle. \square

Un corollaire de ce résultat fournit une caractérisation de la loi jointe du minimum $\min_j E_j$ de variables exponentielles E_j de paramètres λ_j , et de l'indice J réalisant ce minimum, en considérant que le premier point T_1 du processus N est en fait le minimum des premiers points $T_1(j)$ des processus N_j , et l'indice J correspondant est donné par la variable U_1 . Nous en donnons un énoncé et une preuve directe:

Proposition 6.6. Etant données des variables aléatoires $\{T^j\}_{j \in [k]}$ de loi Exponentielle de paramètre λ_j , mutuellement indépendantes, alors le couple $(T = \min_{j \in [k]} T^j, J)$ où $J \in [k]$ réalise le minimum dans la définition de T , est indépendant, T admettant une loi Exponentielle de paramètre $\lambda = \sum_{j \in [k]} \lambda_j$, et J la loi $\{\frac{\lambda_j}{\lambda}\}_{j \in [k]}$.

Preuve. Par le calcul: pour $t > 0$, $j \in [k]$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(J = j, T \leq t) &= \mathbb{P}(T^j \leq t, T^i \geq T^j, i \neq j) \\ &= \int_0^t \lambda_j e^{-\lambda_j s} ds \prod_{i \neq j} e^{-\lambda_i s} \\ &= \frac{\lambda_j}{\lambda} [1 - e^{-\lambda t}]. \end{aligned}$$

\square

Stabilité par superposition

En passant par les transformées de Laplace, il est immédiat de voir que pour deux processus de Poisson N_1, N_2 mutuellement indépendants, d'intensités respectives λ_1, λ_2 alors $N_1 + N_2$ est de Poisson d'intensité $\lambda_1 + \lambda_2$. Ceci peut aussi se déduire du résultat précédent sur l'échantillonnage.

Chapitre 7

Processus Markoviens de sauts

Pour les résultats énoncés ici sans preuve, le lecteur pourra consulter [14], chapitres 9 et 10, ou [2], chapitre 2.

Soit E un ensemble discret (fini ou dénombrable). Par définition, un processus de Markov homogène sur E est une collection de variables aléatoires X_t indicées par $t \in \mathbb{R}_+$, à valeurs dans E , vérifiant pour tous $n > 0$, $x_1^n \in E^n$, $t_1 < \dots < t_n$ la propriété de Markov suivante :

$$\mathbb{P}(X_{t_n} = x_n | X_{t_1} = x_1, \dots, X_{t_{n-1}} = x_{n-1}) = \mathbb{P}(X_{t_n} = x_n | X_{t_{n-1}} = x_{n-1}),$$

et (hypothèse d'homogénéité) telle que ce membre de droite ne dépend que de x_{n-1} , x_n et $t_n - t_{n-1}$. On note alors

$$p_{xy}(t) := \mathbb{P}(X_{t+s} = y | X_s = x).$$

Par conditionnements successifs, on a

$$\forall n > 0, x_1^n \in E^n, t_1 < \dots < t_n, \mathbb{P}(X_{t_1} = x_1, \dots, X_{t_n} = x_n) = \mathbb{P}(X_{t_1} = x_1) \prod_{j=1}^{n-1} p_{x_j x_{j+1}}(t_{j+1} - t_j).$$

On a de plus l'équation de semi-groupe, dite de Chapman-Kolmogorov:

$$\forall x, y \in E, s, t \in \mathbb{R}_+, p_{xy}(t+s) = \sum_{z \in E} p_{xz}(s)p_{zy}(t),$$

obtenue en écrivant le membre de gauche comme $\mathbb{P}(X_{t+s} = y | X_0 = x)$, puis en conditionnant selon la valeur z de X_s .

7.1 Les processus Markoviens de sauts

Il s'agit de processus Markoviens comme nous venons de les introduire, supposés vérifier la condition technique supplémentaire: avec probabilité 1, le processus $\{X_t\}_{t \geq 0}$ a un temps de séjour dans chaque état successif strictement positif. On note $0 < T_1 < T_2 < \dots < T_n$ les instants où le processus saute, et Y_n le nouvel état atteint à T_n . $\tau_n := T_{n+1} - T_n$ est le temps de séjour dans l'état Y_n .

On suppose de plus les trajectoires continues à droite:

$$\forall n > 0, X_{T_n} = Y_n \text{ et } X_t \equiv Y_n \text{ sur } [T_n, T_{n+1}[.$$

Ces hypothèses ont des conséquences sur la régularité des probabilités de transition $p_{xy}(t)$. Ainsi:

Lemme 7.1. *Pour un processus Markovien de sauts sur E ,*

$$\forall x \in E, \lim_{t \rightarrow 0} p_{xx}(t) = 1.$$

Preuve. Par définition, $p_{xx}(t) = \mathbb{P}(X_t = x | X_0 = x) \geq \mathbb{P}(T_1 > t | X_0 = x)$. Or

$$\lim_{t \rightarrow 0} \mathbb{P}(T_1 > t | X_0 = x) = \mathbb{P}(T_1 > 0 | X_0 = x),$$

et le membre de droite vaut 1 par hypothèse. \square

Malgré cette régularité, certaines trajectoires pathologiques restent possibles: l'absorption, i.e. le processus reste indéfiniment dans un même état Y_n , et l'explosion, i.e. les temps de sauts T_n croissent vers une limite finie T_∞ . Dans la pratique les processus que nous rencontrerons seront exempts de cette dernière pathologie.

7.2 Structure et générateur infinitésimal

Notation: On note \mathbb{P}_x la loi du processus conditionnellement à $X_0 = x$, et pour une loi ν sur E , on note aussi $\mathbb{P}_\nu = \sum_{x \in E} \nu_x \mathbb{P}_x$ la loi de la chaîne lorsque l'état initial X_0 est distribué selon ν . On considère la chaîne à temps discret $\{X_{nh}\}_{n \in \mathbb{N}}$ obtenue par échantillonnage du processus $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ avec un pas de temps $h > 0$. Il est immédiat de vérifier qu'il s'agit d'une chaîne de Markov de probabilités de transition $p_{xy}(h)$.

Loi de τ_0 sous \mathbb{P}_x

On introduit la quantité $\tau_0^{(h)} = h \inf\{k \in \mathbb{N} : X_{kh} \neq X_{(k-1)h}\}$. Sur l'événement $\{\tau_1 > h\}$, on a

$$\tau_0^{(h)} - h \leq \tau_0 \leq \tau_0^{(h)}. \quad (7.1)$$

Pour $t > 0$ fixé, on a donc

$$\mathbb{P}_x \left(\tau_0^{(h)} - h > h \lceil \frac{t}{h} \rceil; \tau_1 > h \right) \leq \mathbb{P}_x(\tau_0 > t; \tau_1 > h) \leq \mathbb{P}_x \left(\tau_0^{(h)} > h \lceil \frac{t}{h} \rceil - h; \tau_1 > h \right).$$

Cela implique, puisque $\lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{P}(\tau_1 > h) = 1$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_x(\tau_0 > t) &= \mathbb{P}_x \left(\tau_0^{(h)} > h \lceil \frac{t}{h} \rceil \right) + o(1) \\ &= p_{xx}(h)^{\lceil \frac{t}{h} \rceil} + o(1) \\ &= \exp \left(\lceil \frac{t}{h} \rceil \log p_{xx}(h) \right) + o(1), \end{aligned}$$

où le terme $o(1)$ tend vers 0 lorsque h tend vers 0. D'après le lemme 7.1, $\lim_{h \rightarrow 0} p_{xx}(h) = 1$, d'où par un développement limité de $\log p_{xx}(h)$:

$$\mathbb{P}_x(\tau_0 > t) = \exp \left(\lceil \frac{t}{h} \rceil (p_{xx}(h) - 1)(1 + o(1)) \right) + o(1).$$

Le membre de gauche étant indépendant de h , on en déduit l'existence de $q_x \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ tel que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (1 - p_{xx}(h)) = q_x.$$

On distingue alors trois cas:

(i) $q_x = 0$: alors $\forall t > 0$, $\mathbb{P}_x(\tau_0 > t) = 1$. On a donc absorption du processus dans l'état x , qu'il ne quitte jamais.

(ii) $q_x = +\infty$: alors $\forall t > 0$, $\mathbb{P}_x(\tau_0 > t) = 0$. Ceci entraîne $\mathbb{P}_x(\tau_0 > 0) = 0$, ce qui contredit l'hypothèse faite de temps de séjour strictement positif. Ce cas est donc exclu.

(iii) $q_x \in (0, +\infty)$. Alors $\forall t > 0$, $\mathbb{P}_x(\tau_0 > t) = \exp(-q_x t)$. Le temps de séjour τ_0 dans l'état x suit donc une loi exponentielle de paramètre q_x .

Loi jointe de τ_0 et Y_1 sous \mathbb{P}_x

On suppose $q_x > 0$ (pas d'absorption). Pour $\alpha > 0$ et $y \in E$, $y \neq x$ fixés, on veut calculer

$$\mathbb{E}_x(e^{-\alpha\tau_0}; Y_1 = y) := \mathbb{E}_x(e^{-\alpha\tau_0} \mathbf{1}_{Y_1=y}).$$

Sur $\{\tau_1 > h\}$ on a non seulement (7.1) mais aussi $X_{\tau_0^{(h)}} = Y_1$, d'où l'équivalence dans la première ligne ci-dessous

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x(e^{-\alpha\tau_0}; Y_1 = y) &\sim \mathbb{E}_x(e^{-\alpha\tau_0^{(h)}}; X_{\tau_0^{(h)}} = y) \\ &= \sum_{n \geq 1} e^{-\alpha n h} \mathbb{P}_x(X_0 = X_h = \dots = X_{h(n-1)} = x, X_{nh} = y) \\ &= \sum_{n \geq 1} e^{-\alpha n h} [p_{xx}(h)]^{n-1} p_{xy}(h) \\ &= \sum_{n \geq 1} e^{-\alpha n h} \sum_{m \geq n} \mathbb{P}_x(\tau_0^{(h)} = hm) p_{xy}(h) \\ &= \sum_{m \geq 1} \mathbb{P}_x(\tau_0^{(h)} = hm) e^{-\alpha h \frac{1-e^{-\alpha m h}}{1-e^{-\alpha h}}} p_{xy}(h) \\ &= [1 - \mathbb{E}_x(e^{-\alpha\tau_0^{(h)}})] \frac{p_{xy}(h)}{1-e^{-\alpha h}} \end{aligned}$$

Lorsque $h \rightarrow 0$, le premier facteur de la dernière ligne tend vers $1 - \mathbb{E}_x(e^{-\alpha\tau_0}) = \alpha/(\alpha + q_x)$, d'où l'équivalent

$$\mathbb{E}_x(e^{-\alpha\tau_0}; Y_1 = y) \sim \frac{q_x}{q_x + \alpha} \frac{p_{xy}(h)}{h q_x}.$$

On en déduit l'existence d'une limite $q_{xy} := \lim_{h \rightarrow 0} p_{xy}(h)/h$. On en déduit aussi que τ_0 et Y_1 sont indépendants sous \mathbb{P}_x , avec $\mathbb{P}_x(Y_1 = y) = q_{xy}/q_x$. Enfin, on déduit de

$$\sum_{y \neq x} \mathbb{P}_x(Y_1 = y) = 1$$

l'identité

$$\forall x \in E, q_x = \sum_{y \neq x} q_{xy}.$$

Définition 7.1. La matrice Q dont les entrées q_{xy} pour $x \neq y, x, y \in E$ sont les limites q_{xy} précédentes, et les termes diagonaux sont donnés par $q_{xx} = -q_x = -\sum_{y \neq x} q_{xy}$, $x \in E$ est appelée **générateur infinitésimal** du processus $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$.

Notant $P(h) = \{p_{xy}(h)\}_{x, y \in E}$, on a établi l'existence de la limite $\lim_{h \rightarrow 0} h^{-1}[P(h) - I] = Q$, où I est la matrice identité.

Equations de Kolmogorov Les équations de semi-groupe $P(t+h) = P(t)P(h) = P(h)P(t)$ peuvent alors se différencier dans le cas d'un espace d'états fini, $|E| < +\infty$, donnant alors

$$\frac{d}{dt} P(t) = P(t)Q, \quad \frac{d}{dt} P(t) = QP(t),$$

deux identités connues sous le nom d'équations de Kolmogorov "forward" et "backward" respectivement.

Dans le cas d'un espace d'états infini, sous la condition supplémentaire que le processus soit non-explosif, on peut justifier l'échange entre dérivation et somme infinie et les équations de Kolmogorov sont encore valides. Le lecteur pourra consulter [2] pour un traitement plus complet de ce point.

Dans le cas d'un espace d'états E fini, au vu de la condition initiale $P(0) = I$, ces équations admettent pour unique solution

$$P(t) = \exp(tQ) = \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} Q^n.$$

Structure des processus de saut

On a la caractérisation suivante:

Théorème 7.1. *Pour un processus de saut $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ de générateur infinitésimal Q , la séquence associée $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov de matrice de transition $p_{xy} = \mathbf{1}_{x \neq y} \frac{q_{xy}}{q_x}$. Conditionnellement en $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, les temps de séjour $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sont indépendants, avec τ_n de loi exponentielle de paramètre q_{Y_n} .*

Preuve. Il s'agit d'évaluer, pour tous $n \geq 1$, $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}_+$, $x_1, \dots, x_n \in E$, la quantité

$$\mathbb{E}_x \left(e^{-\alpha_0 \tau_0} \times \dots \times e^{-\alpha_n \tau_n}, Y_1 = x_1, \dots, Y_n = x_n \right),$$

et de montrer qu'elle vaut

$$\frac{q_x}{q_x + \alpha_0} \times \dots \times \frac{q_{x_n}}{q_{x_n} + \alpha_n} \times \frac{q_{x x_1}}{q_x} \times \dots \times \frac{q_{x_{n-1} x_n}}{q_{x_{n-1}}}.$$

En considérant la chaîne échantillonnée $\{X_0, X_h, X_{2h}, \dots\}$, les mêmes calculs que ceux effectués pour caractériser la loi jointe de (τ_0, Y_1) conduisent au résultat. \square

Exemple 7.1. *Pour $E = \mathbb{N}$, $q_{x, x+1} = \lambda$, et $q_{xy} = 0$ si $y \neq x + 1$, cela nous donne le processus de comptage d'un processus de Poisson.*

7.3 Explosions et processus de naissance et de mort

En pratique on part de la donnée du générateur infinitésimal Q plutôt que du semi-groupe $(P(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$. En l'absence d'explosion (i.e. $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = +\infty$), le théorème précédent indique que la loi du processus est caractérisée par le générateur Q , puisqu'on a une construction explicite de toute la trajectoire $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$. Voici une première condition suffisante de non-explosion.

Théorème 7.2. *Si la chaîne de Markov $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ des états visités par le processus $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ est irréductible récurrente, alors presque sûrement $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = +\infty$, i.e. on n'a pas d'explosion.*

Preuve. Fixons un état x , et notons $\nu_n := \sum_{k=0}^n \mathbf{1}_{Y_k=x}$ le nombre de visites de la chaîne discrète à x aux instants $k \leq n$. D'après la caractérisation des processus de saut, la séquence des temps de séjour en x à chaque visite est i.i.d., de distribution exponentielle de paramètre q_x . Par récurrence de l'état x pour la chaîne discrète, $\nu_n \rightarrow +\infty$ presque sûrement lorsque $n \rightarrow \infty$. Par la loi forte des grands nombres, le temps total passé en x avant T_n , qui minore T_n , tend alors presque sûrement vers l'infini. \square

Processus de vie et de mort

Par définition, il s'agit de processus Markoviens de sauts sur \mathbb{N} qui de l'état n ne peuvent passer qu'à l'état $n+1$ (on parle de naissance d'un individu) ou $n-1$ (on parle de mort d'un individu). Leur générateur infinitésimal est complètement spécifié par les taux de naissance $\beta_n = q_{n,n+1}$ et de mort $\delta_n = q_{n,n-1}$. En effet, pour $n \neq m$ avec $|n-m| > 1$, le taux q_{nm} est par hypothèse nul; le paramètre q_n de la loi exponentielle du temps de séjour en n est nécessairement donné par

$$q_n = \beta_n + \delta_n,$$

d'après la condition de normalisation $\sum_{m \neq n} q_{n,m} = q_n$. On a dans ce cas le critère de non-explosion suivant:

Proposition 7.1. *Si $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{\beta_n + \delta_n} = +\infty$, alors le processus de vie et mort associé aux taux $\{\beta_n, \delta_n\}_{n \geq 0}$ n'a, avec probabilité 1, pas d'explosion.*

Preuve. Si la chaîne reste confinée à un nombre fini de valeurs, elle prend l'une d'elles une infinité de fois. Le même argument que précédemment (cas récurrent) permet de conclure. Sinon, $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ prend toutes les valeurs k supérieures à Y_0 . $T_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n$ est alors supérieur ou égal à la somme $Z := \sum_{k \geq Y_0} Z_k$ de variables aléatoires Z_k indépendantes, exponentielles de paramètre $\beta_k + \delta_k$. Une variable aléatoire Z vaut $+\infty$ presque sûrement si sa transformée de Laplace $\mathbb{E}e^{-\alpha Z}$ vaut 0 pour tout $\alpha > 0$. Or

$$\mathbb{E}e^{-\alpha Z} = \prod_{k \geq Y_0} \frac{\beta_k + \delta_k}{\beta_k + \delta_k + \alpha} = \exp \left(- \sum_{k \geq Y_0} \log \left(1 + \frac{\alpha}{\beta_k + \delta_k} \right) \right).$$

La somme dans cette exponentielle est infinie si et seulement si $\sum_{k \geq Y_0} \frac{1}{\beta_k + \delta_k} = +\infty$, d'où le résultat. \square

7.4 Lois stationnaires et théorèmes limites

Partant de l'équation de Kolmogorov "forward",

$$\frac{d}{dt} P(t) = P(t)Q,$$

on obtient en la multipliant à gauche par le vecteur ligne donnant la loi initiale de X_0 , $p(0) = \{p_x(0)\}_{x \in E}$

$$\frac{d}{dt} \mathbb{P}(X_t = z) = \frac{d}{dt} \sum_{x \in E} p_x(0) p_{xz}(t) = \sum_{x, y \in E} p_x(0) p_{xy}(t) q_{yz}.$$

On ne justifie pas ici ce résultat dans le cas $|E| = +\infty$, qui requiert des arguments supplémentaires pour échanger somme infinie et dérivation. L'équation ci-dessus s'interprète encore

$$\frac{d}{dt} \mathbb{P}(X_t = z) = \sum_{y \in E} \mathbb{P}(X_t = y) q_{yz}.$$

Cela justifie la définition

Définition 7.2. Une loi $\{\pi_x\}_{x \in E}$ est dite stationnaire pour la processus Markovien de sauts $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ si elle vérifie

$$\forall x \in E, \sum_{y \in E} \pi_y q_{yx} = 0,$$

ou de manière équivalente

$$\forall x \in E, \pi_x \sum_{y \neq x} q_{xy} = \sum_{y \neq x} \pi_y q_{yx}. \quad (7.2)$$

Ces dernières équations sont appelées équations de balance, ou d'équilibre, du processus.

Exemple 7.2. (Processus de vie et de mort)

Les équations prennent la forme:

$$\begin{aligned} \pi_0 \beta_0 &= \pi_1 \delta_1, \\ \pi_i (\beta_i + \delta_i) &= \pi_{i-1} \beta_{i-1} + \pi_{i+1} \delta_{i+1}, \quad i \geq 1. \end{aligned}$$

On obtient alors par récurrence:

$$\pi_n = \pi_0 \prod_{i=1}^n \frac{\beta_{i-1}}{\delta_i}. \quad (7.3)$$

Définition 7.3. Le processus de sauts $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ est irréductible (respectivement, irréductible récurrent) si et seulement si la chaîne induite $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ l'est.

Définition 7.4. L'état $x \in E$ est dit récurrent positif si et seulement si

$$\mathbb{E}_x(R_x) < +\infty,$$

où $R_x := \inf\{t > \tau_0 : X_t = x\}$.

Définition 7.5. Une mesure non négative μ sur E est invariante si et seulement si

$$\forall y \in E, \forall t > 0, \mu_y = \sum_{x \in E} \mu_x p_{xy}(t)$$

ce qu'on note encore matriciellement $\mu' = \mu' P(t)$.

Théorème 7.3. Si le processus $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ est irréductible récurrent, une mesure invariante μ existe et est unique à un facteur multiplicatif près. On peut la définir comme, ayant fixé un état arbitraire $x \in E$:

$$(i) \quad \forall y \in E, \mu_y = \mathbb{E}_x \int_0^{R_x} \mathbf{1}_{X_s=y} ds,$$

ou encore:

$$(ii) \quad \forall y \in E, \mu_y = \frac{1}{q_y} \mathbb{E}_x \sum_{n=1}^{T_x} \mathbf{1}_{Y_n=y},$$

où $T_x := \inf\{n \geq 1 : Y_n = x\}$ est le temps d'atteinte de x de la chaîne induite. Une mesure invariante est enfin une mesure stationnaire, i.e. vérifie l'équation de balance globale (7.2).

Remarque 7.1. La dernière expression fournit une relation entre la mesure invariante $\hat{\mu}$ de la chaîne induite $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ et celle du processus $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$, puisque cette dernière s'écrit $\mu_y = \frac{\hat{\mu}_y}{q_y}$.

Preuve. (Unicité). On considère la chaîne échantillonnée $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Une mesure invariante pour $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ est invariante pour $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Pour établir l'unicité annoncée, il suffit donc de montrer qu'on a unicité pour cette dernière, ce qui découle de la théorie des chaînes de Markov dès qu'on a irréductibilité et récurrence.

L'irréductibilité de $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ découle de celle de $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. En effet, pour deux états x, y il existe une suite $x_0 = x, \dots, x_n = y$ d'états tels que chaque transition de x_i à x_{i+1} , $i = 1, \dots, n-1$, a une probabilité positive pour $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. On peut choisir des intervalles de temps A_i non vides tels que

$$\tau_i \in A_i, i = 0, \dots, n \Rightarrow T_n = \sum_{i=0}^{n-1} \tau_i < 1 < T_{n+1} = \sum_{i=0}^n \tau_i.$$

Sur l'événement $\{Y_0^n = x_0^n, \tau_i \in A_i, i = 1, \dots, n\}$ on a alors $X_1 = y$. Or cet événement a une probabilité positive, chaque temps de séjour τ_i ayant une loi exponentielle, d'où l'irréductibilité de $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

La récurrence de $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ s'établit comme suit. Comme $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est récurrente par hypothèse, elle visite un état x une infinité de fois. Comme chaque temps de séjour est exponentiel, une infinité de ces temps de séjour a une durée supérieure à 1. Donc $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ visite x une infinité de fois.

(Existence, forme (i)). Pour $x, y \in E$ fixés, on écrit:

$$\begin{aligned} \sum_{y \in E} \mu_y p_{yz}(t) &= \sum_{y \in E} \mathbb{E}_x \int_0^\infty \mathbf{1}_{s < R_x, X_s = y} p_{yz}(t) ds \\ &= \sum_{y \in E} \int_0^\infty \mathbb{E}_x [\mathbf{1}_{s < R_x, X_s = y} p_{yz}(t)] ds \\ &= \sum_{y \in E} \int_0^\infty \mathbb{E}_x [\mathbf{1}_{s < R_x, X_s = y} \mathbf{1}_{X_{t+s} = z}] ds \\ &= \int_0^\infty \mathbb{E}_x [\mathbf{1}_{s < R_x} \mathbf{1}_{X_{t+s} = z}] ds \\ &= \mathbb{E}_x \int_t^{t+R_x} \mathbf{1}_{X_s = z} ds, \end{aligned}$$

où on a utilisé le théorème de Fubini, l'identité

$$\mathbb{P}(X_{t+s} = z | X_s = y, R_x > s) = p_{yz}(t)$$

qui découle de la propriété de Markov du processus. Enfin, la propriété de Markov forte du processus (pour une preuve, consulter [2] Corollaire 8.3) implique que

$$\mathbb{E}_x \int_0^t \mathbf{1}_{X_s = z} ds = \mathbb{E}_x \int_{R_x}^{R_x+t} \mathbf{1}_{X_s = z} ds,$$

ce qui permet de déduire l'invariance de la mesure μ .

La structure de processus de sauts, i.e. états visités $\{Y_n\}$ distribués selon chaîne de Markov de probabilités de transition $q_{yz}/q_y \mathbf{1}_{z \neq y}$, et temps de séjour exponentiels de paramètres q_{Y_n} dans chaque état Y_n nous permet d'écrire:

$$\begin{aligned} \mu_y &= \sum_{n \geq 0} \mathbb{E}_x (\tau_n \mathbf{1}_{Y_n = y} \mathbf{1}_{n < T_x}) \\ &= \frac{1}{q_y} \mathbb{E}_x \sum_{n=0}^{T_x-1} \mathbf{1}_{Y_n = y} \\ &= \frac{1}{q_y} \mathbb{E}_x \sum_{n=1}^{T_x} \mathbf{1}_{Y_n = y}. \end{aligned}$$

Enfin, cette dernière caractérisation donne

$$\mu_y = \frac{1}{q_y} \hat{\mu}_y,$$

où $\hat{\mu}_y$ est une mesure stationnaire pour la chaîne de Markov $\{Y_n\}$, et vérifie donc

$$\hat{\mu}_y = \sum_{z \neq y} \frac{q_{zy}}{q_z} \hat{\mu}_z.$$

Il vient que la mesure invariante μ vérifie nécessairement les équations de balance globale, ou de mesure stationnaire. \square

Corollaire 7.1. *Pour $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ irréductible récurrent, la récurrence positive est vérifiée par tous les états ou aucun.*

Preuve. En effet, l'état x est récurrent positif si et seulement si $\sum_{y \in E} \mu_y < +\infty$, puisque cette somme coïncide avec $\mathbb{E}_x(R_x)$. La condition de sommabilité est vérifiée par une mesure invariante si et seulement si elle est vérifiée par toutes. En construisant la mesure invariante à partir d'un autre état $x' \neq x$, le résultat en découle. \square

Définition 7.6. *Le processus $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ est dit ergodique s'il est irréductible, récurrent positif.*

On a alors le résultat suivant:

Théorème 7.4. *Le processus $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ est ergodique si et seulement si il est irréductible, non explosif, et il existe une loi de probabilité π vérifiant les équations de balance (7.2) ou de manière équivalente, $\pi'Q = 0$.*

Dans ce cas, π est l'unique loi invariante, et est donnée par

$$\pi_x = \frac{1}{q_x} \frac{1}{\mathbb{E}_x(R_x)}.$$

Preuve. Pour un processus ergodique, le théorème 7.3 nous donne, pour $x \in E$ fixé, une expression pour une mesure invariante μ_y , dont la masse totale vaut $\mathbb{E}_x(R_x)$, qui est finie pour x récurrent positif. L'existence de la loi de probabilité invariante spécifiée par $\pi_x = 1/[q_x \mathbb{E}_x(R_x)]$ en découle. Encore d'après le théorème 7.3, la loi invariante est aussi stationnaire. Le processus est par ailleurs nécessairement non explosif puisque récurrent.

Inversement, supposant le processus irréductible, non explosif, admettant une loi de probabilité stationnaire π , on introduit pour tout $n \in \mathbb{N}$ la probabilité $p_{xz}^{(n)}(t)$ que $X_t = z$ et que $T_n > t$ (i.e. au plus $n - 1$ sauts on eu lieu dans $[0, t]$) sachant $X_0 = x$. Cet événement peut se produire soit sans qu'il y ait de saut dans $[0, t]$ si $x = z$, soit ayant un dernier saut à un instant $s \in [0, t]$, au plus $n - 1$ sauts sur $[0, s]$. Conditionnant selon la valeur $Y = y$ au dernier saut, on a:

$$p_{xz}^{(n)}(t) = \mathbf{1}_{x=z} e^{-q_x t} + \int_0^t \sum_{y \neq z} p_{xy}^{(n-1)}(s) q_{yz} ds e^{-q_z(t-s)}.$$

Ceci donne encore:

$$\sum_{x \in E} \pi_x p_{xz}^{(n)}(t) = \pi_z e^{-q_z t} + \int_0^t e^{-q_z(t-s)} \sum_{y \neq z} q_{yz} \sum_{x \in E} \pi_x p_{xy}^{(n-1)}(s) ds.$$

Pour $n = 0$, on a $\sum_{x \in E} \pi_x p_{xz}^{(0)}(t) = \pi_z e^{-q_z t} \leq \pi_z$, soit en notation matricielle $\pi'P^{(0)}(t) \leq \pi'$. L'équation précédente donne alors par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

$$\pi'P^{(n)}(t) \leq \pi', \quad n \in \mathbb{N},$$

puisqu'en utilisant d'une part l'hypothèse de récurrence au rang $n - 1$ et d'autre part la stationnarité de π , on obtient:

$$\begin{aligned} \sum_{x \in E} \pi_x p_{xz}^{(n)}(t) &\leq \pi_z e^{-q_z t} + \int_0^t e^{-q_z(t-s)} \sum_{y \neq z} q_{yz} \pi_y ds \\ &= \pi_z e^{-q_z t} + \int_0^t e^{-q_z(t-s)} \pi_z q_z ds \\ &= \pi_z. \end{aligned}$$

Le processus étant non explosif, $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{xz}^{(n)}(t) = p_{xz}(t)$. Par convergence dominée, on obtient ainsi

$$\pi' P(t) \leq \pi',$$

soit $\sum_x \pi_x p_{xy}(t) \leq \pi_y$ pour tout y . Comme la somme en y de chaque terme vaut 1, on a égalité, et donc π est invariante. Le processus est alors nécessairement récurrent, car sinon $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_x(X_t = y) = 0$ pour tous x, y , ce qui est impossible lorsqu'une loi invariante existe. Finalement, la mesure invariante étant unique à un facteur multiplicatif près dans le cas irréductible récurrent, on déduit du fait que π a une masse totale finie que $\mathbb{E}_x(R_x) < \infty$, i.e. la récurrence positive. \square

Théorème 7.5. (*Théorème ergodique*) *Pour un processus de sauts $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ ergodique sur E de loi stationnaire π , on a pour toute fonction π -intégrable $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ et toute loi initiale pour X_0 la limite presque sûre*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(X_s) ds = \sum_{x \in E} \pi_x f(x).$$

Preuve. L'argument est identique au cas des chaînes à temps discret, en décomposant la trajectoire sur $[0, t]$ en chaque temps de retour à un état fixé $x \in E$, et en invoquant la loi forte des grands nombres. \square

Théorème 7.6. *Pour un processus de sauts $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ ergodique sur E de loi stationnaire π , on a pour toute loi initiale ν de X_0 la convergence en loi de X_t vers π lorsque $t \rightarrow \infty$, soit*

$$\forall x \in E, \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_\nu(X_t = x) = \pi_x.$$

Preuve. Fixons $\delta > 0$. Pour $t > 0$, soit $n_t \in \mathbb{N}$ tel que $t = n_t \delta + r_t$ avec $0 \leq r_t < \delta$. La chaîne de Markov à temps discret $\{X_{n\delta}\}$ est irréductible, récurrente positive lorsque le processus X_t l'est, puisque la loi stationnaire de $\{X_t\}$ est aussi stationnaire pour $\{X_{n\delta}\}$. De plus elle est apériodique. Le théorème de convergence en loi des chaînes ergodiques apériodiques à temps discret s'applique, donnant, pour tout $x \in E$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_x(X_{n\delta} = y) = \pi_y, \quad y \in E.$$

On écrit alors

$$\mathbb{P}_x(X_t = y, X_{r_t} = x) \leq \mathbb{P}_x(X_t = y) \leq \mathbb{P}_x(X_{r_t} = x, X_t = y) + \mathbb{P}_x(X_{r_t} \neq x).$$

Le minorant est minoré par $e^{-q_x \delta} \mathbb{P}_x(X_{n_t \delta} = y)$, et le majorant est majoré par

$$\mathbb{P}_x(X_{n_t \delta} = y) + (1 - e^{-q_x \delta}).$$

On en déduit que pour t suffisamment grand, la différence $\mathbb{P}_x(X_t = y) - \pi_y$ est en $O(\delta)$ et ce pour tout $\delta > 0$, et donc que $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_x(X_t = y) = \pi_y$.

Pour une loi initiale ν arbitraire, on a

$$\mathbb{P}_\nu(X_t = y) = \sum_{x \in E} \nu_x \mathbb{P}_x(X_t = y),$$

et le théorème de convergence dominée de Lebesgue garantit alors que le terme de gauche tend vers π_y lorsque $t \rightarrow \infty$. □

On a encore une forme de réciproque:

Théorème 7.7. *Pour un processus irréductible transient ou récurrent nul, pour toute loi initiale ν et état x , on a*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_\nu(X_t = x) = 0.$$

Enfin, de même que l'existence d'une loi de probabilité stationnaire implique le caractère positif récurrent, l'existence d'une mesure stationnaire de masse totale infinie implique que le processus est transient ou récurrent nul.

Preuve. La convergence de $\mathbb{P}_\nu(X_t = x)$ vers 0 s'établit comme suit. Dans le cas transient, le processus passe un temps presque sûrement fini dans l'état x , mettons T , et donc $\mathbb{P}_\nu(X_t = x) \leq \mathbb{P}_\nu(T > t)$, ce dernier terme tendant vers $\mathbb{P}_\nu(T = +\infty) = 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$. Dans le cas récurrent nul, le processus admet une mesure invariante de masse totale infinie. Comme dans la preuve précédente, on considère pour $\delta > 0$ arbitraire la chaîne $\{X_{n\delta}\}$ à temps discret. Celle-ci ne saurait être ergodique puisqu'elle admet une mesure invariante de masse totale infinie. On a donc par le théorème sur les chaînes irréductibles non ergodiques à temps discret que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_\nu(X_{n\delta} = y) = 0$ pour tout $y \in E$. On conclut alors que $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_\nu(X_t = y) = 0$ comme dans la preuve précédente.

La deuxième partie s'établit comme suit: si le processus est récurrent, par unicité de la mesure invariante, il ne saurait être récurrent positif puisque cette unique mesure invariante a une masse infinie, et donc $\mathbb{E}_x(R_x) = +\infty$. □

Exemple 7.3. *La file $M/M/\infty$. On suppose qu'aux instants T_n d'un processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$ des clients arrivent dans un système, le client arrivant à l'instant T_n résidant alors pour un temps σ_n dans le système avant de le quitter. On suppose de plus la suite $\{\sigma_n\}$ i.i.d., indépendante de $\{T_n\}$, et chaque σ_n admettant une loi exponentielle de paramètre μ . En utilisant la propriété d'absence de mémoire de la loi exponentielle, montrer que le processus X_t comptant le nombre de clients dans le système est un processus Markovien de sauts sur \mathbb{N} de taux de transition non nuls $q_{i,i+1} = \lambda$, $q_{i,i-1} = \mu i$. Déterminer une mesure stationnaire.*

Exemple 7.4. *La file $M/M/1/\infty$. On suppose encore que des clients arrivent aux instants T_n d'un processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$, et qu'à chacun est associée une variable aléatoire σ_n distribuée comme précédemment, qu'on interprète comme le temps de service du client. On suppose qu'un unique serveur traite les clients, dans l'ordre d'arrivée (discipline FIFO: First In First Out), chaque client quittant le système dès que son service est fini. Montrer que le processus X_t comptant le nombre de clients dans la file est Markovien, de taux de transition non nuls $q_{i,i+1} = \lambda$, $q_{i,i-1} = \mu \mathbf{1}_{i>0}$.*

Quel processus de Markov obtient-on si la politique de service est "Processor Sharing", i.e. le serveur partage sa capacité de service équitablement entre les clients présents?

7.5 Critère d'ergodicité

Pour un processus Markovien de sauts, on a le critère suivant:

Théorème 7.8. *Soit un processus Markovien de sauts $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ irréductible, non-explosif sur l'espace discret E , de générateur infinitésimal Q . Si il existe une fonction $V : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ et des constantes $\epsilon > 0$, b et un ensemble fini $K \subset E$ tels que pour tout $x \in E$*

$$\sum_{y \neq x} q_{xy} [V(y) - V(x)] \leq \begin{cases} -\epsilon & \text{si } x \notin K, \\ b - \epsilon & \text{si } x \in K, \end{cases} \quad (7.4)$$

alors le processus est ergodique.

Preuve. La chaîne induite $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ a pour probabilités de transition $\mathbf{1}_{x \neq y} q_{xy} / q_x$, $x, y \in E$. Notant $N = \inf\{n > 0 : Y_n \in K\}$, on a d'après l'hypothèse (7.4) en divisant par q_y :

$$\mathbb{E}(V(Y_{n+1}) - V(Y_n) | Y_n = y) \leq -\epsilon / q_y + b \mathbf{1}_{y \in K} / q_y,$$

d'où

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(V(Y_N) - V(Y_0)) &\leq \mathbb{E} \sum_{k=0}^{N-1} (q_{Y_k}^{-1} (-\epsilon + b \mathbf{1}_{Y_k \in K})) \\ &\leq \mathbb{E} \frac{b}{q_{Y_0}} \mathbf{1}_{Y_0 \in K} - \epsilon \mathbb{E} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{q_{Y_k}}. \end{aligned}$$

Pour $Y_0 = y \in K$, notant $R(K)$ l'instant du N -ème saut, i.e. le premier saut après 0 auquel le processus se retrouve dans K , cette dernière expression donne, puisque le temps moyen de séjour dans l'état Y_k est conditionnellement en la valeur de Y_k donné par $1/q_{Y_k}$, et en utilisant le fait que V est non négative:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(R(K) | X_0 = y) &\leq \frac{1}{\epsilon} \left(V(y) + \frac{b}{q_y} \right) \\ &\leq \frac{1}{\epsilon} \sup_{z \in K} \left(V(z) + \frac{b}{q_z} \right). \end{aligned}$$

Considérons maintenant la suite $\{Z_n\}$ extraite de la chaîne induite $\{Y_n\}$, correspondant aux instants successifs où Y_n visite K . Le nombre de telles visites de Y_n à K est infini avec probabilité 1 d'après l'évaluation précédente. $\{Z_n\}$ est alors une chaîne de Markov d'après la propriété de Markov forte de $\{Y_n\}$, irréductible d'après l'irréductibilité supposée de $\{Y_n\}$. Notons p_{xy} les probabilités de transition correspondantes, $x, y \in K$. Pour tous $x, y \in K$ tels que $p_{xy} > 0$, on a

$$\mathbb{E}(R(K) | X_0 = x, Z_1 = y) \leq \sup_{z, z' \in K : p_{zz'} > 0} \frac{1}{p_{zz'}} \frac{1}{\epsilon} \sup_{z \in K} \left(V(z) + \frac{b}{q_z} \right),$$

soit une majoration $C < \infty$ uniforme en de tels $x, y \in K$.

Pour un état quelconque $x \in K$, au vu de la structure des processus de saut, on a

$$\mathbb{E}(R_x | X_0 = x) \leq C \mathbb{E}(T_x | Z_0 = x),$$

où T_x est le premier instant $n > 0$ auquel $Z_n = x$. Or la chaîne irréductible Z_n est nécessairement ergodique car à valeurs dans un ensemble fini K , donc $\mathbb{E}(T_x | Z_0 = x) < +\infty$, ce qui établit l'ergodicité du processus $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$. \square

7.6 Réversibilité

Pour un processus de Markov $\{X_t\}$, en définissant $\tilde{X}_t := X_{-t}$ son renversement en temps, on vérifie aisément qu'il satisfait encore la propriété de Markov. Supposant de plus que le processus est stationnaire, de loi invariante π , on a alors dans le cas du temps discret la matrice de probabilités de transition \tilde{P} pour \tilde{X} donnée par

$$\forall x, y \in E, \tilde{p}_{xy} = \mathbb{P}(\tilde{X}_{n+1} = y | \tilde{X}_n = x) = \mathbb{P}(X_{-n-1} = y | X_{-n} = x) = \frac{\pi_y}{\pi_x} p_{yx}.$$

Dans le cas du temps continu on obtient pareillement pour la matrice de taux de transition \tilde{Q} du processus $\{\tilde{X}\}$:

$$\forall x \neq y \in E, \tilde{q}_{xy} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}(X_{-t-h} = y | X_{-t} = x)}{h} = \frac{\pi_y}{\pi_x} q_{yx}.$$

Dans le cas particulier où la loi de $\{\tilde{X}\}$ est la même que la loi de $\{X\}$, on dit que le processus est réversible. D'après ce qui précède, le processus est réversible si et seulement si on a en temps discret l'identité sur la matrice de transition

$$\forall x, y \in E, \pi_x p_{xy} = \pi_y p_{yx},$$

et en temps continu l'identité sur le générateur infinitésimal:

$$\pi_x q_{xy} = \pi_y q_{yx}.$$

Un cas particulier intéressant concerne la restriction des taux de transition d'un processus. Pour un générateur infinitésimal Q , et un sous-ensemble $F \subset E$, on peut définir la matrice de taux \hat{Q} sur F qui est la restriction de Q à F prenant soin de modifier la diagonale: $\hat{q}_{xx} = -\sum_{y \neq x, y \in F} q_{xy}$. Alors si Q est réversible pour la loi π , on vérifie immédiatement que \hat{Q} est encore réversible pour la restriction de π à F .

Chapitre 8

Quelques modèles de réseaux

8.1 Le modèle d'Erlang: réseaux à pertes

Ce modèle fut introduit au début du siècle dernier par Agner Krarup Erlang pour modéliser la performance des réseaux téléphoniques. On considère un ensemble de liens $\ell \in \mathcal{L}$, chaque lien pouvant supporter C_ℓ communications en parallèle, et un ensemble de routes $r \in \mathcal{R}$, chaque route r empruntant un ensemble de liens $\mathcal{L}_r \subset \mathcal{L}$.

Le modèle de trafic est alors le suivant: de nouveaux appels pour la route r se présentent aux instants d'un processus de Poisson d'intensité λ_r . Si au moins un circuit est disponible sur chaque $\ell \in \mathcal{L}_r$ lors de l'arrivée d'un nouvel appel, celui-ci est accepté, et occupera un circuit sur chaque lien pendant une durée exponentiellement distribuée de paramètre μ_r . Sinon l'appel est simplement rejeté.

Le processus $\{X_t(r)\}$ comptant le nombre d'appels en cours le long de chaque route r est alors Markovien de sauts. En l'absence des rejets d'appel (i.e. si les capacités C_ℓ étaient infinies) les taux non nuls seraient $q_{x,x+e_r} = \lambda_r$, $q_{x,x-e_r} = x_r \mu_r$; pour un tel processus, qui est simplement une collection de files $M/M/\infty$ n'interagissant pas, on a la loi réversible

$$\pi_x = \prod_{r \in \mathcal{R}} e^{-\rho_r} \frac{\rho_r^{x_r}}{x_r!}, \quad x \in \mathbb{N}^{\mathcal{R}},$$

où $\rho_r = \lambda_r / \mu_r$. Le processus correspondant aux rejets d'appel dus aux capacités finies est en fait la restriction de ce processus au sous-ensemble fini

$$F = \{x \in \mathbb{N}^{\mathcal{R}} : \forall \ell \in \mathcal{L}, \sum_{r \in \mathcal{R}} A_{\ell r} x_r \leq C_\ell\}.$$

Ici on a noté $A_{\ell r} = \mathbf{1}_{\ell \in \mathcal{L}_r}$. Il admet donc, en tant que restriction d'un processus réversible à un sous-ensemble d'états F , la loi stationnaire

$$\hat{\pi}(x) \frac{1}{Z} \prod_{r \in \mathcal{R}} e^{-\rho_r} \frac{\rho_r^{x_r}}{x_r!}, \quad x \in F,$$

pour une constante de normalisation Z .

Le problème de dimensionnement consiste à choisir les capacités C_ℓ de manière à avoir une probabilité de rejet acceptable. La formule précédente fournit un angle d'attaque sur ce problème, rendu délicat par la présence de la constante de normalisation Z .

8.2 Réseaux de Jackson

On considère un ensemble I de stations de service. On suppose que le taux de départ de la station i est $\mu_i \phi_i(n)$ lorsque n clients sont présents, et qu'un client quittant i se dirige vers la station j avec une probabilité p_{ij} , et quitte définitivement le système avec probabilité $p_{i,ext} = 1 - \sum_{j \in I} p_{ij}$. On suppose

$$\sum_{j \in I} p_{ij} \leq 1$$

. Exemples:

- $\phi_i(n) = \mathbf{1}_{n>0}$: file à un serveur, servant à vitesse 1 des clients dont le temps de service est exponentiellement distribué de paramètre μ_i .
- $\phi_i(n) = n$: file avec infinité de serveurs de vitesse 1, temps de service $\text{Exp}(\mu_i)$.
- $\phi_i(n) = \min(k_i, n)$: file avec k_i serveurs.

On suppose par ailleurs que des clients externes arrivent à la station i selon un processus de Poisson d'intensité $\bar{\lambda}_i$.

On a alors les taux de transitions non nuls: $q_{n,n+e_i} = \bar{\lambda}_i$, $q_{n,n-e_i} = \phi_i(n_i) p_{i,ext}$, $q_{n,n-e_i+e_j} = \phi_i(n_i) p_{ij}$.

Equations du trafic

La loi de conservation naturelle pour les taux d'arrivée totaux λ_i , dus aux arrivées externes et aux routages probabilistes depuis des stations, est la suivante:

$$\forall i \in I, \lambda_i = \bar{\lambda}_i + \sum_{j \in I} \lambda_j p_{ji}.$$

Si la matrice $Id - P$ est inversible, ce que nous supposons, ces equations admettent pour unique solution $\lambda = (Id - P^T)^{-1} \bar{\lambda}$.

Vérifions maintenant que le processus admet pour mesure stationnaire, ayant posé $\rho_i := \lambda_i / \mu_i$:

$$\pi_n = \prod_{i \in I} \frac{\rho_i^{n_i}}{\prod_{m=1}^{n_i} \phi_i(m)}, \quad n = (n_i)_{i \in I} \in \mathbb{N}^I.$$

Le processus n'est en général pas réversible, et on ne peut donc pas espérer vérifier les equations de balance détaillée. Comme il est cependant fastidieux de vérifier les equations de balance globale données par:

$$\begin{aligned} \pi_n \left(\sum_{i,j} q_{n,n-e_i+e_j} + \sum_i q_{n,n-e_i} + \sum_j q_{n,n+e_j} \right) &= \sum_{i,j} \pi_{n-e_i+e_j} q_{n-e_i+e_j,n} + \sum_i \pi_{n-e_i} q_{n-e_i,n} \\ &\quad + \sum_j \pi_{n+e_j} q_{n+e_j,n} \end{aligned}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^I$, nous allons nous simplifier la tâche en établissant des equations de balance dite partielle, qui impliqueront la balance globale. Ces equations sont les suivantes:

$$\begin{aligned} \forall i \in I, \quad \pi_n \left(\sum_j q_{n,n-e_i+e_j} + q_{n,n-e_i} \right) &= \sum_j \pi_{n-e_i+e_j} q_{n-e_i+e_j,n} + \pi_{n-e_i} q_{n-e_i,n}, \\ \pi_n \sum_j q_{n,n+e_j} &= \sum_j \pi_{n+e_j} q_{n+e_j,n}. \end{aligned}$$

La première équation donne, en simplifiant les facteurs communs dans π :

$$\mu_i \phi_i(n_i) \left(\sum_j p_{ij} + p_{i,ext} \right) = \rho_i^{-1} \phi_i(n_i) \sum_j [\rho_j / \phi_j(n_j + 1)] p_{ji} \mu_j \phi_j(n_j + 1) + \bar{\lambda}_i,$$

qui est bien vérifiée d'après les équations de trafic. La seconde équation donne après simplification

$$\sum_j \bar{\lambda}_j = \sum_j \lambda_j p_{j,ext}.$$

Cette identité découle à nouveau des équations du trafic.

Cette loi est normalisable si et seulement si

$$\forall i, \sum_{n \geq 0} \frac{\rho_i^n}{\prod_{m=1}^n \phi_i(m)} < \infty.$$

En particulier, le processus est récurrent positif dans le cas de files à k_i serveurs si et seulement si:

$$\forall i, \rho_i < k_i.$$

8.3 File à priorités préemptives

On considère un serveur de capacité 1, et des arrivées de clients de R classes $r \in [R]$. Les clients de classe r arrivent selon un processus de Poisson d'intensité λ_r et requièrent un service exponentiel de paramètre μ_r . On note $\rho_r := \lambda_r / \mu_r$ la charge de service de la classe r .

La règle de service est la suivante. Le serveur se consacre toujours au service d'un client de plus haute priorité (par exemple en ordre FIFO au sein d'une classe), la priorité décroissant avec le label r . Il y a notamment préemption du service en cours de clients de classe r lors de l'arrivée d'un client de classe $r' < r$. Le travail effectué sur un client avant interruption n'est pas perdu, et donc le temps résiduel de service est toujours distribué selon la même loi exponentielle de paramètre μ_r .

L'absence de mémoire des lois exponentielles et l'indépendance des incréments de processus de Poisson entraîne que le processus $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ où $X_r(t)$ est le nombre de clients de classe r présents à l'instant t est Markovien de sauts à valeurs dans \mathbb{N}^R , de taux de transition non nuls

$$q_{x, x+e_r} = \lambda_r, \quad q_{x, x-e_r} = \mu_r \mathbf{1}_{x_r > 0} \mathbf{1}_{x_1 = \dots = x_{r-1} = 0}.$$

Ergodicité et transience

Montrons que le processus est ergodique si $\rho := \sum_{r \in [R]} \rho_r < 1$, et transient si $\rho > 1$.

Pour établir l'ergodicité on considère la fonction de Lyapunov $V(x) := \sum_{r \in [R]} x_r / \mu_r$.

On a alors pour tout $x \in \mathbb{N}^R$:

$$\sum_{y \neq x} q_{x,y} [V(y) - V(x)] = \sum_{r \in [R]} \rho_r - \mathbf{1}_{x \neq 0}.$$

Par ailleurs, le processus $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ est clairement irréductible (de tout état on peut revenir en 0) et non-explosif (le taux q_x est majoré uniformément en x par $\sum_{r \in [R]} \lambda_r + \mu_r$).

Posant $K = \{0\} \subset \mathbb{N}^R$, $\epsilon = 1 - \rho$, $b = 1$, la condition de "drift" de la fonction de Lyapunov V est vérifiée lorsque $\rho < 1$, d'où ergodicité.

Supposons $\rho > 1$. Notons $N_r(t)$ le nombre d'arrivées de clients de classe r dans $(0, t]$ et $D_r(t)$ le nombre de départs correspondants. Supposons $X(0) = 0$, de sorte que

$$X_r(t) = N_r(t) - D_r(t).$$

Notons $W_r(t)$ le temps passé par le serveur à travailler au service de la classe r sur $(0, t]$ et $\sigma_{r,m}$ le temps de service du m -ème client de la classe r . Il vient

$$W_r(t) \geq \sum_{m=1}^{D_r(t)} \sigma_{r,m}.$$

Un processus de Poisson N_r d'intensité λ_r vérifie la loi forte des grands nombres

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N_r(t)}{t} = \lambda_r \text{ presque sûrement.}$$

En effet, on peut écrire

$$\frac{\lfloor t \rfloor \sum_{k=0}^{\lfloor t \rfloor - 1} N_r((k, k+1])}{\lfloor t \rfloor} \leq \frac{N_r(t)}{t} \leq \frac{\lceil t \rceil \sum_{k=0}^{\lceil t \rceil - 1} N_r((k, k+1])}{\lceil t \rceil}.$$

Les variables $N_r((k, k+1])$ sont i.i.d., Poisson de paramètre λ_r , et la loi forte des grands nombres standard implique alors celle pour le processus de Poisson.

On distingue alors deux cas. Si pour un $r \in [R]$, $D_r(t) \leq \lambda_r t/2$, alors d'après la loi forte des grands nombres pour N_r , il vient que $X_r(t) \geq \lambda_r t/2 + o(t)$.

Si par contre pour tout $r \in [R]$, $D_r(t) \geq \lambda_r t/2$, alors la loi forte des grands nombres appliquée aux temps de service $\sigma_{r,m}$, et le fait que $D_r(t) \leq N_r(t) = O(t)$ impliquent que

$$W_r(t) \geq D_r(t) \frac{1}{\mu_r} + o(D_r(t)) = D_r(t) \frac{1}{\mu_r} + o(t).$$

Or $\sum_{r \in [R]} W_r(t) \leq t$ par définition. On a alors

$$V(X(t)) = \sum_{r \in [R]} [N_r(t) - D_r(t)] \frac{1}{\mu_r} \geq \sum_{r \in [R]} \rho_r t - W_r(t) + o(t) \geq t[\rho - 1] + o(t).$$

Dans un cas comme dans l'autre, on obtient une minoration en $\Omega(t)$ de $\max_{r \in [R]} X_r(t)$. Le processus est donc nécessairement transient, ne passant qu'un temps fini dans n'importe quel état de \mathbb{N}^R .

Nombre moyen de clients par classe à l'équilibre

On suppose maintenant $\rho < 1$ et $\mu_1 = \dots = \mu_R = \mu$. Pour chaque $r \leq R$ fixé, le nombre $X_{\leq r}(t) := \sum_{s \leq r} X_s(t)$ constitue alors un processus Markovien de sauts, de taux d'arrivée Poisson $\sum_{s \leq r} \lambda_s$ et de taux de départ μ sauf lorsque le système est vide.

En effet, la politique de priorité préemptive fait que la dynamique du nombre de clients de classe $s \leq r$ n'est pas affectée par le nombre de clients de classe $> r$. De plus, la distinction faite par le serveur entre clients de classe $s < r$ n'affecte pas les statistiques du processus, d'après notre hypothèse $\mu_s \equiv \mu$.

Ce sous-système est donc une file d'attente $M/M/1/\infty$ de charge $\sum_{s \leq r} \rho_s$. Le nombre moyen de clients à l'équilibre est donc donné par

$$\mathbb{E}\left(\sum_{s \leq r} X_s\right) = \frac{\sum_{s \leq r} \rho_s}{1 - \sum_{s \leq r} \rho_s}.$$

On en déduit:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_r) &= \frac{\sum_{s < r} \rho_s}{1 - \sum_{s \leq r} \rho_s} - \frac{\sum_{s < r} \rho_s}{1 - \sum_{s < r} \rho_s} \\ &= \frac{\rho_r}{(1 - \sum_{s \leq r} \rho_s)(1 - \sum_{s < r} \rho_s)}. \end{aligned}$$

Chapitre 9

Transferts dans Internet: dynamiques de flots

9.1 Modèles Markoviens du nombre de transferts en cours

Nous revisitons le problème d'allocation de bande passante abordé au chapitre 5, en nous intéressant maintenant à la dynamique des nombres de transferts en cours. Dans ce contexte, $r \in \mathcal{R}$ désigne un type de transfert, $N_r(t)$ le nombre de transferts de type r en cours à l'instant t .

On considère un modèle à temps continu, avec arrivées de nouvelles requêtes de type r aux instants d'un processus de Poisson d'intensité ν_r , et un volume de données pour chaque transfert de type r distribué selon une loi exponentielle de paramètre μ_r .

On suppose enfin que la vitesse de traitement de chacun des $N_r(t)$ transferts de type r à l'instant t , dénotée $\lambda_r(N(t))$, est l'allocation équitable des ressources du réseau selon un critère d'équité (w, α) comme introduite dans le chapitre 5. Etant donnés les liens $\ell \in \mathcal{L}$ du réseau, leur capacité C_ℓ , et la matrice d'incidence $A_{\ell r}$ des types de transferts sur les liens, $\{\lambda_r(N(t))\}_{r \in \mathcal{R}}$ est solution du problème d'optimisation

$$\begin{aligned} \max & \quad \sum_{r \in \mathcal{R}} N_r(t) U_r(\lambda_r) \\ \text{sur} & \quad \lambda \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{R}} \\ \text{tels que} & \quad \forall \ell \in \mathcal{L}, \sum_{r \in \mathcal{R}} A_{\ell r} N_r(t) \lambda_r \leq C_\ell, \end{aligned}$$

où la fonction d'utilité U_r est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, U_r(x) = \begin{cases} w_r \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{si } \alpha \neq 1, \\ w_r \ln(x) & \text{si } \alpha = 1. \end{cases}$$

Le modèle Markovien pour l'évolution de N est alors spécifié par les taux de transition non nuls suivants:

$$\begin{aligned} \forall r \in \mathcal{R}, q_{n, n+e_r} &= \nu_r \\ \forall r \in \mathcal{R}, q_{n, n-e_r} &= n_r \mu_r \lambda_r(n). \end{aligned}$$

Remarque 9.1. *On peut motiver ce modèle en invoquant une séparation d'échelles de temps, selon laquelle le contrôle de congestion convergerait en un temps quasi instantané en comparaison des échelles de temps des arrivées et départs.*

9.2 Stabilité optimale des allocations équitables

On note $\rho_r := \nu_r/\mu_r$ la charge, ou volume de travail par unité de temps qu'apportent les transferts de type r . On définit la région de stabilité du réseau comme

$$\mathcal{C} := \{z \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{R}} : \forall \ell \in \mathcal{L}, \sum_{r \in \mathcal{R}} A_{\ell r} z_r \leq C_\ell\}.$$

On a alors le résultat suivant:

Théorème 9.1. *Le processus de Markov $\{N_r(t)\}$ correspondant à une allocation (w, α) -équitable pour des poids positifs w_r , α est ergodique si il existe un $\epsilon > 0$ tel que $(1 + \epsilon)\rho \in \mathcal{C}$. Si par contre $\rho \notin \mathcal{C}$, aucune politique d'allocation de débits $\lambda_r(N)$ respectant les contraintes de capacité C_ℓ des liens $\ell \in \mathcal{L}$ ne peut rendre le processus ergodique.*

Preuve. Ergodicité: On prend comme fonction de Lyapunov

$$L(n) := \sum_{r \in \mathcal{R}} \frac{1}{\mu_r} \int_0^{n_r} U'_r(\rho_r/x) dx = \sum_{r \in \mathcal{R}} \frac{w_r}{\mu_r} \rho_r^{-\alpha} \frac{n_r^{\alpha+1}}{\alpha + 1},$$

en vue d'invoquer le critère de Foster-Lyapunov en temps continu fourni par le théorème 7.8. Pour cela il nous faut majorer la quantité $\Delta(n)$ définie comme

$$\Delta(n) := \sum_{n' \neq n} q_{n,n'} [L(n') - L(n)] = \sum_{r \in \mathcal{R}} \nu_r [L(n + e_r) - L(n)] + \mu_r n_r \lambda_r(n) [L(n - e_r) - L(n)].$$

La formule de Taylor nous donne l'existence de poids $\theta_r, \theta'_r \in (0, 1)$ tels que

$$\Delta(n) = \sum_{r \in \mathcal{R}} \nu_r \left[\frac{w_r}{\mu_r} \left(\frac{n_r + \theta_r}{\rho_r} \right)^\alpha \right] - \mu_r n_r \lambda_r(n) \left[\frac{w_r}{\mu_r} \left(\frac{n_r - \theta'_r}{\rho_r} \right)^\alpha \right].$$

On écrit alors Δ comme la somme $A + B$ avec, notant $\Lambda_r(n) := n_r \lambda_r(n)$,

$$\begin{aligned} A &:= \sum_{r \in \mathcal{R}} w_r [\rho_r - \Lambda_r(n)] \left(\frac{n_r}{\rho_r} \right)^\alpha, \\ B &:= \sum_{r \in \mathcal{R}} w_r \rho_r \left[\left(\frac{n_r + \theta_r}{\rho_r} \right)^\alpha - \left(\frac{n_r}{\rho_r} \right)^\alpha \right] - w_r \Lambda_r(n) \left[\left(\frac{n_r - \theta'_r}{\rho_r} \right)^\alpha - \left(\frac{n_r}{\rho_r} \right)^\alpha \right]. \end{aligned}$$

Pour majorer le terme A , on introduit la fonction $F : \mathbb{R}_+^{\mathcal{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \sum_{r \in \mathcal{R}} w_r n_r^\alpha \frac{x_r^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Cette fonction est concave, et maximisée sur l'ensemble des vecteurs $x \in \mathcal{C}$ par $\Lambda(n)$. Le vecteur $\{(1 + \epsilon)\rho_r\}$ appartient aussi par hypothèse à \mathcal{C} . Il s'ensuit que la fonction G définie sur $[0, 1]$ par

$$G(t) := F(t\Lambda(n) + (1-t)(1+\epsilon)\rho)$$

est concave, et maximale en $t = 1$. On a donc d'après la concavité $G'(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, 1]$ et en particulier $G'(0) \geq 0$. En explicitant cette dérivée il vient

$$\sum_{r \in \mathcal{R}} [\Lambda_r(n) - (1 + \epsilon)\rho_r] w_r n_r^\alpha ((1 + \epsilon)\rho_r)^{-\alpha} \geq 0.$$

Cela implique

$$A \leq -\epsilon \sum_{r \in \mathcal{R}} w_r \rho_r^{1-\alpha} n_r^\alpha.$$

On majore maintenant B . Argumentant comme dans les preuves d'ergodicité pour les politiques de poids maximal, on obtient facilement que pour des constantes C_1, C_2 choisies de manière appropriée, on a

$$B \leq C_1 + C_2 (\max_{r \in \mathcal{R}} n_r)^{\max(0, \alpha-1)}.$$

Les conditions du critère de Foster en découlent alors aisément.

Non-ergodicité: On suppose maintenant $\rho \notin \mathcal{C}$. Il existe donc un vecteur b , qu'on peut choisir non négatif de par la propriété de monotonie de \mathcal{C} , et une constante $\delta > 0$ tels que pour tout $\Lambda \in \mathcal{C}$,

$$\sum_{r \in \mathcal{R}} b_r \Lambda_r + \delta \leq \sum_{r \in \mathcal{R}} b_r \rho_r.$$

On considère la variable $V_t := \sum_{r \in \mathcal{R}} (b_r / \mu_r) N_r(t)$, et on note $A_r(t), D_r(t)$ le nombre d'arrivées et de départs de transferts de type r sur $[0, t]$. On suppose par ailleurs $N(0) = 0$. On a alors $N_r(t) = A_r(t) - D_r(t)$. Notons $W_r(t)$ le travail cumulé consacré à la classe r sur $[0, t]$, et $L_r(t) := W_r(t)/t$. Par convexité de la région \mathcal{C} , le vecteur $L(t)$ appartient à \mathcal{C} . Par ailleurs, notant $\sigma_r(n)$ les volumes de service requis par les arrivées successives de type r , on a

$$\sum_{n=1}^{D_r(t)} \sigma_r(n) \leq W_r(t).$$

Si pour un $r \in \mathcal{R}$, on a $D_r(t) \leq \nu_r t/2$, alors $V_t = \Omega(t)$, par la loi des grands nombres selon laquelle $A_r(t) = \nu_r t(1 + o(1))$. Si par contre chaque $D_r(t) \geq \nu_r t/2$, on a alors, par la loi des grands nombres appliquée aux $\sigma_r(n)$:

$$\sum_{n=1}^{D_r(t)} \sigma_r(n) = D_r(t) [\mu_r^{-1} + o(1)] \leq t L_r(t).$$

Ceci entraîne

$$V_t = \sum_{r \in \mathcal{R}} (b_r / \mu_r) [A_r(t) - D_r(t)] \geq \sum_{r \in \mathcal{R}} b_r [\rho_r(t + o(t)) - (t + o(t)) L_r(t)].$$

Ceci entraîne $V_t \geq \delta t + o(t)$. On a donc établi $V_t = \Omega(t)$. Donc presque sûrement, $\liminf_{t \rightarrow \infty} V_t/t > 0$. Ceci implique que le processus est nécessairement transient. \square

Remarque 9.2. Pour établir l'ergodicité on a seulement utilisé le fait que le domaine \mathcal{C} sur lequel on optimise l'utilité totale des allocations $\Lambda(n)$ par classe est convexe. Le résultat peut donc s'appliquer au cas où le contrôle de congestion optimise l'utilité obtenue en utilisant plusieurs routes.

Plus précisément, supposons que chaque classe r d'utilisateurs dispose d'un ensemble \mathcal{S}_r de chemins possibles le long desquels transférer des données, un chemin $s \in \mathcal{S}_r$ utilisant les liens ℓ tels que $A_{\ell s} = 1$, pour une matrice d'incidence A . La généralisation naturelle de l'allocation équitable à ce cadre consiste à allouer aux n_r usagers de classe r un débit $\lambda_r = \sum_{s \in \mathcal{S}_r} y_{rs}$ caractérisé comme réalisant

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{r \in \mathcal{R}} n_r U_r(\sum_{s \in \mathcal{S}_r} y_{rs}) \\ \text{sur} \quad & y_{rs} \geq 0, \quad r \in \mathcal{R}, \quad s \in \mathcal{S}_r, \\ \text{tels que} \quad & \sum_{r \in \mathcal{R}} \sum_{s \in \mathcal{S}_r} A_{\ell s} n_r y_{rs} \leq C_\ell, \quad \ell \in \mathcal{L}. \end{aligned}$$

On a alors ergodicité si pour un $\epsilon > 0$, $(1 + \epsilon)\rho \in \mathcal{C}$, en définissant maintenant \mathcal{C} comme l'ensemble des vecteurs $z_r \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{R}}$ tels qu'il existe $z_{rs} \geq 0$, $s \in \mathcal{S}_r$ vérifiant

$$\begin{aligned} \forall r \in \mathcal{R}, z_r &= \sum_{s \in \mathcal{S}_r} z_{rs}, \\ \forall \ell \in \mathcal{L}, \sum_{r \in \mathcal{R}} \sum_{s \in \mathcal{S}_r} z_{rs} &\leq C_\ell. \end{aligned}$$

9.3 Comparaison entre politiques de poids maximal et de comparaison d'utilité

La politique de poids maximal consiste à allouer les capacités $\{\Lambda_r\}_{r \in \mathcal{C}}$ dédiées à chaque classe $r \in \mathcal{R}$ qui résolvent le problème

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{r \in \mathcal{R}} \phi_r(N_r) \Lambda_r \\ \text{sur} \quad & \Lambda_r \geq 0 \\ \text{tels que} \quad & \{\Lambda_r\}_{r \in \mathcal{C}}, \end{aligned}$$

où on a considéré particulièrement le cas des fonctions de poids $\phi_r(x) = w_r x_r^\alpha$.

Par contraste, la politique de maximisation d'utilité consiste à allouer les capacités $\{\Lambda_r\}_{r \in \mathcal{C}}$ à chaque classe $r \in \mathcal{R}$ solutions du problème alternatif

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{r \in \mathcal{R}} N_r U_r(\Lambda_r/N_r) \\ \text{sur} \quad & \Lambda_r \geq 0 \\ \text{tels que} \quad & \{\Lambda_r\}_{r \in \mathcal{C}}, \end{aligned}$$

où on a considéré particulièrement le case de fonctions d'utilité $U_r(x) = w_r x^{1-\alpha}/(1-\alpha)$.

Au détail près qu'on a étudié la première politique dans un modèle à temps discret, et la seconde dans un modèle à temps continu¹, on a vu que ces deux politiques sont maximalelement stables pour un ensemble \mathcal{C} convexe: dès que le vecteur $\{\rho_r\}_{r \in \mathcal{R}}$ des volumes de travail arrivant par unité de temps et par classe r appartient à l'intérieur $\overset{\circ}{\mathcal{C}}$ de la région \mathcal{C} , alors chacun des processus est ergodique.

Un intérêt de l'allocation équitable est qu'elle peut être réalisée de manière distribuée par les mécanismes de contrôle de congestion qu'on a vus au chapitre 5 qui ne nécessitent pas de coordination directe entre chaque transfert d'un type donné r . En particulier la valeur N_r du nombre de tels transferts en cours n'est explicitement utilisée ou connue par aucun élément du système.

L'allocation de poids maximal pourrait être réalisée en utilisant des algorithmes de type "primal-dual", cf. chapitre 5:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Lambda_r &= \kappa_r [\phi_r(N_r) - \sum_{\ell \in \mathcal{L}} A_{\ell r} p_\ell], \\ \frac{d}{dt} p_\ell &= \gamma_\ell [\sum_{r \in \mathcal{R}} \Lambda_r - C_\ell]. \end{aligned}$$

Cet algorithme s'implémente de manière distribuée entre une entité ajustant le débit Λ_r pour chaque $r \in \mathcal{R}$, et une entité ajustant le prix p_ℓ pour chaque $\ell \in \mathcal{L}$. Dans le contexte du contrôle de congestion d'Internet, on n'a pas d'agent régulant le débit agrégé Λ_r , mais plutôt N_r agents distincts régulant leur débit individuel.

Une autre différence entre les résultats que nous avons énoncés pour chaque politique est que pour le poids maximal, nous avons autorisé le vecteur des débits $\{\Lambda_r\}_{r \in \mathcal{R}}$ à appartenir à un ensemble discret \mathcal{S} dépendant éventuellement du temps, et la région de capacité \mathcal{C} est alors l'enveloppe convexe de \mathcal{S} (convenablement "moyennée" dans le cas où elle varie de manière i.i.d. en temps). Par contraste le résultat pour la politique de maximisation d'utilité présuppose que l'ensemble des débits réalisables est convexe.

¹On pourrait parfaitement considérer un modèle à temps continu de la politique de poids maximal par exemple

9.4 Un cas particulier réversible

On considère un réseau “linéaire” comme en Figure 9.5.1, constitué de L liens de capacité unitaire, et de $L + 1$ classes de transferts. La classe 0 requiert simultanément tous les L liens alors que la classe ℓ ne requiert que le lien ℓ , $\ell \in [L]$.

Notant x_r le nombre de transferts en cours de la classe r et $y = \sum_{r=1}^L x_r$, on montre aisément que l’allocation proportionnellement équitable consiste alors à allouer

$$x_0 \lambda_0 = \frac{x_0}{x_0 + y}$$

à la classe 0, et

$$x_r \lambda_r = \frac{y}{x_0 + y} \mathbf{1}_{x_r > 0}$$

à la classe r pour $r \in [L]$.

On vérifie alors que la mesure μ définie par

$$\mu(x) = \binom{y + x_0}{x_0} \prod_{r=0}^L \rho_r^{x_r}$$

est réversible pour ce processus. En utilisant la formule binomiale négative,

$$\sum_{x_0 \geq 0} \binom{y + x_0}{x_0} \rho_0^{x_0} = (1 - \rho_0)^{-y-1},$$

valide pour tout $y \in \mathbb{N}$ et $\rho_0 \in (-1, 1)$, la somme sur x_0 de $\mu(x)$ s’écrit, supposant $\rho_0 < 1$ (ce qui est clairement nécessaire pour que π soit sommable)

$$(1 - \rho_0)^{-1} \prod_{r=1}^L [\rho_r / (1 - \rho_0)]^{x_r}.$$

On retrouve bien que π est sommable, et donc le processus est ergodique, si et seulement si $\rho_0 + \rho_r < 1$ pour tout $r \in [L]$.

Sous cette condition, la loi stationnaire est donnée par

$$\pi(x) = \binom{y + x_0}{x_0} (1 - \rho_0)^{-L+1} \prod_{r=1}^L (1 - \rho_0 - \rho_r) \prod_{r=0}^L \rho_r^{x_r}.$$

Enfin, on obtient pour $z_0, \dots, z_L \in [0, 1]$ la fonction génératrice

$$\mathbb{E} \prod_{r=0}^L z_r^{X_r} = \frac{(1 - \rho_0 z_0)^{L-1}}{(1 - \rho_0)^{L-1}} \prod_{r=1}^L \frac{1 - \rho_0 - \rho_r}{1 - \rho_0 z_0 - \rho_r z_r}.$$

On en déduit les fonctions génératrices individuelles, en mettant tous les z à 1 sauf un seul:

$$\forall r \in [L], \mathbb{E}_{z_r} X_r = \frac{1 - \rho_0 - \rho_r}{1 - \rho_0 - \rho_r z_r},$$

qui est la fonction génératrice d’une variable géométrique de paramètre $\rho_r / (1 - \rho_0)$, et donc de moyenne

$$\mathbb{E}(X_r) = \frac{\rho_r}{1 - \rho_0 - \rho_r}.$$

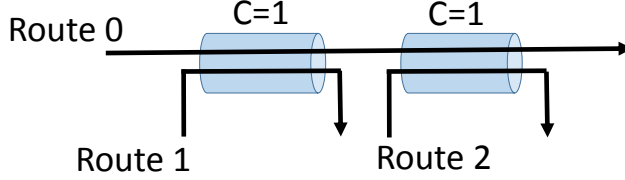


Figure 9.1: Réseau à deux liens et trois routes

La fonction génératrice de X_0 est

$$\mathbb{E}(z_0^{X_0}) = \left(\frac{1 - \rho_0 z_0}{1 - \rho_0} \right)^{L-1} \prod_{r=1}^L \frac{1 - \rho_0 - \rho_r}{1 - \rho_0 z_0 - \rho_r}.$$

En prenant sa dérivée logarithmique en 1 on obtient

$$\mathbb{E}(X_0) = \frac{\rho_0}{1 - \rho_0} \left[1 + \sum_{r=1}^L \frac{\rho_r}{1 - \rho_0 - \rho_r} \right].$$

9.5 Exemples de région de stabilité sous-optimale

9.5.1 Priorités strictes

On considère le réseau de la figure 9.5.1, à deux liens $\ell = 1, 2$ de capacité unitaire, acheminant des transferts de trois types: le type 0 utilisant les deux liens et le type i ($i = 1, 2$) utilisant uniquement le lien i .

On sait qu'une allocation équitable rend le processus $\{N_i\}$ ergodique dès que $\rho_0 + \rho_1 < 1$ et $\rho_0 + \rho_2 < 1$.

Considérons une allocation alternative qui alloue un débit nul à la classe 0 et un débit de 1 aux classes 1,2 dès que N_1 ou $N_2 > 0$, et alloue un débit de 1 à la classe 0 si $N_1 = N_2 = 0$. Une telle allocation pourrait résulter d'une allocation avec priorité stricte aux paquets des transferts de type 1, 2 sur les paquets de type 0 aux liens, couplé à un algorithme de contrôle de congestion de type TCP au niveau des sources de trafic.

Les processus N_1, N_2 sont alors des processus de files d'attente $M/M/1/\infty$, mutuellement indépendants. Par le théorème ergodique, on a alors la limite presque sûre

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{1}_{N_1(t)=N_2(t)=0} dt = \mathbb{P}_{stat}(N_1(0) = 0, N_2(0) = 0) = (1 - \rho_1)(1 - \rho_2).$$

Supposons $\rho_0 > (1 - \rho_1)(1 - \rho_2)$. Notons $A_0(t)$ le nombre d'arrivées de type 0 dans $[0, t]$, et σ_i le temps de service de la i -ème requête de type 0. On peut considérer un service FIFO, cela ne change pas la loi du processus de Markov. Le nombre maximal de clients de type 0 traité à l'instant T est alors

$$D_0(t) = \max\{n \leq A_0(T) : \sum_{i=1}^n \sigma_i \leq \int_0^T \mathbf{1}_{N_1(t)=N_2(t)=0} dt\}.$$

D'après la loi des grands nombres,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma_i = \frac{1}{\mu_0}.$$

On en déduit que presque sûrement,

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{D_0(T)}{T} \frac{1}{\mu_0} \leq (1 - \rho_1)(1 - \rho_2).$$

En effet, d'après la loi des grands nombres pour les σ_i et celle pour $\mathbf{1}_{N_1(t)=N_2(t)=0}$, on a

$$\sum_{i=1}^{D_0(T)} \sigma_i = D_0(T)[\mu_0^{-1} + o(1)] \leq \int_0^T \mathbf{1}_{N_1(t)=N_2(t)=0} dt = T[o(1) + (1 - \rho_1)(1 - \rho_2)]$$

On en déduit, écrivant $N_0(t) = A_0(t) - D_0(t)$, que

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{N_0(T)}{T} \geq \lambda_0 - \mu_0(1 - \rho_1)(1 - \rho_2) > 0,$$

et donc presque sûrement $A_0(T) \rightarrow \infty$ lorsque $T \rightarrow \infty$.

Par exemple, prenant $\rho_i \equiv 2/5$, le système avec allocation équitable est stable, la charge sur chaque lien étant de $4/5$, alors que pour le système avec priorité, le système est instable avec $\rho_0 = 2/5 > (1 - \rho_1)(1 - \rho_2) = 9/25$.

9.5.2 Transports multi-chemins non coordonnés

On considère le réseau triangulaire de la figure 9.5.2, avec allocation α -équitable sur chaque chemin, et deux routes possibles pour chaque transfert: l'une, directe, en un bond et l'autre en deux bonds.

On suppose que chacun des trois types de trafic a les mêmes paramètres $\lambda, \mu, \rho = \lambda/\mu$ et que chaque lien est de capacité unitaire. Dans ce cas, la condition de stabilité est $\rho < 1$: les chemins alternatifs n'augmentent pas la région de stabilité. Tout partage équitable coordonné stabilise le système dès que $\rho < 1$.

On va considérer un modèle où chaque transfert utilise simultanément deux chemins, l'allocation sur chaque chemin étant α -équitable. Si $N_r = n$, $r = 1, 2, 3$, alors par symétrie il existe un multiplicateur $p \geq 0$ tel que le débit direct x_{dir} et le débit indirect x_{ind} sont donnés par

$$x_{dir}^{-\alpha} = p, \quad x_{ind}^{-\alpha} = 2p,$$

la condition de capacité étant

$$nx_{dir} + 2nx_{ind} = 1.$$

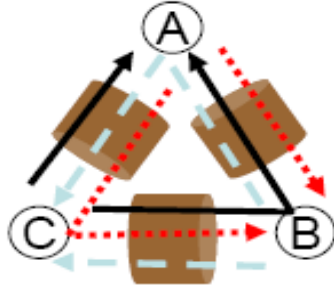


Figure 9.2: Réseau triangulaire avec routes alternatives

On en déduit

$$np^{-1/\alpha}[1 + 2^{1-1/\alpha}] = 1,$$

et le débit total obtenu par chacune des classes est donc:

$$n[x_{dir} + x_{ind}] = np^{-1/\alpha}[1 + 2^{-1/\alpha}] = \frac{1 + 2^{-1/\alpha}}{1 + 2^{1-1/\alpha}}.$$

Par exemple pour l'équité proportionnelle $\alpha = 1$, ce débit vaut $3/4$; pour tout $\alpha > 0$ il est strictement plus petit que 1.

Cette analyse suggère de manière heuristique, que dans le cas de trafic symétrique, la condition de stabilité avec utilisation de chemins multiples de manière non coordonnée est $\rho < \frac{1+2^{-1/\alpha}}{1+2^{1-1/\alpha}} < 1$. Pour des éléments de preuve de ce résultat, voir [11].

Chapitre 10

Epidémies SI (Susceptible - Infecté)

Nous considérons ici un processus de propagation simple, correspondant à une épidémie dans laquelle les individus une fois infectés restent infectieux, et continuent à tenter de propager l'épidémie autour d'eux. Nous supposons par ailleurs une topologie uniforme, où chacun est connecté à chacun (graphe complet).

10.1 Modèle de propagation

n individus sont connectés entre eux selon un graphe $G = (V, E)$, avec $V = [n]$. Nous supposons ce graphe non-orienté, et complet, i.e. l'ensemble des arêtes E contient toutes les paires non-orientées (i, j) de $[n]$.

Le processus de propagation est alors le suivant. Un individu infecté tente, aux instants d'un processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$, d'infecter l'un de ses voisins du graphe, choisi uniformément au hasard. Si ce choix tombe sur un voisin précédemment non infecté, ce dernier devient alors infecté, et commence alors à contaminer ses voisins selon le même processus.

Notons qu'une description équivalente du mode de contamination est la suivante. Un noeud infecté, ayant d voisins (dans le cas du graphe complet, $d = n - 1$) cherche à infecter individuellement chacun de ses voisins aux instants d'un processus de Poisson d'intensité λ/d .

Notons X_t le nombre d'individus infectés à l'instant t . Conditionnant par rapport à l'historique détaillé du processus sur l'intervalle $[0, t]$, d'après la propriété d'indépendance des incréments du processus de Poisson, et la symétrie du choix uniforme des cibles potentielles par chacun, on voit que $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un processus Markovien de sauts sur \mathbb{R}_+ . Le seul taux de transition non nul est donné par:

$$q_{x, x+1} = \lambda x \frac{n-x}{n-1}.$$

En effet, le prochain instant avant une tentative d'infection est le minimum de x variables aléatoires exponentielles de paramètre λ , et donc exponentielle de paramètre $x\lambda$. De plus, cette tentative d'infection réussit avec probabilité $(n-x)/(n-1)$, la probabilité qu'une variable aléatoire uniforme sur un ensemble de $n-1$ voisins sélectionne l'un des $n-x$ voisins non encore infectés.

Le prochain instant avant infection est donc le premier point d'un processus de Poisson d'intensité λx dont on ne conserve les points qu'avec probabilité $(n-x)/(n-1)$. Le taux annoncé en découle.

Supposant $X_0 = 1$, nous obtenons ainsi pour tout $m \in [n - 1]$ une description explicite du temps avant infection de m individus, T_m , donnée par la formule

$$T_m = \sum_{x=1}^{m-1} \frac{n-1}{\lambda x(n-x)} E_x, \quad (10.1)$$

où les E_x sont des variables aléatoires i.i.d., exponentielles de paramètre 1.

10.2 Contrôle du temps avant infection totale

Nous allons établir le contrôle suivant sur T_n , le temps avant infection totale:

Lemme 10.1. *Pour $\lambda > 0$ fixé, la variable T_n vérifie:*

$$\mathbb{E}(T_n) = \sum_{x=1}^{n-1} \frac{n-1}{\lambda x(n-x)} = \frac{1}{\lambda} [2 \ln(n) + 2\gamma + o(1)], \quad (10.2)$$

où γ est la constante d'Euler. De plus, pour tout $\theta \in [0, 1/2]$, la variable aléatoire $S_n := \lambda(T_n - \mathbb{E}(T_n))$ est telle que

$$\mathbb{E}(\exp(\theta S_n)) \leq \exp(8\theta^2 \pi^2 / 6) =: C_\theta < +\infty. \quad (10.3)$$

Preuve. Notant $H(k) = \sum_{x=1}^k 1/x$ le k -ème nombre harmonique, la moyenne de T_n est clairement donnée par

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^{n-1} \frac{n-1}{\lambda x(n-x)} &= \frac{(n-1)}{n\lambda} \sum_{x=1}^{n-1} \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{n-x} \right] \\ &= \frac{1}{\lambda} (1 + O(1/n)) [2H(n-1)] = \frac{1}{\lambda} (1 + O(1/n)) [2 \ln(n) + 2\gamma + o(1)], \end{aligned}$$

d'où l'équivalent de la moyenne annoncé.

On fixe $\theta \in [0, 1/2]$. Il vient, notant $\lambda_x := x(n-x)/(n-1)$, et remarquant que $\theta \leq 1/2 < 1 \leq \lambda_x$ pour tout $x \in [n-1]$:

$$\mathbb{E}(\exp(\theta S_n)) = \prod_{x=1}^{n-1} \left\{ \frac{\lambda_x}{\lambda_x - \theta} e^{-\theta/\lambda_x} \right\}.$$

L'inégalité

$$e^{-u} \leq 1 - u + u^2$$

est vraie pour tout $u \in (0, 1/2]$, comme on le vérifie en étudiant les variations de $u \rightarrow e^{-u} - 1 + u - u^2$. Son corollaire,

$$\frac{e^{-u}}{1-u} \leq 1 + 2u^2,$$

lui aussi vrai pour $u \in [0, 1/2]$, nous donne, appliqué à $u = \theta/\lambda_x$, qui est inférieur ou égal à $1/2$ par hypothèse:

$$\mathbb{E}(\exp(\theta S_n)) \leq \prod_{x=1}^{n-1} [1 + 2(\theta/\lambda_x)^2].$$

Utilisant maintenant l'inégalité $1 + u \leq e^u$, vraie pour tout $u \in \mathbb{R}$, il vient

$$\mathbb{E}(\exp(\theta S_n)) \leq \exp \left(\sum_{x=1}^{n-1} 2\theta^2 \lambda_x^{-2} \right).$$

Majorant λ_x^{-2} par $2(1/x^2 + 1/(n-x)^2)$, on obtient

$$\mathbb{E}(\exp(\theta S_n)) \leq \exp\left(8\theta^2 \sum_{x=1}^{n-1} \frac{1}{x^2}\right) \leq \exp(8\theta^2 \pi^2/6)$$

comme annoncé. \square

La conclusion directe de ce lemme est que l'épidémie prend un temps moyen logarithmique pour se propager à tous. Le second résultat va nous permettre de contrôler les fluctuations de ce temps de propagation totale.

On rappelle maintenant l'inégalité de Markov: une variable aléatoire X non négative est telle que, pour tout $a > 0$,

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a},$$

et l'inégalité de Bienaymé-Tchebitchev, son corollaire obtenu en prenant pour une variable aléatoire réelle Y de variance σ_Y^2 finie et $b > 0$, $X = (Y - \mathbb{E}(Y))^2$ dans l'inégalité de Markov:

$$\mathbb{P}(|Y - \mathbb{E}(Y)| \geq b) \leq \frac{\sigma_Y^2}{b^2}.$$

Ces inégalités admettent une variante très puissante, obtenue en prenant l'exponentielle de la variable aléatoire dont on veut contrôler les fluctuations. Il vient, pour tout $\theta > 0$, toute variable aléatoire X et tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{P}(X \geq t) = \mathbb{P}(e^{\theta X} \geq e^{\theta t}) \leq e^{-\theta t} \mathbb{E}(e^{\theta X}).$$

Appliquée à la variable S_n , cette inégalité donne avec le Lemme précédent:

Corollaire 10.1. *Pour tout $\theta \in (0, 1/2]$, tout $t \in \mathbb{R}$, on a:*

$$\mathbb{P}(S_n \geq t) \leq e^{-\theta t} C_\theta. \quad (10.4)$$

Cette dernière borne montre que S_n , et donc le temps avant infection complète T_n , n'a pas de fluctuations importantes au-delà de sa moyenne.

Voyons maintenant une application de cette inégalité à une variante du problème de propagation initial.

10.3 Propagation de tous vers tous

On considère désormais qu'initialement chaque individu $i \in [n]$ est détenteur d'un virus (ou message) qui lui est spécifique. De plus, lorsqu'un individu tente d'infecter un autre, il lui transmet l'intégralité des virus (ou messages) qu'il détient à cet instant, le processus de tentative d'infection étant par ailleurs identique à celui du scénario précédent.

On s'intéresse alors au temps qu'il faut pour que chacun ait reçu tous les messages initialement présents dans le système. Pour cela nous utiliserons le résultat suivant:

Lemme 10.2. *Soient n variables aléatoires $S^{(1)}, \dots, S^{(n)}$ telles que pour deux constantes $a, b > 0$ et tout $t > 0$ on ait*

$$\forall i \in [n], \mathbb{P}(S^{(i)} \geq t) \leq ae^{-bt}. \quad (10.5)$$

Alors:

$$\forall t \geq 0, \mathbb{P}(\sup_{i \in [n]} S^{(i)} \geq t) \leq nae^{-bt}, \quad (10.6)$$

et:

$$\mathbb{E}(\sup_{i \in [n]} S^{(i)}) \leq \mathbb{E}[(\sup_{i \in [n]} S^{(i)})^+] \leq \frac{\ln(an) + 1}{b}. \quad (10.7)$$

Preuve. Par la borne de l'union (la probabilité d'une union d'événements est majorée par la somme des probabilités de ces événements) on a

$$\mathbb{P}(\sup_{i \in [n]} S^{(i)} \geq t) \leq \sum_{i \in [n]} \mathbb{P}(S^{(i)} \geq t) \leq nae^{-bt},$$

où on a utilisé l'hypothèse (10.5). Comme pour toute variable aléatoire X non négative,

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{\infty} \mathbb{P}(X \geq t) dt,$$

il vient

$$\mathbb{E}[(\sup_{i \in [n]} S^{(i)})^+] \leq \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(\sup_{i \in [n]} S^{(i)} \geq t) dt.$$

On borne la probabilité dans cette dernière intégrale par 1 ou par nae^{-bt} selon que $t < \ln(na)/b$ ou non. On obtient alors la borne annoncée. \square

Corollaire 10.2. *Dans le scénario de propagation de tous vers tous, le temps T avant que chacun ne reçoive tous les messages a son espérance majorée par*

$$\mathbb{E}(T) \leq \frac{1}{\lambda} \left[2 \ln(n) + 2\gamma + o(1) + \frac{1 + \ln(C_\theta n)}{\theta} \right]$$

pour tout $\theta \in (0, 1/2]$, où $C_\theta = \exp(8\theta^2\pi^2/6)$.

Preuve. On remarque que la diffusion de chaque message suit un processus identique à la propagation SI précédente. Le temps T de propagation totale s'exprime donc bien comme maximum de n temps de propagation, $T^{(i)}$, $i \in [n]$. On peut alors appliquer le Lemme précédent. \square

En d'autres termes, en considérant la propagation de tous vers tous plutôt que la propagation d'un vers tous, on obtient une borne sur le temps total d'infection encore d'ordre logarithmique, soit qualitativement du même ordre de grandeur que dans le cas SI de base.

Chapitre 11

Processus de branchement de Galton-Watson

Le processus de branchement de Galton-Watson représente un arbre généalogique, et se construit de la manière suivante.

Chaque individu donne naissance à un nombre aléatoire d'enfants, et ce indépendamment du nombre d'enfants engendrés par tous les autres individus. La loi $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ caractérise le nombre d'enfants par individu. Partant d'un unique ancêtre, le processus est ainsi spécifié.

Plus formellement, le nombre d'individus Z_k à la génération $k \in \mathbb{N}$ vérifie alors

$$Z_0 = 1, Z_k = \sum_{m=1}^{Z_{k-1}} X_{m,k}, k \geq 1,$$

où les $\{X_{m,k}\}_{m,k \geq 1}$ sont i.i.d. et de loi $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}}$.

11.1 Probabilité d'extinction

Notant p_{ext} la probabilité d'extinction i.e. la probabilité de l'événement $\{\exists k \geq 1 : Z_k = 0\}$, soit encore l'événement que l'ancêtre a une descendance finie, on a le

Théorème 11.1. *La probabilité d'extinction p_{ext} est la plus petite racine dans $[0, 1]$ de l'équation*

$$x = \phi(x), \tag{11.1}$$

où $\phi(x) := \mathbb{E}(x^X) = \sum_{k \geq 0} p_k x^k$.

Si $\mu := \mathbb{E}(X) < 1$ alors $p_{ext} = 1$. Si $\mu > 1$ alors $p_{ext} < 1$. Si $\mu = 1$ alors $p_{ext} = 0$ ou 1 selon que $p_0 = 0$ ou $p_0 > 0$.

Preuve. Notant $\phi_k(x) = \mathbb{E}(x^{Z_k})$ on a $\phi_0(x) = x$ et

$$\phi_k(x) = \mathbb{E}(\phi(x)^{Z_{k-1}}) = \phi_{k-1}(\phi(x)),$$

soit par récurrence $\phi_k(x) = \phi^{\circ k}(x)$.

Comme $\mathbb{P}(Z_k = 0) = \phi_k(0)$, il vient

$$\mathbb{P}(Z_k = 0) = \phi(\mathbb{P}(Z_{k-1} = 0)).$$

La fonction ϕ est non-décroissante sur $[0, 1]$, et $\mathbb{P}(Z_0 = 0) = 0$. Donc pour tout point fixe $x^* \in [0, 1]$ de l'équation $\phi(x) = x$, on a par récurrence

$$\mathbb{P}(Z_k = 0) \leq x^*.$$

La monotonie de ϕ entraîne aussi que le terme dans le membre de gauche croît avec k . L'événement $\{Z_k = 0\}$ croît vers l'événement d'extinction, donc le membre de gauche ci-dessus croît vers p_{ext} . Par continuité de ϕ , nécessairement p_{ext} est point fixe de $x = \phi(x)$, et est inférieur ou égal à tout autre point fixe x^* d'après l'inégalité précédente.

Notant $\mu = \mathbb{E}(X)$, il vient $\phi'(1^-) = \mu$. ϕ est convexe sur $[0, 1]$, et donc au-dessus de sa tangente en 1. Si $\mu < 1$, le seul point fixe dans $[0, 1]$ est alors 1, d'où $p_{ext} = 1$.

Si $\mu > 1$, au voisinage de 1 on a $\phi(1 - \epsilon) = 1 - \epsilon\mu + o(\epsilon)$, strictement inférieur à $1 - \epsilon$ pour ϵ assez petit¹. Par continuité de ϕ , puisque $\phi(0) \geq 0$, il existe alors un point fixe dans $(0, 1 - \epsilon)$ et donc $p_{ext} < 1$.

Si $p_0 = 0$, de manière évidente $p_{ext} = 0$. Le dernier cas à considérer est celui où $p_0 > 0$ et $\mu = 1$. Lorsque $p_0 > 0$ et $\mu = 1$, nécessairement $p_0 + p_1 < 1$, et donc ϕ est strictement convexe. Elle est alors strictement au-dessus de sa tangente en 1 sur $[0, 1)$. Le seul point fixe est donc $x = 1$, d'où $p_{ext} = 1$. \square

11.2 Parcours “un par un” ou par marche aléatoire

Le résultat précédent découle naturellement d'une construction génération par génération du processus de branchement de Galton-Watson. Une construction alternative, mettant en lumière un lien entre ce processus et une marche aléatoire simple, s'avère utile pour contrôler la loi du nombre total d'individus dans le processus, ainsi que pour décrire la loi d'un processus sur-critique ($\mu > 1$) conditionnellement à l'événement d'extinction.

La construction alternative procède comme suit. A chaque étape $t \in \mathbb{N}$ de la construction, A_t représente le nombre d'individus déjà ajoutés au processus, et pour lesquels on n'a pas encore ajouté leurs enfants. On dit aussi que A_t est le nombre d'individus *actifs* à l'étape t .

Partant de $A_0 = 1$ à $t = 0$, l'ancêtre étant l'unique individu actif initial, on passe de l'étape $t - 1$ à l'étape t en sélectionnant un individu actif, en le retirant de l'ensemble des individus actifs, et en y rajoutant les enfants de cet individu ainsi désactivé.

On a donc l'équation d'évolution:

$$A_t = A_{t-1} - 1 + X_t,$$

où les $\{X_t\}_{t \geq 1}$ sont i.i.d. de loi $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. Il est clair qu'on peut construire l'arbre de Galton-Watson de la manière suivante. Au premier instant t pour lequel $A_t = 0$, la construction s'achève, l'événement d'extinction ayant lieu si et seulement si A_t atteint éventuellement 0.

Inégalité de Chernoff

Cette inégalité est donnée par:

¹Ce développement limité présuppose que $\mu < +\infty$. Dans le cas où $\mu = +\infty$ on considère $\tilde{\phi}(x) = \mathbb{E}(x^{X \wedge M})$ avec $M > 0$ suffisamment grand pour que $\tilde{\mu} = \mathbb{E}(X \wedge M) > 1$, et on applique ce raisonnement pour établir que la probabilité d'extinction \tilde{p}_{ext} pour la loi modifiée du nombre d'enfants $X \wedge M$ est inférieure à 1. On invoque enfin le fait aisément établi que $p_{ext} \leq \tilde{p}_{ext}$.

Théorème 11.2. *Pour une suite de variables aléatoires i.i.d. X_1, \dots, X_n et tout $a \in \mathbb{R}$, on a l'inégalité*

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i \geq na\right) \leq e^{-nh(a)}, \quad (11.2)$$

où $h(a) := \sup_{\theta > 0} \{\theta a - \ln[\mathbb{E}e^{\theta X_1}]\}$.

Preuve. Pour tout $\theta > 0$ on a

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i \geq na\right) = \mathbb{P}(e^{\sum_{i=1}^n \theta X_i} \geq e^{n\theta a}) \leq e^{-na} \mathbb{E}(e^{\sum_{i=1}^n \theta X_i}),$$

où on a utilisé l'inégalité de Markov selon laquelle, pour $b > 0$ et une variable aléatoire Y non négative, $\mathbb{P}(Y \geq b) \leq \mathbb{E}(Y)/b$.

Le membre de droite ci-dessus s'écrit encore $\exp(-n[\theta a - \log(\mathbb{E}e^{\theta X_1})])$. En optimisant cette borne sur $\theta > 0$ on obtient l'inégalité de Chernoff. \square

Remarque 11.1. *La borne de Chernoff est non triviale si $\mathbb{E}(|X_1|) < +\infty$, $a > \mathbb{E}(X_1)$ et il existe $\epsilon > 0$ tel que $\mathbb{E}e^{\epsilon X_1} < +\infty$. En effet, pour $t \in [0, \epsilon]$ la formule de Taylor nous donne l'existence de $s \in (0, t)$ tel que*

$$\frac{e^{tX_1} - 1}{t} = X_1 e^{sX_1}.$$

Pour $X_1 < 0$, ce terme est en valeur absolue au plus $|X_1|$. Pour $X_1 \geq 0$, il est majoré par $Ce^{\epsilon X_1}$ pour une constante C suffisamment grande, d'où la majoration

$$\left| \frac{e^{tX_1} - 1}{t} \right| \leq |X_1| + Ce^{\theta X_1}.$$

Le terme de droite fournit une majoration d'espérance finie indépendante de $t \in (0, \epsilon)$, et le membre de gauche converge presque sûrement vers X_1 lorsque $t \rightarrow 0$. Le théorème de convergence dominée de Lebesgue donne alors

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [\mathbb{E}(e^{tX_1}) - 1] = \mathbb{E}(X_1).$$

Cela implique alors que pour $\theta > 0$ assez petit, $\log(\mathbb{E}e^{\theta X_1}) - \theta a < 0$ si $a > \mathbb{E}(X_1)$, et donc l'exposant de Chernoff, $h(a) := \sup_{\theta > 0} [\theta a - \log \mathbb{E}e^{\theta X_1}]$ est strictement positif.

Exemple: Pour X_1 variable aléatoire de Poisson de paramètre μ , $\log \mathbb{E}e^{\theta X_1} = \mu(e^\theta - 1)$. Pour $a > \mu$, l'optimum de l'exposant de Chernoff est réalisé pour $a = \mu e^\theta$, soit $\theta = \ln(a/\mu)$, d'où

$$h(a) = \mu h_1(a/\mu)$$

avec $h_1(x) := x \log(x) - x + 1$.

11.3 Taille de la population totale

La borne de Chernoff combinée avec le parcours de l'arbre de branchement "un par un" nous donne le résultat suivant:

Proposition 11.1. *Le nombre total Z d'individus dans un processus de branchement est donné, dans le parcours un par un de l'arbre de branchement, par*

$$Z = \inf\{t > 0 : A_t = 0\}.$$

Etant donnée $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ la loi des nombres d'enfants X_t , la taille totale Z vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(Z > n) \leq e^{-nh(1)}$$

où $h(a) := \sup_{\theta > 0} [\theta a - \log \mathbb{E}e^{\theta X_1}]$.

Preuve. Puisque $A_t = A_{t-1} - 1 + X_t$ et $A_0 = 1$, il vient $A_t = 1 - t + \sum_{s=1}^t X_s$. Donc au premier instant t où $A_t = 0$, auquel le parcours de l'arbre d'achève, on a $0 = 1 - t + \sum_{s=1}^t X_s$, soit $t = 1 + \sum_{s=1}^t X_s$. Le membre de droite est précisément le décompte de l'ancêtre et tous ses descendants, soit la taille totale Z de la population.

On peut alors écrire:

$$\mathbb{P}(Z > n) = \mathbb{P}(A_1, \dots, A_n > 0) \leq \mathbb{P}(A_n > 0).$$

Le membre de droite s'écrit encore $\mathbb{P}(X_1 + \dots + X_n \geq n)$. La borne de Chernoff fournit alors la majoration annoncée. \square

11.4 Loi d'un branchement sur-critique conditionnellement à l'extinction

On adopte comme représentation de l'arbre de branchement la séquence $\{X_1, \dots, X_T\}$ des nombres d'enfants successivement ajoutés dans le parcours un par un, $T \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ étant la dernière étape de l'exploration. Nécessairement, $A_t = 1 - t + \sum_{s=1}^t X_s$ est positif pour $s < T$ et nul pour $s = T$. On a alors le résultat suivant:

Théorème 11.3. *Soit un processus de branchement sur-critique, la loi $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ des X_t étant telle que $\mathbb{E}(X_t) > 1$. On suppose que la probabilité d'extinction p_{ext} est positive (ou de manière équivalente que $p_0 > 0$).*

Pour tout $x \in [0, 1]$ et tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $p_k(x) = p_k x^k / \phi(x)$, où $\phi(x) = \sum_{k \geq 0} x^k p_k$. On a alors

i) La loi de la séquence $\{X_1, \dots, X_Z\}$ associée, conditionnellement à l'extinction est la loi d'une séquence associée au processus de branchement de loi $\{q_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, où $q_k = p_k(x)$ pour $x = p_{ext}$, soit $q_k = p_{ext}^{k-1} p_k$.

ii) La moyenne de la loi $\{p_k(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante en $x \in (0, 1]$.

iii) Le processus de branchement associé à $\{q_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ est sous-critique, i.e. l'espérance associée $\sum_{k \geq 0} k q_k$ est strictement inférieure à 1.

Preuve. L'identité $q_k = p_{ext}^{k-1} p_k$ découle de la relation de point fixe $p_{ext} = \phi(p_{ext})$. Ecrivons, pour un $n > 0$ et une séquence x_1, \dots, x_n satisfaisant les contraintes d'exploration (i.e. pour $m < n$, $x_1 + \dots + x_m + 1 - m > 0$, et $x_1 + \dots + x_n + 1 - n = 0$):

$$\begin{aligned} \mathbb{P}((X_1, \dots, X_Z) = (x_1, \dots, x_n) | \text{Extinction}) &= \frac{1}{p_{ext}} \mathbb{P}((X_1, \dots, X_Z) = (x_1, \dots, x_n)) \\ &= \frac{1}{p_{ext}} \prod_{m=1}^n p_{x_m} \\ &= \frac{1}{p_{ext}} \prod_{m=1}^n q_{x_m} p_{ext}^{1-x_m} \\ &= \frac{1}{p_{ext}^{1+n-x_1-\dots-x_n}} \prod_{m=1}^n q_{x_m} \\ &= \prod_{m=1}^n q_{x_m}, \end{aligned}$$

ce qui établit la partie i).

ii) On pose $x = e^u$ et $g(u) = \phi(e^u)$. L'espérance de X sous la loi $\{p_k(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$ est donnée par $g'(u)/g(u)$. Elle sera croissante en x si elle est croissante en u . Il nous faut donc établir que $g''(u)/g(u) - [g'(u)/g(u)]^2$ est non négatif. Ce dernier terme s'écrit encore $\mathbb{E}_x(X^2) - \mathbb{E}_x(X)^2$, la variance de X sous la loi $\{p_k(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$. Ce terme est donc strictement positif puisque sous la loi $p(x)$ la variable X n'est pas constante.

iii) La fonction $\psi(x) = \sum_{k \geq 0} x^{k-1} p_k$ est telle que $\psi(p_{ext}) = \psi(1) = 1$. Il existe donc $x \in (p_{ext}, 1)$ tel que $\psi'(x) = 0$, soit $\mathbb{E}_x(X) = 1$. D'après ii), il vient que $\mathbb{E}_{p_{ext}}(X) < 1$. \square

Exemple 11.1. *Dans le cas d'une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 1$ pour les nombres d'enfants, conditionnellement à l'extinction la loi du processus est celle d'un branchement avec loi de Poisson de paramètre λp_{ext} , et ce dernier paramètre est strictement inférieur à 1.*

Chapitre 12

Epidémies SIR et graphes d'Erdős-Rényi

Dans une épidémie “Susceptible-Infectieux-Retiré” ou SIR (Susceptible-Infective-Removed en anglais), chaque individu, une fois infecté, tente de propager l'infection pendant une période limitée, après quoi il devient inactif.

L'exemple le plus simple est celui du modèle dit de Reed-Frost de propagation parmi n individus tous connectés les uns aux autres. Le processus est alors caractérisé, à part n , par un unique paramètre $p \in (0, 1)$. Dans ce processus, un individu quelconque, une fois infecté, tente d'infecter en parallèle et indépendamment chacun de ses voisins; chaque tentative d'infection réussit avec probabilité p . On suppose par ailleurs une évolution à temps discret, les tentatives d'infection par un individu survenant l'instant d'après son infection.

12.1 Modèle de Reed-Frost et graphe d'Erdős-Rényi

Par définition, le graphe aléatoire $\mathcal{G}(n, p)$, ou graphe d'Erdős-Rényi, est un graphe sur n noeuds $i \in [n]$, non-orienté, où, dénotant par ξ_{ij} l'indicatrice de présence de l'arête (i, j) pour toute paire non-ordonnée (i, j) de $[n]$, les $\{\xi_{ij}\}_{1 \leq i < j \leq n}$ sont des variables aléatoires i.i.d., Bernoulli de paramètre p .

Pour un graphe (non-orienté) G et deux de ses sommets i, j , on rappelle que la distance $d_G(i, j)$ est par définition le plus petit entier k tel que il existe $i_0 = i, \dots, i_k = j$ et pour tout $m \in [k]$, les arêtes (i_{m-1}, i_m) sont présentes dans le graphe. En d'autres termes, $d_G(i, j)$ est la longueur mesurée en nombre d'arêtes du plus court chemin dans G de i à j .

On peut alors construire le processus de Reed-Frost à partir d'un graphe d'Erdős-Rényi de la manière suivante. Partant d'un ensemble $X(0) \subset [n]$ de sommets initialement infectés à $t = 0$, on construit $X(1)$ en posant

$$X(1) = \{i \in [n] \setminus X(0) : \exists j \in X(0) | \xi_{ij} = 1\}.$$

On procède de même à chaque étape, posant

$$X(t) = \{i \in [n] \setminus (X(0) \cup \dots \cup X(t-1)) : \exists j \in X(t-1) | \xi_{ij} = 1\}.$$

Dans cette construction, la variable ξ_{ij} est utilisée pour déterminer si le premier de i ou de j qui est infecté réussira ou non à propager l'épidémie à l'autre; dans le cas où ils sont infectés simultanément, la variable n'est pas utilisée.

La propagation est donc complètement caractérisée par des propriétés topologiques du graphe aléatoire, puisque de manière équivalente, on a

$$X(t) = \{i \in [n] : d_G(X(0), i) = t\}.$$

En particulier l'étendue finale de l'épidémie est

$$\cup_{t \geq 0} X(t) = \{i \in [n] : d_G(X(0), i) < +\infty\}.$$

On peut encore la décrire comme l'union sur les $j \in X(0)$ des composantes connexes $\Gamma(j)$ correspondantes du graphe.

Cela motive une analyse des propriétés de connexité de $\mathcal{G}(n, p)$ et des tailles des composantes connexes $\Gamma(j)$ correspondantes.

12.2 Emergence du composant géant

On note $C(i)$ la taille en nombre de sommets de la i -ème plus grande composante géante du graphe G . On a alors le résultat suivant:

Théorème 12.1. *On considère le graphe $G = \mathcal{G}(n, p)$ avec $p = \lambda/n$, $\lambda > 0$ étant un paramètre fixé.*

*Dans le régime dit **sous-critique** où $\lambda < 1$, il existe une fonction $f(\lambda)$ telle que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(C(1) \leq f(\lambda) \ln(n)) = 1.$$

*Dans le régime **sur-critique** où $\lambda > 1$, il existe une fonction $g(\lambda)$ telle que pour tout $\delta > 0$ on a*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|C(1)/n - (1 - p_{ext})| \leq \delta, C(2) \leq g(\lambda) \ln(n)) = 1,$$

où p_{ext} désigne la probabilité d'extinction du processus de branchement associé à une loi de Poisson de paramètre λ , i.e. la plus petite racine sur $[0, 1]$ de $x = e^{\lambda(x-1)}$.

Interprétation: Dans le régime sous-critique toute composante connexe est, avec probabilité tendant vers 1, de taille au plus logarithmique en n . Une épidémie initialisée en un seul site aura une étendue au plus logarithmique. Notant $|X(0)|$ le nombre de sites initialement infectés on aura une étendue finale en $O(|X(0)| \ln(n))$. En ce sens l'épidémie est faible.

Si par contre $\lambda > 1$, avec probabilité approchant $1 - p_{ext}$, la composante connexe d'un sommet choisi uniformément au hasard est la plus grande, dont la taille renormalisée par $1/n$ converge en probabilité vers $1 - p_{ext}$. L'épidémie atteint alors un nombre macroscopique de sommets, $n(1 - p_{ext} + o(1))$.

On a un phénomène de transition de phase réminiscent du comportement de branchements: un changement continu du paramètre λ induit un changement qualitatif dans le comportement de l'épidémie (et la topologie du graphe).

La preuve du théorème repose sur une analyse de la taille C d'une composante connexe arbitraire, par exemple celle du sommet 1, du graphe G . Cette analyse repose sur une construction de cette composante connexe selon un parcours "un par un" semblable à celui utilisé pour les processus de branchement.

Preuve du théorème: cas sous-critique

Spécifiquement, on maintient à chaque instant t un ensemble \mathcal{A}_t de sommets actifs, et on note $A_t = |\mathcal{A}_t|$. La construction est initialisée avec $\mathcal{A}_0 = \{1\}$, $A_0 = 1$. On note \mathcal{B}_t l'ensemble des noeuds identifiés et inactivés à l'étape t . Initialement $\mathcal{B}_0 = \emptyset$.

On construit alors \mathcal{A}_t en choisissant un noeud arbitraire $i_t \in \mathcal{A}_{t-1}$, qu'on "désactive" tout en activant l'ensemble de ses voisins non encore activés, qu'on note \mathcal{D}_t . On a alors $\mathcal{B}_t = \mathcal{B}_{t-1} \cup \{i_t\}$ et

$$\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_{t-1} \setminus \{i_t\} \cup \mathcal{D}_t.$$

Notant $D_t = |\mathcal{D}_t|$, la loi de D_t conditionnellement à $\mathcal{F}_{t-1} := \sigma(A_0, \dots, A_{t-1})$ est binomiale de paramètres $(p, n - A_{t-1} - t + 1)$. En effet, le nombre de sommets non encore explorés est $n - A_{t-1} - t + 1$, et chacun d'entre eux est voisin de i_t avec probabilité p , de manière i.i.d..

Cela nous donne le

Lemme 12.1. *La taille C d'une composante connexe s'exprime en fonction du parcours un par un comme*

$$C = \inf\{t > 0 : A_t = 0\}.$$

Elle vérifie, pour $p = \lambda/n$,

$$\mathbb{P}(C > k) \leq e^{-kh(1)}, \quad (12.1)$$

où $h(x) = \lambda h_1(x/\lambda)$, et $h_1(x) = x \ln(x) - x + 1$, est la fonction dans la borne de Chernoff de variables de Poisson de paramètre λ .

Preuve. Le parcours de la composante connexe s'arrête au premier instant T où $A_T = 0$. Or

$$A_t = D_1 + \dots + D_t + 1 - t, \quad (12.2)$$

soit $T = 1 + D_1 + \dots + D_T$. Ce dernier terme est bien la taille C recherchée, puisque c'est le décompte du premier sommet 1 dont on considère la composante connexe, et des nouveaux voisins de noeuds identifiés successivement dans cette composante.

On peut étendre la suite des D_t au-delà de l'instant T en prenant D_t de loi binomiale de paramètres $(p, n - t + 1 - A_{t-1})$ conditionnellement à \mathcal{F}_{t-1} , même si ces nombres n'ont alors plus d'interprétation en termes de parcours de composante connexe. On étend de même A_t pour $t > T$ selon l'équation (12.2), et \mathcal{F}_t selon $\mathcal{F}_t = \sigma(A_0, \dots, A_t)$.

Il vient alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(C > k) &= \mathbb{P}(A_1, \dots, A_k > 0) \\ &\leq \mathbb{P}(A_k > 0) \\ &= \mathbb{P}(D_1 + \dots + D_k \geq k). \end{aligned}$$

La méthode de Chernoff s'applique alors comme suit. Pour $\theta > 0$ fixé, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(D_1 + \dots + D_k \geq k) &\leq e^{-\theta k} \mathbb{E}[e^{\theta(D_1 + \dots + D_k)}] \\ &\leq e^{-\theta k} \mathbb{E}[e^{\theta(D_1 + \dots + D_{k-1})} (1 - p + pe^\theta)^{n-k+1-A_{k-1}}], \end{aligned}$$

où dans la dernière étape on a conditionné par rapport à \mathcal{F}_{k-1} . Le dernier terme dans le membre de droite vérifie:

$$(1 - p + pe^\theta)^{n-k+1-A_{k-1}} \leq (1 + p(e^\theta - 1))^n \leq e^{\lambda(e^\theta - 1)}.$$

Cette dernière expression n'est autre que $\mathbb{E}e^{\theta X}$ pour une variable X de Poisson de paramètre λ . Itérant, on obtient

$$\mathbb{P}(D_1 + \dots + D_k \geq k) \leq e^{-\theta k} [\mathbb{E}e^{\theta X}]^k.$$

En optimisant par rapport à $\theta > 0$ on retrouve l'exposant de Chernoff $h(1)$ annoncé. \square

Le cas sous-critique du théorème découle directement du lemme.
En effet, d'après la borne de l'union, on a

$$\mathbb{P}(C(1) > k) = \mathbb{P}(\exists i \in [n] : |\Gamma(i)| > k) \leq n\mathbb{P}(C > k).$$

En prenant $f(\lambda) = 2/h(1)$, où $h(x) = \lambda h_1(x/\lambda)$ est l'exposant de Chernoff, il vient

$$\mathbb{P}(C(1) > f(\lambda) \ln(n)) \leq n \exp(-2 \ln(n)) = 1/n,$$

d'où le résultat.

Cas sur-critique

Une analyse plus fine de la taille C d'une composante connexe est maintenant requise:

Lemme 12.2. *i) Pour $t \geq 1$, la variable $A_t + t - 1$ admet une loi binomiale de paramètres $(1 - (1 - p)^t, n - 1)$.*

ii) La loi de la taille C d'une composante connexe vérifie

$$\forall k \in [n], \mathbb{P}(C = k) \leq \mathbb{P}(\text{Bin}(1 - (1 - p)^k, n - 1) = k - 1). \quad (12.3)$$

iii) Pour tout $k > 0$ fixé, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(C = k) = \mathbb{P}(Z = k)$, où Z est la population totale d'un branchement de Galton-Watson avec nombre d'enfants: Poisson(λ).

Preuve. i) Chaque sommet $i \neq 1$ a à chaque pas de temps $s \geq 1$ une probabilité p d'être connecté au nouveau sommet désactivé lors de cette phase de l'exploration, et ce de manière i.i.d. relativement aux sommets i et aux instants s . Bien que cette construction ne s'interprète en termes de composantes connexes que tant que $A_s > 0$, comme on l'a indiqué précédemment on la poursuit au-delà de ce temps d'épuisement de la composante connexe.

Le nombre de noeuds non encore identifiés à l'étape t admet donc une loi binomiale de paramètres $((1-p)^t, n-1)$. Le nombre de sommets rajoutés au sommet initial lors de l'exploration, soit $A_t + t - 1$, admet donc la loi $\text{Bin}(1 - (1 - p)^t, n - 1)$.

ii) On a

$$\mathbb{P}(C = k) = \mathbb{P}(A_1, \dots, A_{k-1} > 0, A_k = 0) \leq \mathbb{P}(A_k = 0).$$

D'après i), cette dernière quantité vaut exactement $\mathbb{P}(\text{Bin}(1 - (1 - p)^k, n - 1) = k - 1)$.

iii) Pour toute séquence d_1, \dots, d_k fixée de nombres de nouveaux voisins potentiels, qui correspondent à une exploration complète de la composante connexe, i.e. pour tout $t < k$, $d_1 + \dots + d_t - t + 1 > 0$ et $d_1 + \dots + d_k = k - 1$, on a la convergence

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(D_1^k = d_1^k) &= \prod_{t=1}^k \mathbb{P}(\text{Bin}(p, n - 1 - d_1 - \dots - d_{t-1}) = d_t) \\ &= \prod_{t=1}^k \frac{(n-1-d_1-\dots-d_{t-1})!}{(n-1-d_1-\dots-d_t)! d_t!} p^{d_t} (1-p)^{n-1-d_1-\dots-d_t} \\ &\rightarrow \prod_{t=1}^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^{d_t}}{d_t!}. \end{aligned}$$

En sommant sur les séquences potentielles d_1^k le résultat en découle, puisque le membre de droite ci-dessus est la probabilité que le parcours d'un branchement de loi Poisson(λ) donne d_1^k . \square

On a alors le

Corollaire 12.1. *Pour tout $\delta > 0$ et tout $\epsilon > 0$, il existe $A > 0$ tel que pour n assez grand:*

$$|\mathbb{P}(C \leq A) - p_{ext}| \leq \epsilon, \quad \mathbb{P}(C > A \& |C/n - (1 - p_{ext})| > \delta) \leq \epsilon. \quad (12.4)$$

Preuve. Le résultat iii) précédent implique directement, puisque $\lim_{A \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Z \leq A) = p_{ext}$, qu'on peut choisir A suffisamment grand tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(C \leq A) \in [p_{ext} - \epsilon, p_{ext}]$.

Considérons maintenant la deuxième condition. D'après ii), on a

$$\mathbb{P}(C > A \& |C/n - (1 - p_{ext})| > \delta) \leq \sum_{k > A, |k/n - (1 - p_{ext})| > \delta} \mathbb{P}(\text{Bin}(1 - (1 - p)^k, n - 1) = k - 1).$$

Pour $k \leq n(1 - p_{ext} - \delta)$, remarquant que $1 - (1 - p)^k \geq 1 - e^{-kp}$ on majore le terme dans la somme par $\mathbb{P}(\text{Bin}(1 - e^{-kp}, n - 1) \leq k - 1) \leq \mathbb{P}(\text{Bin}(1 - e^{-kp}, n) \leq k)$.

Notons que la moyenne de la loi Binomiale ci-dessus, soit $n[1 - e^{-kp}]$, est minorée par ak pour un $a > 1$ sur $k \leq n[1 - p_{ext} - \delta]$. en effet, notant $r = k/n$ on a $n[1 - e^{-kp}]/k = (1 - e^{-\lambda r})/r$, fonction décroissante en r sur $[0, 1]$ et égale à 1 en $r = 1 - p_{ext}$.

La méthode de Chernoff donne alors pour tout $\theta < 0$:

$$\mathbb{P}(\text{Bin}(ak/n, n) \leq k) \leq e^{-\theta k} (1 - ak/n + (ak/n)e^\theta)^n \leq \exp(-\theta k + ak(e^\theta - 1)),$$

d'où l'existence d'un exposant $r > 0$ indépendant de n tel que pour $k \leq n(1 - p_{ext} - \delta)$:

$$\mathbb{P}(\text{Bin}(1 - (1 - p)^k, n - 1) = k - 1) \leq e^{-rk}.$$

Il vient

$$\sum_{k > A, k \leq n(1 - p_{ext} - \delta)} \mathbb{P}(\text{Bin}(1 - (1 - p)^k, n - 1) = k - 1) \leq \frac{e^{-rA}}{1 - e^{-r}}. \quad (12.5)$$

Pour $k \geq n(1 - p_{ext} + \delta)$, notons

$$s = \sup_{k \in [n(1 - p_{ext} + \delta), n]} \frac{[n - 1][1 - (1 - p)^k]}{k - 1}.$$

La fonction $r \rightarrow [1 - e^{-\lambda r}]/r$ est majorée par une constante $b < 1$ sur $r \in [1 - p_{ext} + \delta, 1]$, et donc pour n assez grand, $s \leq b < 1$. Par ailleurs, la borne de Chernoff d'une variable aléatoire binomiale est majorée par la borne de Chernoff de la variable aléatoire de Poisson de même moyenne. Cela entraîne

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{Bin}(1 - (1 - p)^k, n - 1) = k - 1) &\leq \mathbb{P}(\text{Bin}((k - 1)b/(n - 1), n - 1) \geq k - 1) \\ &\leq \exp(-(k - 1)bh_1(1/b)). \end{aligned}$$

On obtient ainsi, pour n assez grand,

$$\sum_{k \in [n(1 - p_{ext} + \delta), n]} \mathbb{P}(\text{Bin}(1 - (1 - p)^k, n - 1) = k - 1) \leq e^{-\alpha n}$$

pour une constante $\alpha > 0$ indépendante de n . Le résultat annoncé découle de cette dernière inégalité et de (12.5). \square

La preuve du cas sur-critique dans le théorème s'obtient alors ainsi.

Ayant fixé $\epsilon, \delta > 0$ arbitraires, on extrait successivement des composantes connexes $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ du graphe G , distinguant trois cas. Si la taille C_k correspondante est telle que $C_k \leq A$, où A est choisi comme dans le corollaire, la composante est dite petite, et on continue. Si $|C_k/n - (1 - p_{ext})| \leq \delta$, la composante est dite géante, et on arrête l'extraction. Si on retire une composante ni petite ni géante, la procédure a échoué.

La probabilité de succès de la procédure en au plus M étapes est d'après le lemme minorée par

$$\sum_{m=1}^M [p_{ext} - \epsilon]^{m-1} [1 - p_{ext} - 2\epsilon] = [1 - p_{ext} - 2\epsilon] \frac{1 - (p_{ext} - \epsilon)^M}{1 - p_{ext} + \epsilon}.$$

Cette dernière quantité vaut $1 - O(\epsilon)$ pour $M = \Omega(\log(1/\epsilon))$.

Supposant que la procédure ait réussi en au plus M étapes, le graphe comprend au plus $M - 1$ composantes petites, une composante géante, et le reste est un graphe d'Erdős-Rényi de paramètres $p = \lambda/n$ et $n' \in [n - (1 - p_{ext} + \delta)n - (M - 1)A, n - (1 - p_{ext} - \delta)n]$. Or le produit des deux paramètres p et n' est au plus $\lambda[p_{ext} + \delta]$. Il découle du théorème 11.3 (voir aussi l'exemple 11.1) que le produit λp_{ext} est strictement inférieur à 1. Donc d'après la première partie du théorème (cas sous-critique) dans ce graphe résiduel avec probabilité tendant vers 1 la plus grande composante connexe est de taille au plus logarithmique.

ϵ et δ étant arbitraires, ceci achève la preuve du théorème dans le cas sur-critique.

Chapitre 13

Connectivité dans $\mathcal{G}(n, p)$ et approximation Poissonnienne

L'émergence du composant géant caractérisée au chapitre précédent nous révèle que le graphe $\mathcal{G}(n, p)$ est, avec probabilité tendant vers 1 lorsque $n \rightarrow \infty$, déconnecté si le produit np est borné.

En effet, soit Λ un majorant du produit np . Construisons simultanément, ou de manière couplée, les graphes $\mathcal{G}(n, p)$ et $\mathcal{G}(n, \Lambda/n)$ au moyen de variables aléatoires U_{ij} indépendantes uniformément distribuées sur $[0, 1]$ pour chaque paire $(i, j) \in [n]$ de la façon suivante. On pose alors $\xi_{ij} = \mathbf{1}_{U_{ij} < p}$, $\xi'_{ij} = \mathbf{1}_{U_{ij} < \Lambda/n}$ comme indicatrices de l'existence de l'arc (i, j) dans $\mathcal{G}(n, p)$ et dans $\mathcal{G}(n, \Lambda/n)$ respectivement.

Il est alors clair que la taille $C(1)$ de la plus grande composante dans la réalisation de $\mathcal{G}(n, \Lambda/n)$ majore la taille $C'(1)$ de la plus grande composante de la réalisation de $\mathcal{G}(n, p)$ (en rajoutant des arêtes on ne fait qu'augmenter cette taille). Or pour tout $\delta > 0$, avec forte probabilité, $C'(1) < (1 - p_{ext}(\Lambda) + \delta)n < n$ d'après le chapitre précédent, où $p_{ext}(\Lambda)$ est la probabilité d'extinction d'un processus de branchement associé à la distribution Poisson(Λ). Donc avec forte probabilité, $\mathcal{G}(n, p)$ est déconnecté, ayant sa plus grande composante connexe de taille strictement inférieure à n .

Notre objectif dans ce chapitre est de caractériser l'ordre de grandeur du produit np pour lequel la probabilité que $\mathcal{G}(n, p)$ soit connecté devient non négligeable. Plus précisément nous allons prouver le

Théorème 13.1. *Soit $c \in \mathbb{R}$ une constante fixée. On suppose que $\lim_{n \rightarrow \infty} [np - \ln(n)] = c$. Alors*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\mathcal{G}(n, p) \text{ connecté}) = e^{-e^{-c}}. \quad (13.1)$$

Ce résultat a le corollaire suivant:

Corollaire 13.1. *Le graphe $\mathcal{G}(n, p)$ est connecté (respectivement, déconnecté) avec forte probabilité si $\lim_{n \rightarrow \infty} [np - \ln(n)] = +\infty$ (respectivement, $-\infty$).*

Preuve. Nous utilisons à nouveau le couplage décrit précédemment entre deux graphes d'Erdős-Rényi. Lorsque $\lim_{n \rightarrow \infty} [np - \ln(n)] = +\infty$, pour tout $c \in \mathbb{R}$ fixé, pour n assez grand, $np \geq \ln(n) + c$. $\mathcal{G}(n, p)$ et $\mathcal{G}(n, (\ln(n) + c)/n)$ peuvent donc être couplés de sorte que les arêtes du second sont toutes présentes dans le premier. Ainsi

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\mathcal{G}(n, p) \text{ connecté}) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\mathcal{G}(n, (\ln(n) + c)/n) \text{ connecté}) = e^{-e^{-c}}.$$

Le membre de droite tend vers 1 lorsque $c \rightarrow +\infty$, ce qui permet de conclure.

Lorsque $\lim_{n \rightarrow \infty} [np - \ln(n)] = -\infty$, on obtient pareillement pour tout $c \in \mathbb{R}$:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\mathcal{G}(n, p) \text{ connecté}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\mathcal{G}(n, (\ln(n) + c)/n) \text{ connecté}) = e^{-e^{-c}},$$

et on conclut en remarquant que le membre de droite tend vers 0 lorsque $c \rightarrow -\infty$. \square

Le reste du chapitre est organisé de la manière suivante. On montre tout d'abord comment la preuve se réduit à l'analyse du nombre de sommets isolés. On introduit ensuite les méthodes du premier et du second moment, outils simples mais qui ne sont pas suffisamment fins pour conclure. On introduit enfin la méthode d'approximation Poissonnienne qui fournit le résultat.

13.1 Réduction à l'étude du nombre de sommets isolés

Un graphe sur n sommets est connecté si et seulement si il ne contient aucune composante connexe de taille strictement inférieure à n . On peut raffiner cette condition nécessaire et suffisante: un tel graphe est connecté si et seulement si il ne contient aucune composante connexe de taille inférieure ou égale à $n/2$. En effet, dans un partitionnement non trivial des n sommets en composantes connexes distinctes, l'une au moins doit avoir une taille inférieure ou égale à $n/2$.

Notons \mathcal{A}_i l'événement que le graphe $\mathcal{G}(n, p)$ contient au moins un composant connecté de taille i . On a alors:

$$\mathbb{P}(\mathcal{G}(n, p) \text{ déconnecté}) = \mathbb{P}(\cup_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \mathcal{A}_i).$$

La borne de l'union donne la majoration dans

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}_1) \leq \mathbb{P}(\mathcal{G}(n, p) \text{ déconnecté}) \leq \sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \mathbb{P}(\mathcal{A}_i)$$

Nous allons montrer que sous les hypothèses du théorème 13.1, i.e. $\lim_{n \rightarrow \infty} np - \ln(n) = c$, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=2}^{\lfloor n/2 \rfloor} \mathbb{P}(\mathcal{A}_i) = 0. \quad (13.2)$$

Il s'ensuivra que la probabilité que $\mathcal{G}(n, p)$ est connecté a même limite que la probabilité que le graphe ne contient pas de sommets isolés.

Considérons séparément le terme pour $i = 2$ dans la somme dans l'équation (13.2). On a par la borne de l'union, remarquant que pour n assez grand, $np - \ln(n) - c \in [-1, 1]$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mathcal{A}_2) &\leq \binom{n}{2} \mathbb{P}((1, 2) \text{ composante connexe}) \\ &= \binom{n}{2} p(1-p)^{2(n-2)} \\ &\leq n^2 \frac{\ln(n)+c+1}{n} e^{-2p(n-2)} \\ &\leq n[\ln(n) + c + 1] e^{-2(\ln(n)+c-1)+4p} \\ &= O(\ln(n)/n). \end{aligned}$$

Ce terme tend donc bien vers 0. Pour contrôler la somme des autres termes dans (13.2), nous utiliserons le résultat suivant de combinatoire:

Théorème 13.2. (Théorème de Cayley). *Le nombre d'arbres sur l'ensemble $[i]$ de i sommets est i^{i-2} .*

Majorons maintenant, pour $i \in \{3, \dots, \lfloor n/2 \rfloor\}$, la probabilité $\mathbb{P}(\mathcal{A}_i)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mathcal{A}_i) &\leq \binom{n}{i} \mathbb{P}([i] \text{ composante connexe}) \\ &= \binom{n}{i} (1-p)^{i(n-i)} \mathbb{P}(\mathcal{G}(i, p) \text{ connecté}) \\ &\leq \frac{n^i}{i!} e^{-pi(n/2)} \mathbb{P}(\exists \text{ arbre } A \text{ dans } \mathcal{G}(i, p)) \\ &\leq \frac{n^i}{i!} e^{-pi(n/2)} \sum_{\text{arbres } a \text{ sur } [i]} \mathbb{P}(a \in \mathcal{G}(i, p)) \\ &\leq \frac{n^i}{i!} e^{-pi(n/2)} i^{i-2} p^{i-1}, \end{aligned}$$

où à la dernière ligne on a utilisé le théorème de Cayley et le fait qu'un arbre sur i sommets contient $i-1$ arêtes.

Une version grossière de la formule de Stirling nous donne $i! \geq \sqrt{i}(i/e)^i$. Il vient alors, pour un $\epsilon > 0$ fixé arbitrairement, et pour n assez grand:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mathcal{A}_i) &\leq \frac{n^i}{\sqrt{i}(i/e)^i} e^{-pi(n/2)} i^{i-2} p^{i-1} \\ &= \frac{1}{pi^{5/2}} e^{i(\ln(n)+1-pn/2+\ln(p))} \\ &\leq \frac{n}{i^{5/2}(\ln(n)+c-1)} e^{i(\ln(n)+1-(\ln(n)+c-1)/2+\ln(\ln(n)+c+1)-\ln(n))} \\ &\leq \frac{2n}{i^{5/2} \ln(n)} e^{-i(1/2-\epsilon) \ln(n)}. \end{aligned}$$

On en déduit:

$$\begin{aligned} \sum_{i=3}^{\lfloor n/2 \rfloor} \mathbb{P}(\mathcal{A}_i) &\leq \sum_{i \geq 3} 2ne^{-i(1/2-\epsilon) \ln(n)} \\ &= 2n \cdot n^{-3(1/2-\epsilon)} \frac{1}{1-n^{-(1/2-\epsilon)}} = O(n^{-1/2+3\epsilon}). \end{aligned}$$

Nous avons donc établi que la probabilité que $\mathcal{G}(n, p)$ est connecté a même limite que la probabilité que $\mathcal{G}(n, p)$ n'admet pas de sommets isolés.

Preuve. (théorème de Cayley). Nous établissons une bijection entre les arbres sur $[i]$ et les suites $\{v_1, \dots, v_{i-2}\}$ à valeurs dans $[i]$. Étant donné un arbre a , on distingue le sommet 1 comme racine de cet arbre. On considère les feuilles de l'arbre enraciné en 1, i.e. les noeuds distincts de 1 et de degré 1 dans a . On définit alors v_1 comme l'indice de l'unique voisin de la feuille de plus petit indice, soit u_1 l'indice de cette feuille. On considère ensuite l'arbre a_1 obtenu en supprimant la feuille u_1 de a , et on poursuit la même procédure: v_2 est alors l'indice de l'unique voisin dans a_1 de la feuille de plus petit indice (soit u_2) dans a_1 . On s'arrête au bout de $i-2$ étapes avec un arbre constitué d'uniquement deux sommets, dont le sommet racine, 1. On note $\phi(a)$ la séquence résultante $\{v_1, \dots, v_{i-2}\}$.

Montrons que cette application ϕ de l'ensemble des arbres vers l'ensemble des suites v_1, \dots, v_{i-2} à valeurs dans $[i]$ est une bijection.

Partant de v_1, \dots, v_{i-2} , l'arbre a est reconstruit comme suit. Soit u_1 le plus petit élément de $\{2, \dots, i\}$ n'apparaissant pas dans $\{v_1, \dots, v_{i-2}\}$. Nécessairement l'arête (u_1, v_1) est dans a . Soit alors u_2 le plus petit élément de $\{2, \dots, i\} \setminus \{u_1\}$ n'apparaissant pas dans $\{v_2, \dots, v_{i-2}\}$. L'arête (u_2, v_2) est aussi nécessairement dans a . On poursuit ainsi, définissant u_ℓ comme le plus petit élément de $\{2, \dots, i\} \setminus \{u_1, \dots, u_{\ell-1}\}$ n'apparaissant pas dans $\{v_\ell, \dots, v_{i-2}\}$ et incluant l'arête (u_ℓ, v_ℓ) , jusqu'à l'étape $\ell = i-2$. On termine la construction en constatant que la $(i-1)$ -ème arête $(u_{i-1}, 1)$, où u_{i-1} est l'unique élément de $\{2, \dots, i\} \setminus \{u_1, \dots, u_{i-2}\}$ est nécessairement dans a . Ceci établit que l'arbre a est uniquement déterminé par sa suite associée $\{v_1, \dots, v_{i-2}\}$. La fonction ϕ est donc injective.

Pour conclure, il suffit de montrer que partant d'une séquence $\{v_1, \dots, v_{i-2}\}$, la construction précédente fournit un arbre. Cela vient du fait que par construction, chaque sommet $u \in \{2, \dots, i\}$ est connecté au sommet 1 dans la construction précédente. Un graphe connexe sur i sommets ayant $i-1$ arêtes est un arbre, d'où le résultat. \square

13.2 Méthodes du premier et du second moment

Etant donné un ensemble dénombrable V , et pour tout $u \in V$, une variable aléatoire $Z_u \in \{0, 1\}$, interprétée comme l'indicatrice d'un événement Ω_u indicé par u , on s'intéresse à la probabilité de l'union $\cup_{u \in V} \Omega_u$, dont l'indicatrice est donnée par $\sup_{u \in V} Z_u$. Notant $X = \sum_{u \in V} Z_u$, la méthode du premier moment consiste simplement à majorer la probabilité de l'union des Ω_u par l'espérance de X :

$$\mathbb{P}(\cup_{u \in V} \Omega_u) = \mathbb{E}(\sup_{u \in V} Z_u) \leq \mathbb{E}(\sum_{u \in V} Z_u) = \mathbb{E}(X) = \sum_{u \in V} \mathbb{E}(Z_u).$$

Ce n'est autre que la majoration de la probabilité de l'union d'événements par la somme de leurs probabilités. Malgré sa simplicité, cette méthode est remarquablement utile pour prouver que la probabilité d'une union d'événements tend vers 0. Elle ne nécessite aucune hypothèse, notamment d'indépendance, entre les événements Ω_u : la probabilité considérée tend vers 0 dès que le premier moment de X tend vers 0.

Appliquons-la pour majorer la probabilité qu'il existe un sommet isolé dans $\mathcal{G}(n, p)$, prenant $V = [n]$ et $Z_u = \mathbf{1}_u$ isolé. Il vient

$$\mathbb{P}(\exists u \text{ sommet isolé}) \leq n(1-p)^{n-1}.$$

Sous l'hypothèse $\lim_{n \rightarrow \infty} np - \ln(n) = +\infty$, il vient immédiatement que la probabilité de présence d'un sommet isolé dans $\mathcal{G}(n, p)$ tend vers 0.

La méthode du second moment permet de minorer, dans le même contexte, la probabilité que l'un au moins des événements Ω_u se produise. Elle consiste à écrire:

$$\mathbb{P}(\sup_{u \in V} Z_u = 1) = \mathbb{P}(X > 0),$$

et à utiliser alors l'inégalité de Bienaymé-Tchebitchev de la manière suivante:

$$\mathbb{P}(X \leq 0) = \mathbb{P}(X - \mathbb{E}(X) \leq -\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \mathbb{E}(X)) \leq \frac{\text{Var}(X)}{(\mathbb{E}(X))^2}.$$

On en déduit alors que $\mathbb{P}(X > 0)$ tend vers 1 dès que d'une part $\mathbb{E}(X)$ tend vers l'infini, et d'autre part $\text{Var}(X)$ est négligeable devant $(\mathbb{E}(X))^2$.

Appliquons-la au nombre de sommets isolés dans $\mathcal{G}(n, p)$. Dans ce cas, pour deux sommets distincts $u, v \in V = [n]$, on a

$$\mathbb{E}(Z_u Z_v) = (1-p)^{n-1} (1-p)^{n-2},$$

et donc

$$\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(X) + n(n-1)(1-p)^{2n-3}.$$

Il vient:

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X) - n(1-p)^{2n-2} + n(n-1)[(1-p)^{2n-3} - (1-p)^{2n-2}] \leq \mathbb{E}(X) + n^2[(1-p)^{2n-3} - (1-p)^{2n-2}].$$

On en déduit

$$\frac{\text{Var}(X)}{(\mathbb{E}(X))^2} \leq \frac{1}{\mathbb{E}(X)} + \frac{p}{1-p}.$$

La méthode du second moment nous donne alors que si $\lim_{n \rightarrow \infty} [np - \ln(n)] = -\infty$, alors $\mathbb{E}(X) \rightarrow \infty$ et $p \rightarrow 0$, et donc $\mathbb{P}(\exists u \text{ isolé}) \rightarrow 1$.

13.3 Distance en variation

Définition 13.1. La distance en variation entre deux mesures de probabilité μ_1, μ_2 définies sur le même espace mesurable (Ω, \mathcal{F}) , où \mathcal{F} est une tribu de parties de Ω , est définie comme

$$d_{var}(\mu_1, \mu_2) := 2 \sup_{A \in \mathcal{F}} |\mu_1(A) - \mu_2(A)|.$$

Afin d'en fournir une caractérisation alternative, on rappelle la définition et le théorème suivants:

Définition 13.2. Pour deux mesures μ, ν sur l'espace mesurable (Ω, \mathcal{F}) , ν est absolument continue par rapport à μ si et seulement si pour tout $A \in \mathcal{F}$, $\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$. On note cette propriété $\nu \ll \mu$.

Théorème 13.3. (Radon-Nikodym). Pour deux mesures μ, ν sur l'espace mesurable (Ω, \mathcal{F}) , avec ν absolument continue par rapport à μ , il existe une fonction mesurable dénotée $\frac{d\nu}{d\mu}$ et appelée densité, ou dérivée de Radon-Nikodym de ν par rapport à μ , telle que pour toute fonction ν -intégrable f , on ait

$$\int_{\Omega} f(\omega) \nu(d\omega) = \int_{\Omega} f(\omega) \frac{d\nu}{d\mu}(\omega) \mu(d\omega).$$

En particulier, pour tout $A \in \mathcal{F}$ on a

$$\nu(A) = \int_{\Omega} \mathbf{1}_A(\omega) \frac{d\nu}{d\mu}(\omega) \mu(d\omega).$$

On a alors la

Proposition 13.1. Soit une mesure μ telle que μ_1 et μ_2 soient absolument continues par rapport à μ . On a alors l'expression:

$$d_{var}(\mu_1, \mu_2) = \int_{\Omega} \left| \frac{d\mu_1}{d\mu}(\omega) - \frac{d\mu_2}{d\mu}(\omega) \right| \mu(d\omega)$$

où $d\mu_i/d\mu$ est la densité, ou dérivée de Radon-Nikodym de μ_i par rapport à μ .

Pour $\Omega = \mathbb{N}$ on a en particulier, en prenant pour μ la mesure de comptage sur \mathbb{N} :

$$d_{var}(\mu_1, \mu_2) = \sum_{n \in \mathbb{N}} |\mu_1(n) - \mu_2(n)|.$$

Preuve. Pour tout $A \in \mathcal{F}$, et μ une mesure telle que μ_1 et μ_2 sont absolument continues par rapport à μ (une telle mesure existe toujours: on peut par exemple choisir $\mu = (1/2)(\mu_1 + \mu_2)$). On a alors

$$\begin{aligned} 2|\mu_1(A) - \mu_2(A)| &= |\mu_1(A) - \mu_2(A)| + |\mu_1(\bar{A}) - \mu_2(\bar{A})| \\ &= \left| \int_A \left[\frac{d\mu_1}{d\mu} - \frac{d\mu_2}{d\mu} \right] \mu(d\omega) \right| + \left| \int_{\bar{A}} \left[\frac{d\mu_1}{d\mu} - \frac{d\mu_2}{d\mu} \right] \mu(d\omega) \right| \\ &\leq \int_{\Omega} \left| \frac{d\mu_1}{d\mu} - \frac{d\mu_2}{d\mu} \right| \mu(d\omega). \end{aligned}$$

Réciproquement, posons $A = \left\{ \omega : \frac{d\mu_1}{d\mu}(\omega) - \frac{d\mu_2}{d\mu}(\omega) > 0 \right\}$. On a alors:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left| \frac{d\mu_1}{d\mu} - \frac{d\mu_2}{d\mu} \right| \mu(d\omega) &= \int_A \left[\frac{d\mu_1}{d\mu} - \frac{d\mu_2}{d\mu} \right] \mu(d\omega) + \int_{\bar{A}} \left[\frac{d\mu_2}{d\mu} - \frac{d\mu_1}{d\mu} \right] \mu(d\omega) \\ &= \mu_1(A) - \mu_2(A) + (1 - \mu_2(A)) - (1 - \mu_1(A)) \\ &= 2[\mu_1(A) - \mu_2(A)], \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve. \square

Définition 13.3. La suite de lois $\{\mu_n\}_{n>0}$ sur un même espace mesurable (Ω, \mathcal{F}) est dite converger en variation vers la loi limite μ_∞ si $\lim_{n \rightarrow \infty} d_{var}(\mu_n, \mu_\infty) = 0$.

Remarque 13.1. La convergence en variation entraîne la convergence en distribution. En effet, la convergence en distribution des μ_n vers μ est équivalente à la convergence, pour toute fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ continue bornée, de $\int f d\mu_n$ vers $\int f d\mu_\infty$. Or on a, choisissant une mesure μ devant laquelle les μ_n, μ_∞ sont absolument continues :

$$\left| \int f d\mu_n - \int f d\mu_\infty \right| = \left| \int f \left[\frac{d\mu_n}{d\mu} - \frac{d\mu_\infty}{d\mu} \right] \mu(d\omega) \right| \leq \|f\|_\infty d_{var}(\mu_n, \mu_\infty),$$

où on a utilisé la notation $\|f\|_\infty = \sup_{\omega \in \Omega} |f(\omega)|$, et le résultat précédent. La conclusion en découle.

Nous établissons maintenant un lien entre la notion de couplage et la distance en variation. Pour cela, nous introduisons la

Définition 13.4. Pour deux lois de probabilité μ_1, μ_2 sur le même espace mesurable (Ω, \mathcal{F}) , un couplage de μ_1 et μ_2 est un couple (X_1, X_2) de variables aléatoires de lois respectives μ_1, μ_2 .

On a alors le

Théorème 13.4. Etant donné un couplage (X_1, X_2) de deux lois μ_1, μ_2 sur l'espace mesurable (Ω, \mathcal{F}) , on a l'inégalité de couplage

$$d_{var}(\mu_1, \mu_2) \leq 2\mathbb{P}(X_1 \neq X_2).$$

Réciproquement, il existe toujours un couplage (X_1, X_2) de (μ_1, μ_2) tel qu'on ait égalité dans l'inégalité ci-dessus.

Preuve. Soit $A \in \mathcal{F}$. On a :

$$\begin{aligned} |\mu_1(A) - \mu_2(A)| &= |\mathbb{E}[\mathbf{1}_{X_1 \in A} - \mathbf{1}_{X_2 \in A}]| \\ &= |\mathbb{E}[\mathbf{1}_{X_1 \neq X_2}(\mathbf{1}_{X_1 \in A} - \mathbf{1}_{X_2 \in A})]| \\ &\leq \mathbb{E}[\mathbf{1}_{X_1 \neq X_2} |\mathbf{1}_{X_1 \in A} - \mathbf{1}_{X_2 \in A}|] \\ &\leq \mathbb{P}(X_1 \neq X_2). \end{aligned}$$

Réciproquement, soit μ une mesure telle que $\mu_i \ll \mu, i = 1, 2$. Notons $f_i = d\mu_i/d\mu, f(\omega) = f_1(\omega) \wedge f_2(\omega)$, et $A = \{\omega : f_1(\omega) > f_2(\omega)\}$.

Notant que $f = f_2$ sur A et $f = f_1$ sur \bar{A} , on a les identités :

$$d_{var}(\mu_1, \mu_2) = \int |f_1 - f_2| \mu(d\omega) = 2 \int_A (f_1 - f) \mu(d\omega) = 2 \int_{\bar{A}} (f_2 - f) \mu(d\omega).$$

On en déduit :

$$\int_\Omega [f_2 - f] \mu(d\omega) = \frac{1}{2} d_{var}(\mu_1, \mu_2),$$

soit

$$\int_\Omega f \mu(d\omega) = 1 - \frac{1}{2} d_{var}(\mu_1, \mu_2).$$

Soit Z une variable de Bernoulli de paramètre $1 - \frac{1}{2} d_{var}(\mu_1, \mu_2)$, X une variable aléatoire sur Ω de densité $f(\omega)/[1 - \frac{1}{2} d_{var}(\mu_1, \mu_2)]$ par rapport à μ , et Y_i des variables aléatoires sur Ω de densité $[f_i - f]/[(1/2) d_{var}(\mu_1, \mu_2)]$ par rapport à μ (les calculs précédents garantissent qu'il s'agit bien

de densités de probabilité, i.e. non négatives et d'intégrale 1 par rapport à μ). On suppose par ailleurs que Z est indépendante de (X, Y_1, Y_2) .

Le couplage annoncé consiste alors à poser, si $Z = 1$, $X_1 = X_2 = X$, et si $Z = 0$, $X_i = Y_i$, $i = 1, 2$. Montrons qu'il s'agit bien d'un couplage de μ_1 et μ_2 . On a en effet, pour tout $B \in \mathcal{F}$, et $i = 1, 2$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_i \in B) &= \mathbb{P}(Z = 1)\mathbb{P}(X \in B) + \mathbb{P}(Z = 0)\mathbb{P}(Y_i \in B) \\ &= \int_B f \mu(d\omega) + \int_B [f_i - f] \mu(d\omega) \\ &= \int_B f_i \mu(d\omega) = \mu_i(B). \end{aligned}$$

Enfin ce couplage de μ_1 et μ_2 vérifie que $\mathbb{P}(X_1 \neq X_2) \leq \mathbb{P}(Z = 0) = (1/2)d_{var}(\mu_1, \mu_2)$, d'où le résultat annoncé. \square

Corollaire 13.2. *Notant Poi_λ la loi de Poisson de paramètre λ , on a pour tous $\lambda, \lambda' > 0$:*

$$d_{var}(Poi_\lambda, Poi_{\lambda'}) \leq 2|\lambda - \lambda'|.$$

Preuve. Supposons sans perte de généralité $\lambda \leq \lambda'$. Soient X_1, Δ deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $Poi_\lambda, Poi_{\lambda' - \lambda}$, de sorte que $X_2 := X_1 + \Delta$ a pour loi $Poi_{\lambda'}$. L'inégalité de couplage donne

$$d_{var}(Poi_\lambda, Poi_{\lambda'}) \leq 2\mathbb{P}(X_1 \neq X_2) \leq 2\mathbb{P}(\Delta > 0) \leq 2\mathbb{E}(\Delta).$$

Le membre de droite s'écrit bien $2|\lambda' - \lambda|$. \square

13.4 Approximation Poissonnienne: méthode de Stein-Chen

La méthode de Stein-Chen fournit des bornes explicites sur la distance en variation entre la loi d'une somme de variables valant chacune 0 ou 1 et une loi de Poisson. Nous établissons maintenant le résultat suivant.

Théorème 13.5. (*Stein-Chen*). *Soit V un ensemble dénombrable et soit pour tout $u \in V$ une variable $Z_u \in \{0, 1\}$ associée. On note $\pi_u = \mathbb{E}(Z_u)$, $X = \sum_{u \in V} Z_u$, $\lambda = \mathbb{E}(X) = \sum_{u \in V} \pi_u$. Supposons qu'il existe des variables aléatoires $\{Z_{uv}\}_{u, v \in V, v \neq u}$ telles que pour tout $u \in V$, la loi de $\{Z_{uv}\}_{v \neq u}$ coïncide avec la loi des $\{Z_v\}_{v \neq u}$ conditionnellement à $Z_u = 1$. Alors:*

$$d_{var}(X, Poi_\lambda) \leq 2 \min(1, \lambda^{-1}) \sum_{u \in V} \pi_u \left[\pi_u + \sum_{v \neq u} \mathbb{E}|Z_{uv} - Z_v| \right]. \quad (13.3)$$

Preuve. Soit $A \subset \mathbb{N}$. On définit la fonction $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ (qui dépend de λ et de A) en posant

$$\begin{aligned} f(0) &= 0, \\ \lambda f(i+1) - if(i) &= \mathbf{1}_A(i) - Poi_\lambda(A), \quad i \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Notons κ une constante de Lipschitz pour la fonction f , i.e.

$$\forall i, j \in \mathbb{N}, |f(i) - f(j)| \leq \kappa|i - j|.$$

Par définition de f , on a

$$\mathbb{E}[\lambda f(X+1) - Xf(X)] = \mathbb{P}(X \in A) - Poi_\lambda(A).$$

Le théorème sera établi en montrant que le membre de gauche de cette dernière expression est en valeur absolue au plus la moitié du membre de droite de (13.3).

Or, notant que $\mathbb{E}[Xf(X)] = \sum_{u \in V} \pi_u \mathbb{E}[f(1 + \sum_{v \neq u} Z_{uv})]$, on obtient

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}[\lambda f(X+1) - Xf(X)]| &= \left| \sum_{u \in V} \pi_u \mathbb{E}[f(1 + \sum_{v \in V} Z_v) - f(1 + \sum_{v \neq u} Z_{uv})] \right| \\ &\leq \sum_{u \in V} \pi_u \kappa \mathbb{E} \left| \sum_{v \in V} Z_v - \sum_{v \neq u} Z_{uv} \right| \\ &\leq \kappa \sum_{u \in V} \pi_u \left[\pi_u + \sum_{v \neq u} \mathbb{E} |Z_v - Z_{uv}| \right]. \end{aligned}$$

Le résultat vient alors en établissant que la fonction f admet pour constante de Lipschitz $\kappa = \min(1, \lambda^{-1})$, ce qui découle du lemme qui suit. \square

Lemme 13.1. *La fonction f définie ci-dessus admet pour constante de Lipschitz $[1 - e^{-\lambda}]/\lambda$, qui est majorée par $\min(1, \lambda^{-1})$.*

Preuve. Indiquons la dépendance de f par rapport à A en la notant f_A . On établit aisément par récurrence que la fonction f_A satisfait

$$f_A(i+1) = \frac{\text{Poi}_\lambda(A \cap \{0, \dots, i\}) - \text{Poi}_\lambda(A) \text{Poi}_\lambda(\{0, \dots, i\})}{\lambda \text{Poi}_\lambda(\{i\})}. \quad (13.4)$$

Notons pour tout $j \in \mathbb{N}$ f_j la fonction correspondant au choix particulier $A = \{j\}$. On a d'après (13.4) l'identité $f_A = \sum_{j \in A} f_j$. Soit $i \in \mathbb{N}$. On a alors:

$$f_A(i+1) - f_A(i) \leq \sum_{j \in A} [f_j(i+1) - f_j(i)] \leq f_i(i+1) - f_i(i).$$

En effet, tous les termes dans la somme précédente sur $j \in A$ sont négatifs ou nuls, sauf le terme pour $j = i$, et ceci d'après les propriétés suivantes de monotonie des f_j .

D'après (13.4), pour $j > i$ on a

$$f_j(i+1) = -\frac{\text{Poi}_\lambda(\{j\}) \text{Poi}_\lambda(\{0, \dots, i\})}{\lambda \text{Poi}_\lambda(\{i\})} = -\text{Poi}_\lambda(\{j\}) \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} \frac{k!}{\lambda^{k+1}},$$

qui est clairement non positif et décroissant en i . De même, d'après (13.4), pour $j < i$ on a

$$f_j(i+1) = \frac{\text{Poi}_\lambda(\{j\}) [1 - \text{Poi}_\lambda(\{0, \dots, i\})]}{\lambda \text{Poi}_\lambda(\{i\})} = \text{Poi}_\lambda(\{j\}) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\binom{k+i+1}{k+1}} \frac{\lambda^k}{(k+1)!},$$

qui est clairement positif et décroissant en i .

On a donc:

$$\begin{aligned} f_A(i+1) - f_A(i) &\leq f_i(i+1) - f_i(i) \\ &= \frac{\text{Poi}_\lambda(\{i\}) [1 - \text{Poi}_\lambda(\{0, \dots, i\})]}{\lambda \text{Poi}_\lambda(\{i\})} + \frac{\text{Poi}_\lambda(\{i\}) \text{Poi}_\lambda(\{0, \dots, i-1\})}{\lambda \text{Poi}_\lambda(\{i-1\})} \\ &= \frac{1}{\lambda} [1 - \text{Poi}_\lambda(\{0, \dots, i\}) + \lambda \text{Poi}_\lambda(\{0, \dots, i-1\})] \\ &\leq \frac{1}{\lambda} [1 - \text{Poi}_\lambda(\{0, \dots, i\}) + \text{Poi}_\lambda(\{1, \dots, i\})] \\ &= \frac{1 - \text{Poi}_\lambda(\{0\})}{\lambda} = \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}. \end{aligned}$$

En remplaçant A par \bar{A} et en notant que $f_A = -f_{\bar{A}}$, le même argument donne

$$f_A(i+1) - f_A(i) = -[f_{\bar{A}}(i+1) - f_{\bar{A}}(i)] \geq -\frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}.$$

\square

Approximation Poissonnienne du nombre de sommets isolés

Nous appliquons maintenant le théorème de Stein-Chen pour montrer que lorsque $\lim_{n \rightarrow \infty} [np - \ln(n)] = c$, la loi du nombre X de noeuds isolés dans $\mathcal{G}(n, p)$ converge en variation vers $\text{Poi}_{e^{-c}}$, ce qui permettra de conclure la preuve du théorème 13.1 au vu des arguments de la section 13.1.

Notant pour $u, v \in [n]$, $u \neq v$, ξ_{uv} l'indicatrice de la présence de l'arête (u, v) dans $\mathcal{G}(n, p)$, et Z_u l'indicatrice du fait que le sommet u est isolé, on a

$$Z_u = \prod_{w \in [n], w \neq u} (1 - \xi_{uw}).$$

Posant alors

$$Z_{uv} = \prod_{w \in [n], w \notin \{u, v\}} (1 - \xi_{vw}),$$

on vérifie aisément que la loi des $\{Z_{uv}\}_{v \neq u}$ coïncide avec celle des $\{Z_v\}_{v \neq u}$ conditionnellement à $Z_u = 1$. En effet, $\{Z_u = 1\}$ est équivalent à $\xi_{uw} = 0, w \neq u$. L'indépendance des variables ξ permet de conclure à cette identité de distributions.

Notant $\lambda = \mathbb{E}(X) = n(1-p)^{n-1}$, la méthode de Stein-Chen nous donne alors:

$$\begin{aligned} d_{var}(X, \text{Poi}_\lambda) &\leq 2 \min(1, \lambda^{-1}) \sum_{u \in [n]} \frac{\lambda}{n} \left[\frac{\lambda}{n} + \sum_{v \neq u} \mathbb{E} \left| \prod_{w \neq v} (1 - \xi_{vw}) - \prod_{w \neq u, v} (1 - \xi_{vw}) \right| \right] \\ &= 2 \min(\lambda, 1) \left[\frac{\lambda}{n} + (n-1)p(1-p)^{n-2} \right] \\ &\leq 2 \left[\frac{\lambda}{n} + \lambda \frac{p}{1-p} \right] \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse $\lim_{n \rightarrow \infty} [np - \ln(n)] = c$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda = e^{-c}$, et $p/(1-p) \sim \ln(n)/n$. Le membre de droite de cette dernière expression vaut alors $O(\ln(n)/n)$ et tend donc vers 0. Pour conclure, on utilise l'inégalité triangulaire:

$$d_{var}(X, \text{Poi}_{e^{-c}}) \leq d_{var}(X, \text{Poi}_\lambda) + d_{var}(\text{Poi}_\lambda, \text{Poi}_{e^{-c}}).$$

Le premier terme tend vers 0 car en $O(\ln(n)/n)$ comme on vient de le voir. Le second terme est majoré par $2|\lambda - e^{-c}|$ d'après le Corollaire 13.2, et tend donc lui aussi vers 0.

Chapitre 14

Impact de la topologie sur les épidémies

Dans ce chapitre nous considérons un graphe $G = (V, E)$ non nécessairement complet, et analysons l'impact de la topologie du graphe sur le comportement d'épidémies s'y propageant. Nous nous intéressons en particulier au processus SIS (Susceptible - Infecté - Susceptible).

Nous énonçons tout d'abord une condition suffisante pour l'extinction rapide de l'épidémie exprimée en fonction du **rayon spectral** de la matrice d'adjacence du graphe, ainsi qu'une condition suffisante pour la survie longue de l'épidémie, exprimée en fonction de **constantes isopérimétriques** du graphe.

Ces conditions sont alors appliquées au cas des graphes complets, des hypercubes, et enfin des graphes d'Erdős-Rényi.

Nous introduisons ensuite des outils de couplage de processus de Markov, basés sur des critères pour que l'image d'un processus de Markov par une application soit à son tour un processus de Markov. Ces outils sont enfin mis en oeuvre pour prouver les résultats annoncés en début de chapitre.

14.1 Temps de survie des épidémies SIS

L'épidémie SIS sur le graphe $G = (V, E)$ est définie dans ce chapitre comme suit. C'est un processus Markovien de sauts $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ à valeurs dans $\{0, 1\}^V$, où $X_i(t) = 1$ (respectivement, $X_i(t) = 0$) si au temps t le sommet $i \in V$ est infectieux (respectivement, susceptible). Ses taux de transition non nuls sont donnés par

$$q_{x, x+e_i} = \beta \mathbf{1}_{x_i=0} \sum_{j \in V} A_{ij} x_j, \quad q_{x, x-e_i} = \delta x_i,$$

où $x \in \{0, 1\}^V$, $i \in V$, A_{ij} est l'indicatrice que l'arête (i, j) est présente dans G , β est le taux d'infection le long de chaque arête et δ est le taux de rémission de chaque site. On suppose $\delta, \beta > 0$. A est aussi appelée la **matrice d'adjacence** du graphe.

Un tel processus peut être pertinent pour modéliser la propagation dans une population d'un virus mutant rapidement, de sorte qu'après une rémission, un individu est à nouveau susceptible d'être infecté par le virus qui, ayant muté, n'est pas reconnu par le système immunitaire de l'individu.

Le modèle SIS est aussi pertinent pour décrire un scénario dans lequel des machines (des capteurs par exemple) stockent une information dans une mémoire volatile, et se transmettent cette information de proche en proche. L'infection correspond alors à la réplication d'information d'une machine vers une machine voisine, tandis que la rémission correspond à l'effacement de la mémoire volatile.

L'état 0^V , où chaque sommet est susceptible, est absorbant pour ce processus. Le régime stationnaire est donc trivial. Par contraste, le temps d'atteinte de cet état absorbant est non trivial, et capture un aspect intéressant du comportement du processus. Ainsi dans le scénario de machines à mémoire volatile, il représente le temps de survie de l'information dans le système.

Définition 14.1. *Le rayon spectral $\rho(A)$ d'une matrice symétrique A est défini comme le maximum des valeurs absolues de ses valeurs propres.*

On a alors le

Théorème 14.1. *Pour un graphe fini $G = (V, E)$, $\beta, \delta > 0$, notant ρ le rayon spectral de la matrice d'adjacence A de G , et T le temps d'absorption du processus dans l'état 0^V , on a pour tout t et toute configuration initiale $x(0) \in \{0, 1\}^V$:*

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \mathbb{P}(T > t) \leq \sqrt{n \sum_{i \in V} x_i(0) e^{t(\beta\rho - \delta)}} \leq n e^{t(\beta\rho - \delta)}, \quad (14.1)$$

où $n := |V|$.

Nous prouverons ce résultat en fin de chapitre. Il permet d'obtenir une condition simple sous laquelle le temps moyen d'infection est logarithmique en n :

Corollaire 14.1. *Si $\beta\rho < n$, alors*

$$\mathbb{E}(T) \leq \frac{\ln(n) + 1}{\delta - \beta\rho}. \quad (14.2)$$

Preuve. Ecrivant $\mathbb{E}(T) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(T > t) dt$, on majore l'intégrand $\mathbb{P}(T > t)$ par 1 pour $t \leq \ln(n)/(\delta - \beta\rho)$, et par $n e^{t(\beta\rho - \delta)}$ pour $t \geq \ln(n)/(\delta - \beta\rho)$, en utilisant le théorème. Il vient

$$\mathbb{E}(T) \leq \frac{\ln(n)}{\delta - \beta\rho} + n \left[\frac{e^{t(\beta\rho - \delta)}}{\beta\rho - \delta} \right]_{\ln(n)/(\delta - \beta\rho)}^{+\infty} = \frac{\ln(n) + 1}{\delta - \beta\rho},$$

comme annoncé. □

Introduisons maintenant un second descripteur topologique:

Définition 14.2. *Etant donné un graphe $G = (V, E)$, pour tout entier $m < n$, où $n = |V|$, on définit la constante isopérimétrique associée $\eta_m(G)$ comme:*

$$\eta_m(G) = \inf_{S \subset V, |S| \leq m} \frac{|E(S, \bar{S})|}{|S|}, \quad (14.3)$$

où \bar{S} est le complémentaire de S dans V , $E(S, \bar{S})$ est l'ensemble des arêtes avec une extrémité dans S et l'autre dans \bar{S} , et $|E(S, \bar{S})|$ est le nombre de telles arêtes.

On a alors le

Théorème 14.2. *Soit un graphe $G = (V, E)$. Supposons que pour une constante $r \in]0, 1[$, et pour un entier $m < n$ on ait $\beta\eta_m \geq \delta/r$, où η_m est la constante isopérimétrique de G . Notant T le temps d'extinction du processus SIS de paramètres β, δ sur G , on a alors pour tout $k \geq 1$:*

$$\mathbb{P}(T \geq \frac{k}{2\delta m}) \geq (1-r)(1-r^{m-1})^k(1-f(k)) \quad (14.4)$$

pour une fonction $f : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$ telle que $\lim_{k \rightarrow \infty} f(k) = 0$.

On verra dans la preuve, donnée en fin de chapitre, qu'un choix explicite pour $f(k)$ consiste en $f(k) = \mathbb{P}(E_1 + \dots + E_k \leq k/2)$ pour des variables aléatoires E_i i.i.d., exponentielles de paramètre 1. La convergence de f vers 0 découle donc de la loi des grands nombres; l'inégalité de Chernoff permet de plus d'établir que cette décroissance est exponentiellement rapide.

Corollaire 14.2. *Sous les hypothèses du théorème, pour $k = \lfloor r^{-m+2} \rfloor$, on a*

$$\mathbb{P}(T \geq \frac{\lfloor r^{-m+2} \rfloor}{2\delta m}) \geq (1-r)^2(1-f(k)),$$

et donc

$$\mathbb{E}(\delta T) \geq \frac{\lfloor r^{-m+2} \rfloor}{2m}(1-r)^2(1-f(k)).$$

Si pour une séquence de graphes G_n , une suite m_n tendant vers l'infini, et une constante fixe $r \in [0, 1[$ on a $\beta_n \eta_{m_n}(G_n) \geq \delta_n/r$, alors le temps d'extinction T_n de l'épidémie sur G_n de paramètres (β_n, δ_n) vérifie

$$\mathbb{E}(\delta_n T_n) \geq \frac{\lfloor r^{-m_n+2} \rfloor}{2m_n}(1-r)^2(1-o(1)) = e^{\Omega(m_n)}. \quad (14.5)$$

Ce dernier résultat s'interprète comme suit: sous la condition $\beta\eta_m \geq \delta/r$, le temps d'extinction est exponentiellement long en m . Cette condition est à rapprocher de la condition suffisante pour l'extinction rapide, qui s'exprimait comme $\beta\rho < \delta$: ici, on a renversé le signe de l'inégalité, et remplacé ρ par η_m .

Preuve. En appliquant le théorème 14.2 avec $k = \lfloor r^{-m+2} \rfloor$, le membre de droite de (14.4) vérifie

$$(1-r)(1-r^{m-1})^k(1-f(k)) \geq (1-r)[1-kr^{m-1}](1-f(k)),$$

où on a utilisé l'inégalité $\prod_i (1-b_i) \geq 1 - \sum_i b_i$, valide pour toute suite de valeurs $b_i \in [0, 1]$. La première inégalité du corollaire en découle puisque $kr^{m-1} \leq r^{-m+2}r^{m-1} \leq r$.

La minoration de $\mathbb{E}(\delta T)$ s'en déduit alors en écrivant

$$\mathbb{E}(\delta T) \geq \frac{k}{2m} \mathbb{P}(\delta T \geq \frac{k}{2m}).$$

□

14.2 Transition de phase pour des graphes particuliers

Appliquons maintenant ces conditions à des graphes particuliers.

On remarque tout d'abord que le rayon spectral de la matrice d'adjacence d'un graphe d -régulier vaut d . En effet, le rayon spectral $\rho(M)$ d'une matrice M est toujours majoré par $\max_i \sum_j |M_{ij}|$ (exercice). Pour un graphe d -régulier de matrice d'adjacence A , on a $\max_i \sum_j |A_{ij}| = \max_i d_i = d$, où on a noté d_i le degré du sommet i , et donc $\rho(A) \leq \max_i d_i = d$. Inversement, le vecteur e constitué uniquement de 1 est vecteur propre pour la valeur propre d .

Graphe complet

Le graphe complet sur n sommets est $n-1$ -régulier, donc de rayon spectral $n-1$. Par ailleurs, pour tout $m < n$, sa constante isopérimétrique η_m vaut $n-m$. On obtient ainsi le résultat suivant:

Proposition 14.1. *Soit $G = (V, E)$ le graphe complet sur n sommets. Soit $\epsilon \in]0, 1[$ fixé. On note T le temps d'extinction d'une épidémie SIS sur ce graphe, de paramètres $\beta, \delta > 0$.*

Si $\beta(n-1) \leq \delta(1-\epsilon)$, alors

$$\mathbb{E}(\delta T) \leq \frac{\ln(n) + 1}{\epsilon} = O(\ln(n)).$$

Si $\beta(n-1) \geq \delta(1+\epsilon)$, alors

$$\mathbb{E}(\delta T) \geq e^{\Omega(n)}.$$

En effet, la majoration de $\mathbb{E}(\delta T)$ est immédiate au vu de (14.2), puisque $\delta - \beta\rho \geq \delta\epsilon$ par hypothèse.

Pour la minoration, on prend $m_n = n\epsilon/2$. On a alors $\beta\eta_m = \beta(1-\epsilon/2)n \geq (1-\epsilon/2)(1+\epsilon)\delta$ par hypothèse, soit $\beta\eta_m \geq \delta/r$ avec $r^{-1} = (1-\epsilon/2)(1+\epsilon) > 1$ pour $\epsilon \in]0, 1[$. La minoration en $e^{\Omega(n)}$ de $\mathbb{E}(\delta T)$ découle alors de (14.5).

On a donc une transition de comportement de l'épidémie lorsque le produit $\beta(n-1)/\delta$ franchit la valeur critique 1.

Hypercube

On prend ici pour $G = (V, E)$ l'hypercube à d dimensions, i.e. $n = 2^d$, $V = \{0, 1\}^d$, et deux sommets u, v sont adjacents si et seulement si leur distance de Hamming est égale à 1. Le graphe est d -régulier. Par ailleurs, un résultat de Harper [8] établit que pour $m = 2^k$, $k < d$, la constante isopérimétrique vérifie $\eta_m \geq d-k$. Ceci nous permet d'établir la

Proposition 14.2. *Soit $\epsilon \in]0, 1[$. Si $\beta d \leq (1-\epsilon)\delta$, alors*

$$\mathbb{E}(\delta T) \leq \frac{\ln(n) + 1}{\epsilon} = O(\ln(n)).$$

Si $\beta d \geq (1+\epsilon)\delta$, alors

$$\mathbb{E}(\delta T) \geq \exp(\Omega(n^{\epsilon/2})).$$

En effet, la majoration est obtenue de manière identique au cas du graphe complet (et vaut en fait pour n'importe quel graphe d -régulier, pas uniquement l'hypercube). Pour la minoration, on prend $m = 2^{d/2}$. On a alors $\beta\eta_m \geq \beta(1-\epsilon/2)d \geq \delta(1-\epsilon/2)(1+\epsilon) = \delta/r$ par hypothèse, avec $r < 1$. On obtient alors de (14.5) la minoration en $e^{\Omega(m)} = \exp(\Omega(n^{\epsilon/2}))$ de $\mathbb{E}(\delta T)$.

On a ici aussi une transition de comportement de l'épidémie lorsque $\beta d/\delta$ franchit la valeur critique 1.

Graphe d'Erdős-Rényi

Le lemme suivant va nous permettre d'appliquer les bornes générales aux graphes d'Erdős-Rényi de degré suffisamment grand:

Lemme 14.1. *Soit d une fonction de n telle que $d \gg \ln(n)$. Pour le graphe $G_n = \mathcal{G}(n, d/n)$ on a alors les convergences en probabilité, pour tout $\alpha \in]0, 1[$, notant ρ_n le rayon spectral de la matrice d'adjacence de G_n :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\rho_n}{d} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\eta_{\alpha n}(G_n)}{(1 - \alpha)d} = 1. \quad (14.6)$$

Preuve. Soit $\epsilon \in]0, 1[$ fixé. Notant d_i le degré du sommet $i \in [n]$ dans G_n , celui-ci admet une loi Binomiale $\text{Bin}(n - 1, d/n)$. Soit $d' = (n - 1)d/n$ sa moyenne. D'après la borne de l'union, et le fait que les bornes de Chernoff pour une variable binomiale sont plus resserrées que les bornes correspondantes pour des variables de Poisson de même moyenne, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\sup_{i \in [n]} d_i \geq (1 + \epsilon)d) &\leq n\mathbb{P}(\text{Bin}(n - 1, d/n) \geq (1 + \epsilon)d) \\ &\leq n \exp(-d' h(d(1 + \epsilon)/d')), \end{aligned}$$

où $h(x) = x \ln(x) - x + 1$, et le dernier terme correspond à la borne de Chernoff de la probabilité $\mathbb{P}(\text{Poi}(d') \geq (1 + \epsilon)d)$. L'argument de h tend vers $1 + \epsilon$ lorsque $n \rightarrow \infty$, et comme $d' \sim d \gg \ln(n)$, l'exponentielle tend vers 0 plus vite que n'importe quelle puissance négative de n , donc le membre de droite ci-dessus tend vers 0. Pareillement,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\inf_{i \in [n]} d_i \leq (1 - \epsilon)d) &\leq n\mathbb{P}(\text{Bin}(n - 1, d/n) \leq (1 - \epsilon)d) \\ &\leq n \exp(-d' h(d(1 - \epsilon)/d')), \end{aligned}$$

et ce dernier membre tend vers 0, d'après le même argument.

Lorsque $\sup_i d_i \leq d(1 + \epsilon)$, la matrice d'adjacence A_n des G_n a toutes ses valeurs propres de module inférieur ou égal à $d(1 + \epsilon)$, soit $\rho_n \leq d(1 + \epsilon)$ d'après la majoration du rayon spectral par le maximum sur chaque ligne de la somme des valeurs absolues des entrées correspondantes.

Pour une matrice M et un scalaire $a > 0$, on a $a > \rho(M)$ si et seulement si $\lim_{k \rightarrow \infty} (a^{-1}M)^k = 0$: cela est immédiat pour une matrice diagonalisable, mais s'applique aussi au cas non diagonalisable en considérant la forme normale de Jordan de la matrice.

Lorsque $\inf_{i \in [n]} d_i \geq d(1 - \epsilon)$, en choisissant $a = (1 - \epsilon)d$, le vecteur $e = (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$ vérifie

$$(a^{-1}A_n)e \geq e.$$

Donc nécessairement $a = d(1 - \epsilon) \leq \rho(A_n) = \rho_n$. Cela établit la convergence en probabilité $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n/d = 1$.

Pour la constante isopérimétrique $\eta := \eta_{\alpha n}(G_n)$, écrivons

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\eta \leq (1 + \epsilon)(1 - \alpha)d) &\geq \mathbb{P}\left(\frac{|E([n\alpha], \overline{[n\alpha]})|}{n\alpha} \leq (1 + \epsilon)(1 - \alpha)d\right) \\ &= \mathbb{P}(\text{Bin}(n\alpha(n(1 - \alpha)), d/n) \leq n\alpha(1 + \epsilon)(1 - \alpha)d). \end{aligned}$$

Cette dernière probabilité tend vers 1 lorsque $n \rightarrow \infty$, par exemple d'après l'inégalité de Chernoff.

Inversement,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\eta \leq (1 - \epsilon)(1 - \alpha)d) &\leq \sum_{k=1}^{n\alpha} \binom{n}{k} \mathbb{P}\left(\frac{|E([k], \overline{[k]})|}{k} \leq (1 - \epsilon)(1 - \alpha)d\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n\alpha} \binom{n}{k} \mathbb{P}(\text{Bin}(k(n - k), d/n) \leq k(1 - \epsilon)(1 - \alpha)d) \\ &\leq \sum_{k=1}^{n\alpha} n^k e^{-b_k h(a_k/b_k)} \end{aligned}$$

à nouveau d'après la borne de l'union et l'inégalité de Chernoff, où on a noté $a_k = k(1 - \epsilon)(1 - \alpha)d$, et $b_k = k(n - k)d/n$. Le ratio a_k/b_k est majoré par $1 - \epsilon$, et b_k est minoré par $kd(1 - \alpha)$, pour $k \leq n\alpha$. Il vient donc:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\eta \leq (1 - \epsilon)(1 - \alpha)d) &\leq \sum_{k=1}^{n\alpha} n^k e^{-kd(1 - \alpha)h(1 - \epsilon)} \\ &\leq \frac{1}{1 - ne^{-d(1 - \alpha)h(1 - \epsilon)}} - 1. \end{aligned}$$

Ce dernier terme tend vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$, d'après l'hypothèse $d \gg \ln(n)$ et le fait que $(1 - \alpha)h(1 - \epsilon) > 0$. \square

On obtient en corollaire la proposition suivante:

Proposition 14.3. *Soit d une fonction de n telle que $d \gg \ln(n)$ et soit $G_n = \mathcal{G}(n, d/n)$. Pour un $\epsilon > 0$ fixé, si $\beta d \leq (1 - \epsilon)\delta$, avec probabilité tendant vers 1 lorsque $n \rightarrow \infty$, le graphe G_n est tel que le temps d'extinction T_n de l'épidémie SIS sur G_n de paramètres β, δ vérifie $\mathbb{E}(\delta T_n) = O(\ln(n))$.*

Inversement, si $\beta d \geq (1 + \epsilon)\delta$, avec probabilité tendant vers 1 lorsque $n \rightarrow \infty$, le graphe G_n est tel que $\mathbb{E}(\delta T_n) \geq e^{\Omega(n)}$.

14.3 Images Markoviennes de processus de Markov

Nous traitons d'abord le cas des chaînes de Markov pour motiver le résultat sur les processus Markoviens de saut.

Chaînes de Markov

Théorème 14.3. *Soit $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov sur l'espace dénombrable E , de matrice de transition $P = (p_{ij})_{i,j \in E}$. Soit $f : E \rightarrow F$ une fonction de E dans un autre espace dénombrable F . On suppose qu'il existe une matrice de transition \hat{P} sur F telle que, pour tout $i \in E$, et tout $y \in F$, on ait*

$$\sum_{j \in E: f(j)=y} p_{ij} = \hat{p}_{f(i),y}. \quad (14.7)$$

Alors le processus à temps discret sur F défini par $Y_n = f(X_n)$, $n \in \mathbb{N}$, est une chaîne de Markov de matrice de transition \hat{P} .

Preuve. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ et $y_0^n \in F^{n+1}$. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_0^n = y_0^n) &= \sum_{x_0^n \in E^{n+1}: \forall i, f(x_i) = y_i} \mathbb{P}(X_0^n = x_0^n) \\ &= \sum_{x_0^n \in E^{n+1}: \forall i, f(x_i) = y_i} \mathbb{P}(X_0 = x_0) \prod_{i=0}^{n-1} p_{x_i, x_{i+1}} \\ &= \sum_{x_0^{n-1} \in E^n: \forall i, f(x_i) = y_i} \mathbb{P}(X_0 = x_0) \prod_{i=0}^{n-2} p_{x_i, x_{i+1}} \hat{p}_{f(x_{n-1}), y_n} \\ &= \mathbb{P}(Y_0^{n-1} = y_0^{n-1}) \hat{p}_{y_{n-1}, y_n}, \end{aligned}$$

d'après l'hypothèse. Le résultat annoncé en découle. \square

Remarque 14.1. *En général, l'image d'une chaîne de Markov n'est pas Markovienne. Pour s'en convaincre on peut considérer la chaîne de Markov déterministe sur $\{0, 1, 2\}$ donnée par $X_{n+1} = X_n + 1 \pmod{3}$ et la fonction $f(x) = \mathbf{1}_{x=2}$. Pour $X_0^n = \{0, 1, 2, 0, 1, 2, \dots\}$, le processus image est $Y_0^n = \{0, 0, 1, 0, 0, 1, \dots\}$ qui n'est pas Markovien.*

Processus de saut

Théorème 14.4. *Soit $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ un processus Markovien de sauts non explosif sur l'espace dénombrable E , de générateur infinitésimal $Q = (q_{ij})_{i,j \in E}$. Soit $f : E \rightarrow F$ une fonction de E dans un autre espace dénombrable F . On suppose qu'il existe un générateur infinitésimal \hat{Q} sur F tel que, pour tout $i \in E$, et tout $y \in F$ tel que $f(i) \neq y$, on ait*

$$\sum_{j \in E: j \neq i, f(j)=y} q_{ij} = \hat{q}_{f(i),y}. \quad (14.8)$$

Alors le processus à temps continu sur F défini par $Y(t) = f(X(t))$, $t \in \mathbb{R}_+$, est un processus Markovien de sauts de générateur infinitésimal \hat{Q} .

Preuve. On note $\{X_n, \tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ (respectivement, $\{Y_n, \hat{\tau}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$) la suite des états visités et des temps de séjour correspondants par le processus $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ (respectivement, $\{Y(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$). On fixe $\alpha > 0$, $y_0, y_1 \in F$ tels que $y_0 \neq y_1$. On définit alors la fonction g sur $f^{-1}(y_0)$ en posant pour tout $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) = y_0$:

$$g(x_0) := \mathbb{E} \left[e^{-\alpha \hat{\tau}_0} \mathbf{1}_{Y_1=y_1} \mid X_0 = x_0 \right].$$

Dans un premier temps nous prouvons que

$$\forall x_0 \in f^{-1}(y_0), \quad g(x_0) = g^0(x_0) \equiv \frac{\hat{q}_{y_0, y_1}}{\hat{q}(y_0) + \alpha}, \quad (14.9)$$

où on a noté $\hat{q}(y_0) = -\hat{q}_{y_0, y_0} = \sum_{y \neq y_0} \hat{q}_{y_0, y}$.

Pour évaluer g on conditionne par rapport au nombre $n \geq 1$ de sauts du processus $X(t)$ jusqu'à l'instant $\hat{\tau}_0$ inclus, et par rapport à la séquence x_1^n d'états visités lors de ces sauts. Nécessairement, la séquence x_1^{n-1} est à valeurs dans $f^{-1}(y_0)$, et telle que deux valeurs consécutives de x_0^{n-1} sont toutes distinctes. Notons $E_{n-1}(x_0)$ l'ensemble de telles séquences. On a donc

$$\begin{aligned} g(x_0) &= \sum_{n \geq 1} \sum_{x_1^{n-1} \in E_{n-1}(x_0), x_n \in f^{-1}(y_1)} \mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^n \mathbf{1}_{X_i=x_i} e^{-\alpha \tau_{i-1}} \mid X_0 = x_0 \right] \\ &= \sum_{n \geq 1} \sum_{x_1^{n-1} \in E_{n-1}(x_0), x_n \in f^{-1}(y_1)} \prod_{i=1}^n \frac{q_{x_{i-1}, x_i}}{q(x_{i-1}) + \alpha} \\ &= h(x_0) + \sum_{x_1 \in f^{-1}(y_0), x_1 \neq x_0} \frac{q_{x_0, x_1}}{q(x_0) + \alpha} g(x_1), \end{aligned}$$

où on a utilisé les notations $q(x_0) = -q_{x_0, x_0} = \sum_{x \neq x_0} q_{x_0, x}$, et on a introduit la fonction

$$h(x_0) := \sum_{x_1 \in f^{-1}(y_1)} \frac{q_{x_0, x_1}}{q(x_0) + \alpha}.$$

On note l'équation précédente

$$g = h + \mathcal{L}g, \quad (14.10)$$

où \mathcal{L} est l'opération linéaire spécifiée par

$$(\mathcal{L}g)(x_0) := \sum_{x_1 \in f^{-1}(y_0), x_1 \neq x_0} \frac{q_{x_0, x_1}}{q(x_0) + \alpha} g(x_1), \quad x_0 \in f^{-1}(y_0).$$

Montrons que l'équation (14.10) admet pour solution la fonction constante g^0 définie en (14.9).

En introduisant la notation $q'(x_0) := \sum_{x \neq x_0, x \in f^{-1}(y_0)} q_{x_0, x}$, on a pour tout $x_0 \in f^{-1}(y_0)$:

$$q(x_0) = q'(x_0) + \hat{q}(y_0),$$

d'après l'hypothèse du théorème. Ceci entraîne

$$\begin{aligned} h(x_0) + \mathcal{L}g^0(x_0) &= \frac{\hat{q}_{y_0, y_1}}{q(x_0) + \alpha} + \frac{\hat{q}_{y_0, y_1}}{\hat{q}(y_0) + \alpha} \frac{q'(x_0)}{q(x_0) + \alpha} \\ &= \frac{\hat{q}_{y_0, y_1}}{q(x_0) + \alpha} \left[\frac{\hat{q}(y_0) + \alpha + q'(x_0)}{\hat{q}(y_0) + \alpha} \right] \\ &= g^0, \end{aligned}$$

comme annoncé.

Montrons maintenant que g^0 est l'unique solution bornée de (14.10). Pour cela, nous utilisons l'identité suivante, aisément établie par récurrence sur $n \geq 1$:

$$\mathcal{L}^n g(x_0) = \mathbb{E}[e^{-\alpha(\tau_0 + \dots + \tau_{n-1})} \prod_{i=1}^n \mathbf{1}_{f(X_i)=y_0} g(X_n) | X_0 = x_0].$$

Alors, pour deux solutions bornées g, g^0 de (14.10), il vient pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in f^{-1}(y_0)$:

$$g(x) - g^0(x) = \mathcal{L}^n g(x) - \mathcal{L}^n g^0(x) = \mathbb{E}[e^{-\alpha(\tau_0 + \dots + \tau_{n-1})} \prod_{i=1}^n \mathbf{1}_{f(X_i)=y_0} [g(X_n) - g^0(X_n)] | X_0 = x_0].$$

Le terme $e^{-\alpha(\tau_0 + \dots + \tau_{n-1})}$ tend vers 0 presque sûrement lorsque n tend vers $+\infty$ d'après la caractéristique non-explosif du processus $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$. La variable aléatoire $e^{-\alpha(\tau_0 + \dots + \tau_{n-1})} \prod_{i=1}^n \mathbf{1}_{f(X_i)=y_0} [g(X_n) - g^0(X_n)]$ est bornée en valeur absolue d'après l'hypothèse g, g^0 bornées. Le théorème de convergence dominée implique alors que $g \equiv g^0$.

Soit maintenant $n \geq 1$, $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} > 0$, $y_0^n \in F^n$ tels que pour tout $i = 0, \dots, n-1$, $y_i \neq y_{i+1}$. La propriété de Markov forte du processus $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ appliquée au temps d'arrêt $\hat{T}_{n-1} := \hat{\tau}_0 + \dots + \hat{\tau}_{n-2}$ combinée avec (14.9) donne

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathbf{1}_{Y_n=y_n} \prod_{i=0}^{n-1} e^{-\alpha_i \hat{\tau}_i} \mathbf{1}_{Y_i=y_i}] &= \sum_{x \in f^{-1}(y_{n-1})} \mathbb{E}[\mathbf{1}_{Y_n=y_n} \mathbf{1}_{X(\hat{T}_{n-1})=x} e^{-\alpha_{n-1} \hat{\tau}_{n-1}} \prod_{i=0}^{n-2} e^{-\alpha_i \hat{\tau}_i} \mathbf{1}_{Y_i=y_i}] \\ &= \sum_{x \in f^{-1}(y_{n-1})} \mathbb{E}[\mathbf{1}_{X(\hat{T}_{n-1})=x} \prod_{i=0}^{n-2} e^{-\alpha_i \hat{\tau}_i} \mathbf{1}_{Y_i=y_i}] \frac{\hat{q}_{y_{n-1}, y_n}}{\hat{q}(y_{n-1}) + \alpha_{n-1}} \\ &= \mathbb{E}[\mathbf{1}_{Y_{n-1}=y_{n-1}} \prod_{i=0}^{n-2} e^{-\alpha_i \hat{\tau}_i} \mathbf{1}_{Y_i=y_i}] \frac{\hat{q}_{y_{n-1}, y_n}}{\hat{q}(y_{n-1}) + \alpha_{n-1}}. \end{aligned}$$

En itérant cette formule, on obtient

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_{Y_n=y_n} \prod_{i=0}^{n-1} e^{-\alpha_i \hat{\tau}_i} \mathbf{1}_{Y_i=y_i}] = \mathbb{P}(Y_0 = y_0) \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\hat{q}_{y_i, y_{i+1}}}{\hat{q}(y_i) + \alpha_i}.$$

Le processus $\{Y(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ est non-explosif car l'ensemble de ses sauts est un sous-ensemble de ceux de $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$, lui-même non-explosif. Il admet donc la loi annoncée. \square

14.4 Couplage de processus Markoviens de saut

Nous donnons tout d'abord un résultat général dont nous déduirons le résultat du théorème 14.1. Nous établissons ensuite le théorème 14.2.

Définition 14.3. *Un processus de vie et mort généralisé est un processus Markovien de sauts sur \mathbb{N}^k , pour un $k \in \mathbb{N}$, dont les seuls taux de transition non nuls consistent en un changement de $+1$ ou -1 sur une seule coordonnée. On les note, pour $x \in \mathbb{N}^k$, $i \in [k]$, $q_{x, x+e_i} = \beta_i(x)$ (le taux de naissance au site i dans l'état x), et $q_{x, x-e_i} = \delta_i(x)$ (le taux de mort au site i dans l'état x).*

On a alors le

Théorème 14.5. *Soient X, X' deux processus de vie et mort généralisés sur \mathbb{N}^k , supposés non-explosifs, de fonctions taux de naissance et mort respectives (β, δ) et (β', δ') . On suppose que pour tous $x, x' \in \mathbb{N}^k$ tels que $x \leq x'$, on a*

$$\forall i \in [k], x_i = x'_i \Rightarrow \beta_i(x) \leq \beta'_i(x), \delta_i(x) \geq \delta'_i(x).$$

Alors pour deux conditions initiales $x(0), x'(0)$ si $x(0) \leq x'(0)$, il existe une construction couplée des processus X, X' issus de ces conditions initiales telle que avec probabilité 1,

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, X(t) \leq X'(t).$$

Preuve. Considérons un processus de Markov sur l'espace $E := \{(x, x') \in \mathbb{N}^k \times \mathbb{N}^k : x \leq x'\}$ de condition initiale $(x(0), x'(0))$, et de taux de transition non nuls donnés, pour tout $(x, x') \in E$ et tout $i \in [k]$ par

$$\begin{aligned} x_i < x'_i &\Rightarrow q_{(x, x'), (x+e_i, x')} = \beta_i(x), q_{(x, x'), (x-e_i, x')} = \delta_i(x), \\ &q_{(x, x'), (x, x'+e_i)} = \beta'_i(x'), q_{(x, x'), (x, x'-e_i)} = \delta'_i(x'), \\ x_i = x'_i &\Rightarrow q_{(x, x'), (x+e_i, x'+e_i)} = \beta_i(x) \\ &q_{(x, x'), (x, x'+e_i)} = \beta'_i(x') - \beta_i(x), \\ &q_{(x, x'), (x-e_i, x'-e_i)} = \delta'_i(x'), \\ &q_{(x, x'), (x-e_i, x')} = \delta_i(x) - \delta'_i(x'). \end{aligned} \tag{14.11}$$

D'après les hypothèses sur les fonctions $(\alpha, \beta), (\alpha', \beta')$, les taux ainsi définis sont bien non-négatifs. Supposons d'abord que le processus correspondant est non-explosif. Prenant pour tout $(x, x') \in E$, $f(x, x') = x$, vérifions que le théorème 14.4 s'applique.

Ce sera le cas si pour tout $(x, x') \in \mathbb{N}^k$, $x \leq x'$, tout $i \in [k]$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{y': (x+e_i, y') \in E} q_{(x, x'), (x+e_i, y')} &= \beta_i(x), \\ \sum_{y': (x-e_i, y') \in E} q_{(x, x'), (x-e_i, y')} &= \delta_i(x). \end{aligned}$$

Chacune de ces identités est trivialement vérifiée si $x'_i > x_i$, la somme se réduisant à l'unique terme pour $y' = x'$. Dans le cas $x_i = x'_i$, la première identité se vérifie aussi directement, la somme se réduisant à l'unique terme $y' = x' + e_i$. La seconde identité implique la somme des deux termes $y' = x'$ et $y' = x' - e_i$, et donne:

$$\delta'_i(x') + \delta_i(x) - \delta'_i(x') = \delta_i(x),$$

qui est bien vérifiée. La première composante sur \mathbb{N}^k du processus $(X(t), X'(t))$ est donc bien un processus de vie et mort généralisé de fonctions associées (β, δ) . On vérifie de manière semblable que la deuxième composante X' est un processus de vie et mort généralisé de fonctions associées (β', δ') .

Pour établir que le processus ci-dessus est non-explosif, on peut procéder comme suit. Soit $N \in \mathbb{N}$ une borne sur le nombre de sauts de chaque composante x, x' . On étend l'espace d'états à (x, n, x', n') , n (resp. n') comptant le nombre de sauts de la composante x (resp. x').

On considère le processus Markovien de sauts sur $(\mathbb{N}^k \times \{0, \dots, N\})^2$ dont les taux de transition sont spécifiés comme suit. Si $x \leq x'$ et $n, n' < N$, alors le taux de transition de (x, n, x', n') vers (y, m, y', m') est égal à $q_{(x, x'), (y, y')}$ si $m = n + \mathbf{1}_{y \neq x}$ et $m' = n' + \mathbf{1}_{y' \neq x'}$, où q est défini en (14.11), et à zéro sinon. Dans tous les autres cas, les seuls taux de transition non nuls sont donnés par

$$\begin{aligned} (x, n, x', n') \rightarrow (y, n+1, x', n') &: \mathbf{1}_{n < N} \{ \beta_i(x) \mathbf{1}_{y=x+e_i} + \delta_i(x) \mathbf{1}_{y=x-e_i} \}, \\ (x, n, x', n') \rightarrow (x, n, y', n'+1) &: \mathbf{1}_{n' < N} \{ \beta'_i(x') \mathbf{1}_{y'=x'+e_i} + \delta'_i(x') \mathbf{1}_{y'=x'-e_i} \}. \end{aligned}$$

Le processus est alors clairement non-explosif: partant de la condition initiale $(x(0), 0, x'(0), 0)$, on aura au plus $2N$ sauts avant arrêt des transitions en un état absorbant (x, N, x', N) . Le théorème 14.4 s'applique alors. Il implique que la composante (x, n) est un processus Markovien de sauts avec pour x un processus de vie et mort généralisé (β, δ) , et n comptant ses transitions,

jusqu'à arrêt au bout de N transitions, et pareillement pour la composante (x', n') . Par ailleurs l'hypothèse de non-explosivité de X et X' entraîne que presque sûrement, $\lim_{N \rightarrow \infty} T_N, T'_N = +\infty$, où T_N (resp., T'_N) désigne le temps d'atteinte de N par la composante n (resp. n').

Enfin, on voit aisément, d'après la structure des processus Markoviens de saut, que cette construction jointe au rang N coïncide en loi, sur l'intervalle $T_N \wedge T'_N$, premier instant de N -ème saut d'une des deux composantes x, x' , avec le processus de taux (14.11). Ce dernier est donc non-explosif. \square

Preuve du théorème 14.1

Considérons $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$, le processus SIS de paramètres $\beta, \delta > 0$ sur un graphe $G = (V, E)$, comme un processus de vie et mort généralisé sur \mathbb{N}^n avec $n = |V|$. On prend comme fonctions de taux de naissance associées $\beta_i(x) = \mathbf{1}_{x_i=0} \sum_{j \sim i} x_j$ où $i \sim j$ indique que l'arc (i, j) est présent dans G , et comme fonction de taux de mort $\delta_i(x) = \delta x_i$. On introduit maintenant le processus $\{X'(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ dit de *marche aléatoire branchante* qui est par définition un processus de vie et mort généralisé sur \mathbb{N}^n de fonctions de taux $\beta'_i(x') = \sum_{j \sim i} x'_j$ et $\delta'_i(x') = \delta x'_i$.

Le processus X est clairement non-explosif puisque, partant d'une condition initiale $x(0)$, il ne quitte pas l'ensemble fini $\{0, \dots, \sup_i x_i(0)\}^n$. Admettons pour l'instant que le processus X' est lui aussi non-explosif. La condition de comparaison des taux du théorème 14.5 est bien vérifiée: pour $x \leq x'$, et i tel que $x_i = x'_i$, on a $\delta_i(x) = \delta'_i(x') = \delta x_i$, et $\beta_i(x) \leq \beta \sum_{j \sim i} x'_j = \beta'_i(x')$.

Il existe alors un couplage (X, X') pour lequel les deux composantes ont même condition initiale $x(0) \in \{0, 1\}^n$ et avec probabilité 1, $X(t) \leq X'(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. Cela implique la majoration suivante, notant T le temps d'absorption en 0 du processus X :

$$\mathbb{P}(T > t) \leq \mathbb{E} \sum_{i \in V} X_i(t) \leq \mathbb{E} \sum_{i \in V} X'_i(t).$$

En effet, la première inégalité vient de la borne de l'union, et de ce que $\mathbb{P}(X_i(t) > 0) \leq \mathbb{E}(X_i(t))$, et la deuxième inégalité se déduit du résultat de couplage: si $X_i(t) \leq X'_i(t)$ presque sûrement, alors les espérances sont ordonnées pareillement.

Nous établissons maintenant le résultat suivant:

Lemme 14.2. *Le processus X' de marche aléatoire branchante défini ci-dessus est non-explosif, et tel que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,*

$$\mathbb{E}(X'(t)) = e^{t(\beta A - \delta I)} x(0), \quad (14.12)$$

où A désigne la matrice d'adjacence de G , I la matrice identité de taille n , et $x(0) \in \mathbb{N}^n$ la condition initiale du processus.

Avant de prouver le lemme, montrons qu'il permet de conclure la preuve du théorème 14.1. En effet, soit $\{u_i\}_{i \in V}$ une base orthonormée de vecteurs propres de la matrice symétrique A , et soient λ_i les valeurs propres réelles associées. De (14.12) il vient, notant $e = (1, \dots, 1)^T$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \sum_{i \in V} X'_i(t) &= \langle e, e^{t(\beta A - \delta I)} x(0) \rangle \\ &= \sum_{i \in V} \langle e, e^{t(\beta \lambda_i - \delta)} u_i u_i^T x(0) \rangle \\ &= \sum_{i \in V} e^{t(\beta \lambda_i - \delta)} \langle e, u_i \rangle \langle u_i, x(0) \rangle \\ &\leq e^{t(\beta \rho - \delta)} \sum_{i \in V} |\langle e, u_i \rangle| |\langle u_i, x(0) \rangle| \\ &\leq e^{t(\beta \rho - \delta)} \|e\| \|x(0)\|, \end{aligned}$$

où on a majoré chacune des valeurs propres $e^{t(\beta \lambda_i - \delta)}$ de la matrice $e^{t(\beta A - \delta I)}$ par $e^{t(\beta \rho - \delta)}$ et utilisé l'inégalité de Cauchy-Schwarz à la dernière ligne. Le résultat du théorème 14.1 en découle, le produit des normes étant $\sqrt{n \sum_{i \in V} x_i(0)}$ pour $x(0) \in \{0, 1\}^V$.

Preuve. (du lemme 14.2). Pour une condition initiale $X'(0) = x'$, notant $|x'|_1 = \sum_{i \in V} |x'_i|$, au bout de k sauts, la somme des composantes de l'état y ainsi atteint est au plus $|x'|_1 + k$. La somme des taux de transition est donc majorée par $(\delta + n\beta)[|x'|_1 + k] = c(|x'|_1 + k)$ pour une constante $c = \delta + n\beta > 0$. Le temps T_k de k -ème saut est donc minoré par

$$\sum_{\ell=|x'|_1}^k \frac{1}{c\ell} E_\ell,$$

où les E_ℓ sont des variables aléatoires i.i.d. exponentielles de paramètre 1.

Pour un $t > 0$ fixé, soit $N_t = |x'|_1 + \sup\{k > 0 : \sum_{\ell=|x'|_1}^k \frac{1}{c\ell} E_\ell \leq t\}$. Nous montrons maintenant que pour tout $t > 0$, $\mathbb{E}N_t < +\infty$. Ceci entraînera a fortiori le caractère non-explosif du processus. En effet, le nombre de sauts du processus sur $[0, t]$ est majoré par N_t ; notant $T_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} T_k$, sur l'événement $\{T_\infty \leq t\}$ on a $N_t = +\infty$, et donc

$$\mathbb{P}(T_\infty \leq t) > 0 \Rightarrow \mathbb{E}N_t = +\infty.$$

Ainsi, la finitude de $\mathbb{E}N_t$ pour tout t entraîne $\mathbb{P}(T_\infty \leq t) = 0$ pour tout t , i.e. le processus est non-explosif.

Pour un $n \in \mathbb{N} > 0$ fixé, le processus $\{N_t \wedge n\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ est par construction Markovien de sauts, à valeurs dans $[n]$, de taux non nuls de transition $q_{x, x+1} = cx\mathbf{1}_{x < n}$, et de condition initiale $|x|_1$. On a donc pour tout $k \in [n]$:

$$\begin{aligned} 1 - \mathbb{P}(N_{t+h} \wedge n = N_t \wedge n | N_t \wedge n = k) &= \mathbb{P}(N_{t+h} \wedge n = N_t \wedge n + 1 | N_t \wedge n = k) + o(h) \\ &= hck\mathbf{1}_{k < n} + o(h). \end{aligned}$$

L'équation de Kolmogorov nous donne ainsi (le fait que l'espace d'états est fini nous permet d'intervertir somme et dérivation):

$$\frac{d}{dt} \mathbb{E}(N_t \wedge n) = c\mathbb{E}[N_t \mathbf{1}_{N_t < n}] \leq c\mathbb{E}(N_t \wedge n).$$

Le lemme de Gronwall 17.4 et la condition initiale $N_0 = |x'|_1$ nous donnent alors $\mathbb{E}(N_t \wedge n) \leq |x'|_1 e^{ct}$. Cette majoration étant valide pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit par convergence monotone que $\mathbb{E}(N_t) \leq |x'|_1 e^{ct}$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

Pour établir (14.12), on écrit pour tout $x' \in \mathbb{N}^V$, $i \in V$:

$$X'_i(t+h) - X'_i(t) = (X'_i(T_1) - X'_i(t))\mathbf{1}_{T_1 \leq t+h} + (X'_i(t+h) - X'_i(T_1))\mathbf{1}_{T_1 > t+h},$$

où T_1 désigne le premier saut du processus après t . On majore la valeur absolue $|X'_i(t+h) - X'_i(T_1)|$ par la valeur $N'(h)$ du processus Markovien de sauts précédemment considéré, de condition initiale $N'(0) = |X'(t)|_1 + 1$. On obtient ainsi:

$$\mathbb{E}[X'_i(t+h) - X'_i(t) | X'(t)] = h \left[\sum_{j \sim i} \beta X'_j(t) - \delta X'_i(t) \right] + O(h^2 |X'(t)|_1) + O(h(|X'(t)|_1 + 1)(e^{ch} - 1)),$$

les constantes implicites dans les $O(\cdot)$ étant uniformes en t, x' .

Ceci entraîne, d'après les bornes précédentes en $|x'|_1 e^{ct}$ sur $\mathbb{E}|X'(t)|_1$:

$$\mathbb{E}(X'_i(t+h)) - \mathbb{E}(X'_i(t)) = h \left[\sum_{j \sim i} \beta X'_j(t) - \delta X'_i(t) \right] + O(h^2).$$

Il en découle:

$$\frac{d}{dt} \mathbb{E}X'(t) = [\beta A - \delta I] \mathbb{E}X'(t).$$

L'unique solution de cette équation différentielle est donnée par (14.12), d'où le résultat. \square

Preuve du théorème 14.2

On suppose l'existence de $m < n$ et $r \in]0, 1[$ tels que $\beta\eta_m \geq \delta/r$. Soit Z le processus de sauts sur $\{0, \dots, m\}$ de taux de transition non nuls:

$$\forall z \in \{0, \dots, m\}, q_{z,z+1} = \frac{\delta z}{r} \mathbf{1}_{z < m}, q_{z,z-1} = \delta z.$$

Considérons alors le processus Markovien de sauts (X, Z) sur l'espace $E := \{(x, z) \in \{0, 1\}^V \times \{0, \dots, m\}, \sum_{i \in V} x_i \geq z\}$ défini par les taux de transition non nuls, pour $(x, z) \in E$ et tout $i \in V$:

$$\begin{aligned} \sum_{j \in V} x_j > z &\Rightarrow q_{(x,z),(x+e_i,z)} = \beta(1-x_i) \sum_{j \sim i} x_j, q_{(x,z),(x-e_i,z)} = \delta x_i, \\ &q_{(x,z),(x,z+1)} = \frac{\delta z}{r} \mathbf{1}_{z < m}, q_{(x,z),(x,z-1)} = \delta z, \\ \sum_{j \in V} x_j = z &\Rightarrow q_{(x,z),(x+e_i,z+1)} = a(x)\beta(1-x_i) \sum_{j \sim i} x_j, \\ &q_{(x,z),(x+e_i,z)} = [1-a(x)]\beta(1-x_i) \sum_{j \sim i} x_j, \\ &q_{(x,z),(x-e_i,z-1)} = x_i \delta, \end{aligned}$$

où on a introduit $a(x) := \mathbf{1}_{\sum_j x_j < m} \frac{\delta(\sum_{j \in V} x_j)}{r \sum_{i \in V} \beta(1-x_i) \sum_{j \sim i} x_j}$.

Vérifions qu'il s'agit d'un couplage du processus SIS et du processus Z précédemment introduit. Tout d'abord, les taux ainsi définis sont non négatifs: en effet, notant pour un x fixé $S = \{i : x_i = 1\}$, $a(x)$ s'écrit

$$a(x) = \frac{\delta|S|}{r \sum_{i \in V} \beta|E(S, \bar{S})|},$$

et est par définition de η_m , puisque $|S| \leq m$ sous l'hypothèse $z = \sum_{i \in V} x_i$, majoré par $\delta/(r\beta\eta_m)$. Donc $a(x) \leq 1$, et la non-négativité des taux ci-dessus en découle.

Le processus ainsi construit a un espace d'état fini, et est donc non-explosif. Vérifions maintenant la dernière condition du théorème 14.4. Pour tout $(x, z) \in E$ tel que $z < \sum_{i \in V} x_i$, la vérification est triviale. Lorsque $z = \sum_{i \in V} x_i$, on vérifie directement les identités

$$\begin{aligned} \sum_{i \in V} q_{(x,z),(x+e_i,z+1)} &= \delta z/r, \\ \sum_{i \in V} q_{(x,z),(x-e_i,z-1)} &= \delta z, \\ q_{(x,z),(x+e_i,z)} + q_{(x,z),(x+e_i,z+1)} &= \beta(1-x_i) \sum_{j \sim i} x_j, \\ q_{(x,z),(x-e_i,z-1)} &= \delta x_i, \end{aligned}$$

établissant ainsi qu'il s'agit bien d'un couplage des deux processus considérés.

On borne alors la probabilité de survie du processus SIS au-delà d'un instant t en écrivant $\mathbb{P}(T > t) \geq \mathbb{P}(Z(t) > 0)$. L'analyse de $Z(t)$ procède alors comme suit. La chaîne à temps discret Z_n des états successifs visités par $Z(t)$ a pour probabilités de transition non nulles $p_{z,z+1} = \mathbf{1}_{z < m} 1/(1+r)$, $p_{z,z-1} = r/(1+r)$, et est absorbée en 0.

Notant $\pi(z)$ la probabilité que la chaîne $\{Z_n\}$ visite l'état m avant d'être absorbée, conditionnellement à son état initial $Z_0 = z$, on peut établir (exercice) que

$$\pi(z) = \frac{1-r^z}{1-r^m}.$$

La probabilité qu'il y ait au moins k visites distinctes à l'état m par $Z(t)$ avant absorption en 0, conditionnellement en $Z(0) > 0$, est alors minorée par

$$\frac{1-r}{1-r^m} \left(\frac{1-r^{m-1}}{1-r^m} \right)^{k-1}.$$

En effet, après chaque visite à m le prochain état visité est $m - 1$, d'où l'expression ci-dessus.

Puisque chaque temps de séjour en m a une durée exponentielle de paramètre δ/m , on obtient la minoration

$$\mathbb{P}(T > \frac{k}{2\delta m}) \geq \frac{1-r}{1-r^m} \left(\frac{1-r^{m-1}}{1-r^m} \right)^{k-1} \mathbb{P}(E_1 + \dots + E_k \geq k/2),$$

où les E_i sont i.i.d. de loi Exponentielle de paramètre 1. La minoration

$$\mathbb{P}(T > \frac{k}{2\delta m}) \geq (1-r)(1-r^{m-1})^{k-1}(1-f(k)),$$

où $f(k) := \mathbb{P}(E_1 + \dots + E_k < k/2)$ en découle. La propriété $\lim_{k \rightarrow \infty} f(k) = 0$ se déduit de la loi des grands nombres.

Chapitre 15

Graphes en loi de puissance

De nombreux exemples de grands graphes étudiés dans des domaines très divers sont tels que le nombre X_i de leurs sommets de degré $i \in \mathbb{N}$ varie en *loi de puissance*, i.e. $X_i \approx C \times i^{-\beta}$ pour un exposant $\beta > 0$, pour une large plage de valeurs de i . Citons comme exemples: le graphe représentant les routeurs de l'Internet et les liens de communication les reliant, le graphe du Web, le graphe d'amitié de FaceBook, le graphe des protéines de la biochimie cellulaire, connectées entre elles si impliquées dans une même réaction chimique, le graphe de Hollywood reliant entre eux les acteurs ayant joué dans un même film...

De tels graphes sont dits en *loi de puissance*, ou encore *sans échelle*, car il n'y a pas un ordre de grandeur bien défini représentatif de la majorité des degrés des noeuds, ceux-ci variant largement dans une grande plage de valeurs $i \in \mathbb{N}$.

Cette propriété n'est pas présente dans les graphes d'Erdős-Rényi: en effet dans $\mathcal{G}(n, d/n)$ pour $n \gg \ln(n)$, comme vu au chapitre précédent avec forte probabilité le degré d_u de chaque sommet u est proche de d .

Dans ce chapitre nous présentons un modèle alternatif de graphe aléatoire, dû à Barabási et Albert, et prouvons que ce graphe, dit de Barabási-Albert, est en loi de puissance. Sa construction procède de manière séquentielle, selon un principe dit d'attachement préférentiel (un nouveau sommet est plus susceptible de se connecter à des sommets de degré déjà élevé, augmentant ainsi leur degré).

L'analyse correspondante nous conduit à introduire l'inégalité d'Azuma-Hoeffding. Celle-ci est un exemple d'inégalité de concentration, fournissant des bornes sur la probabilité de déviation d'une variable par rapport à sa moyenne. Cette inégalité d'Azuma-Hoeffding est similaire à l'inégalité de Chernoff, mais s'applique au-delà du cadre de sommes de variables i.i.d..

15.1 Le modèle de Barabási-Albert

Partant d'un graphe initial $G_0 = (\mathcal{V}_0, \mathcal{E}_0)$, on construit une suite de graphes $G_t = (\mathcal{V}_t, \mathcal{E}_t)$ pour $t \in \mathbb{N}$ comme suit. A l'étape $t \geq 1$, un nouveau sommet, noté t , est ajouté à l'ensemble \mathcal{V}_{t-1} . Le sommet t est connecté par l'unique arête (t, V_t) , où $V_t \in \mathcal{V}_{t-1}$ est appelé *point d'ancrage* de t , à \mathcal{V}_{t-1} . Le graphe G_t est alors défini par $\mathcal{V}_t = \mathcal{V}_{t-1} \cup \{t\} = \mathcal{V}_0 \cup [t]$, et $\mathcal{E}_t = \mathcal{E}_{t-1} \cup \{(t, V_t)\}$.

On note de plus $n_t = |\mathcal{V}_t| = n_0 + t$, $e_t = |\mathcal{E}_t| = e_0 + t$. Le modèle est alors spécifié par le choix probabiliste de chaque V_t . Soit $\alpha \in [0, 1]$. On pose alors, notant $\mathcal{F}_{t-1} = \sigma(V_1^{t-1})$:

$$\forall v \in \mathcal{V}_{t-1}, \mathbb{P}(V_t = v | \mathcal{F}_{t-1}) = \alpha \frac{1}{n_{t-1}} + (1 - \alpha) \frac{D_{t-1}(v)}{2e_{t-1}}, \quad (15.1)$$

où $D_{t-1}(v)$ est défini comme le degré du sommet v dans le graphe G_{t-1} . Vérifions qu'on a bien une loi de probabilité sur \mathcal{V}_{t-1} : sommant sur $v \in \mathcal{V}_{t-1}$, on obtient

$$\alpha + (1 - \alpha) \frac{\sum_{v \in \mathcal{V}_{t-1}} D_{t-1}(v)}{2e_{t-1}}.$$

La somme des degrés des sommets d'un graphe vaut deux fois le nombre d'arêtes. L'expression précédente vaut donc bien 1. On notera $\pi_t(v|V_1^{t-1})$ le membre de droite de (15.1). Ainsi pour tout $v_1^{t-1} \in \mathcal{V}_0 \times \cdots \times \mathcal{V}_{t-2}$, et tout $v \in \mathcal{V}_{t-1}$, on a:

$$\mathbb{P}(V_t = v | V_1^{t-1} = v_1^{t-1}) = \pi_t(v|v_1^{t-1}). \quad (15.2)$$

En mots, avec probabilité α le sommet d'ancrage V_t est choisi uniformément dans \mathcal{V}_{t-1} , et avec probabilité $1 - \alpha$ choisi selon une distribution proportionnelle au degré $D_{t-1}(v)$. C'est ce biais vers les sommets de plus fort degré qui fournit l'*attachement préférentiel*. On a alors le

Théorème 15.1. *Soit $\alpha \in [0, 1[$. Soit $X_i(t) = \sum_{v \in \mathcal{V}_t} \mathbf{1}_{D_t(v)=i}$ le nombre de sommets de degré $i \in \mathbb{N}$ dans G_t . Soient les constantes $\{c_i\}_{i \geq 1}$ définies par*

$$c_1 = \frac{2}{3 + \alpha}, \quad \forall i \geq 2, \quad \frac{c_i}{c_{i-1}} = 1 - \frac{3 - \alpha}{2 + 2\alpha + (1 - \alpha)i}. \quad (15.3)$$

On a alors pour tout $i \geq 1$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X_i(t)}{t} = c_i$ presque sûrement.

Voyons en quoi cela implique que le graphe de Barabási-Albert est en loi de puissance. On a pour $i \geq 1$ l'évaluation

$$\begin{aligned} c_i &= c_1 \prod_{j=2}^i \left(1 - \frac{3-\alpha}{2+2\alpha+(1-\alpha)j}\right) \\ &= c_1 \exp\left(\sum_{j=2}^i \ln\left(1 - \frac{3-\alpha}{2+2\alpha+(1-\alpha)j}\right)\right) \\ &= c_1 \exp\left(\sum_{j=2}^i \left[-\frac{1}{j} \frac{3-\alpha}{1-\alpha} + \gamma_j\right]\right), \end{aligned}$$

où $\gamma_j = O(j^{-2})$, et est donc sommable. On a donc l'équivalent pour $i \rightarrow \infty$:

$$c_i \sim C \times i^{-\beta},$$

où $\beta = \frac{3-\alpha}{1-\alpha}$. C'est en ce sens que le graphe de Barabási-Albert est en loi de puissance d'exposant β . En faisant varier α dans $[0, 1[$, β décrit l'intervalle $[3, +\infty[$.

La preuve procède en deux étapes. On analyse d'abord le comportement des moyennes $x_i(t) := \mathbb{E}X_i(t)$. On contrôle ensuite les probabilités de fluctuation de $X_i(t)$ autour de sa moyenne. Les résultats intermédiaires correspondants constituent les deux lemmes qui suivent.

Lemme 15.1. *(Contrôle de la moyenne $x_i(t)$). Pour $i \geq 1$ et $\epsilon > 0$ fixés, la quantité $\delta_i(t) := x_i(t) - c_i t$ vérifie $\delta_i(t) = O(t^\epsilon)$ en $t \rightarrow \infty$.*

Preuve. On considère d'abord le cas $i = 1$. La dynamique (15.1) donne la relation suivante:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1(t+1) - X_1(t) = 0 | \mathcal{F}_t) &= \mathbb{P}(D_t(V_{t+1}) = 1 | \mathcal{F}_t) \\ &= \alpha \frac{X_1(t)}{n_t} + (1 - \alpha) \frac{1 \times X_1(t)}{2e_t}, \\ \mathbb{P}(X_1(t+1) - X_1(t) = 1 | \mathcal{F}_t) &= 1 - \mathbb{P}(X_1(t+1) - X_1(t) = 0 | \mathcal{F}_t). \end{aligned}$$

On en déduit

$$x_1(t+1) - x_1(t) = 1 - \alpha \frac{x_1(t)}{n_t} - (1 - \alpha) \frac{x_1(t)}{2e_t},$$

d'où

$$\begin{aligned}\delta_1(t+1) &= \delta_1(t) - c_1 + 1 - x_1(t) \left[\frac{\alpha}{n_t} + \frac{1-\alpha}{2e_t} \right] \\ &= \delta_1(t) \left[1 - \frac{\alpha}{n_t} - \frac{1-\alpha}{2e_t} \right] + 1 - c_1 \left[1 + \frac{\alpha t}{n_t} + \frac{(1-\alpha)t}{2e_t} \right].\end{aligned}$$

L'expression de n_t et e_t implique que lorsque $t \rightarrow \infty$, le coefficient de c_1 s'écrit $1 + \alpha + (1 - \alpha)/2 + O(1/t)$, soit encore $1/c_1 + O(1/t)$. On obtient ainsi:

$$|\delta_1(t+1)| \leq \delta_1(t) + O(1/t),$$

d'où $\delta_1(t) = O(\ln(t))$. L'évaluation $\delta_1(t) = O(t^\epsilon)$ est a fortiori vérifiée.

Pour $i \geq 2$, on écrit

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_i(t+1) - X_i(t) = 1 | \mathcal{F}_t) &= \mathbb{P}(D_t(V_{t+1}) = i-1 | \mathcal{F}_t) \\ &= \alpha \frac{X_{i-1}(t)}{n_t} + (1-\alpha) \frac{(i-1)X_{i-1}(t)}{2e_t}, \\ \mathbb{P}(X_i(t+1) - X_i(t) = -1 | \mathcal{F}_t) &= \mathbb{P}(D_t(V_{t+1}) = i | \mathcal{F}_t) \\ &= \alpha \frac{X_i(t)}{n_t} + (1-\alpha) \frac{(i)X_i(t)}{2e_t}, \\ \mathbb{P}(X_i(t+1) - X_i(t) = 0 | \mathcal{F}_t) &= 1 - \mathbb{P}(X_i(t+1) - X_i(t) \in \{-1, 1\} | \mathcal{F}_t).\end{aligned}$$

Ceci entraîne

$$x_i(t+1) = x_i(t) + x_{i-1}(t) \left[\frac{\alpha}{n_t} + \frac{(i-1)(1-\alpha)}{2e_t} \right] - x_i(t) \left[\frac{\alpha}{n_t} + \frac{(i)(1-\alpha)}{2e_t} \right],$$

d'où

$$\begin{aligned}\delta_i(t+1) &= \delta_i(t) - c_i + c_{i-1} \left[\alpha + \frac{(1-\alpha)(i-1)}{2} \right] + \delta_{i-1}(t) \left[\frac{\alpha}{n_t} + \frac{(i-1)(1-\alpha)}{2e_t} \right] \\ &\quad - c_i \left[\alpha + \frac{(1-\alpha)i}{2} \right] - \delta_i(t) \left[\frac{\alpha}{n_t} + \frac{(i)(1-\alpha)}{2e_t} \right] + O(t^{-1}) \\ &= \delta_i(t) \left[1 - \frac{\alpha}{n_t} - \frac{(i)(1-\alpha)}{2e_t} \right] + c_{i-1} \left[\alpha + \frac{(1-\alpha)(i-1)}{2} \right] \\ &\quad + O(t^{\epsilon-1}) - c_i \left[1 + \alpha + \frac{(1-\alpha)i}{2} \right],\end{aligned}$$

où on a utilisé l'hypothèse de récurrence sur i : $\delta_{i-1}(t) = O(t^\epsilon)$. Dans cette dernière relation, les termes constants s'annulent pour

$$c_{i-1} \left[\alpha + \frac{(1-\alpha)(i-1)}{2} \right] = c_i \left[1 + \alpha + \frac{(1-\alpha)i}{2} \right],$$

soit

$$\frac{c_i}{c_{i-1}} = 1 - \frac{3-\alpha}{2+2\alpha+(1-\alpha)i},$$

vérifiée par définition de c_i . Il vient donc

$$|\delta_i(t+1)| \leq |\delta_i(t)| + O(t^{\epsilon-1}).$$

Sommant sur t , on obtient comme annoncé $\delta_i(t) = O(t^\epsilon)$. □

Lemme 15.2. (Contrôle des fluctuations $X_i(t) - x_i(t)$). Pour tous $t, i \geq 1$, et tout $a > 0$, on a

$$\mathbb{P}(|X_i(t) - x_i(t)| \geq a) \leq 2 \exp\left(-\frac{a^2}{8t}\right). \quad (15.4)$$

Nous prouverons ce lemme dans la section suivante, après avoir vu l'inégalité d'Azuma-Hoeffding.

Preuve. (du théorème 15.1). On pose, pour tout $t \geq 1$, $a_t := 4\sqrt{t \ln(t)}$. D'après le lemme 15.2, on a

$$\mathbb{P}(|X_i(t) - x_i(t)| \geq a_t) \leq 2 \exp\left(-\frac{16t \ln(t)}{8t}\right) = \frac{2}{t^2}.$$

Ce membre de droite étant sommable en t , le lemme de Borel-Cantelli donne l'existence d'un rang T aléatoire presque sûrement fini tel que:

$$t \geq T \Rightarrow |X_i(t) - x_i(t)| < a_t.$$

Ainsi avec probabilité 1, pour t assez grand, on a:

$$\left| \frac{X_i(t)}{t} - c_i \right| \leq \frac{a_t}{t} + \frac{|\delta_i(t)|}{t}.$$

D'après l'expression de a_t , le premier terme est en $O(\sqrt{\ln(t)/t})$, et tend donc vers 0 en $t \rightarrow \infty$. Le second terme est, d'après le lemme 15.1 en $O(t^{\epsilon-1})$ pour tout $\epsilon > 0$, et tend lui aussi vers 0. Le résultat du théorème en découle. \square

15.2 Inégalité d'Azuma-Hoeffding

Définition 15.1. *Etant donnée une filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$, i.e. une suite de tribus ordonnée pour l'inclusion (i.e. $\forall t \geq 0, \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t+1}$), une suite de variables aléatoires $\{M_t\}_{t \geq 0}$ est une martingale pour $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ si et seulement si pour tout $t \geq 0$, i) M_t est \mathcal{F}_t -mesurable, et ii) $\mathbb{E}(M_{t+1} | \mathcal{F}_t) = M_t$.*

L'inégalité d'Azuma-Hoeffding est le théorème suivant:

Théorème 15.2. *Soient une filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$, et une martingale associée $\{M_t\}_{t \geq 0}$. On suppose que pour tout $s = 1, \dots, t$ il existe des constantes c_s telles qu'on a presque sûrement la propriété d'incrémentés bornés:*

$$|M_s - M_{s-1}| \leq c_s. \quad (15.5)$$

Alors, pour tout $a > 0$, on a l'inégalité

$$\mathbb{P}(M_t - M_0 \geq a) \leq \exp\left(-\frac{a^2}{2 \sum_{s=1}^t c_s^2}\right). \quad (15.6)$$

Preuve. On écrit

$$M_t - M_{t-1} = Zc_t + (1 - Z)(-c_t),$$

où la variable aléatoire $Z = [M_t - M_{t-1} + c_t]/(2c_t)$ appartient à $[0, 1]$ d'après l'hypothèse d'accroissements bornés, et vérifie $\mathbb{E}(Z | \mathcal{F}_{t-1}) = 1/2$ d'après l'hypothèse de martingale. Soit $\theta > 0$. La convexité de la fonction $x \rightarrow e^{\theta x}$ entraîne l'inégalité

$$e^{\theta(M_t - M_{t-1})} \leq Z e^{\theta c_t} + (1 - Z) e^{-\theta c_t}.$$

Il vient alors:

$$\mathbb{E}\left[e^{\theta(M_t - M_{t-1})} | \mathcal{F}_{t-1}\right] \leq \frac{e^{\theta c_t} + e^{-\theta c_t}}{2}.$$

En développant les exponentielles dans le membre de droite de cette dernière expression, on voit que celui s'écrit

$$\frac{1}{2} \sum_{p \geq 0} \frac{2(\theta c_t)^{2p}}{(2p)!} \leq \sum_{p \geq 0} \frac{(\theta^2 c_t^2 / 2)^p}{p!} = e^{\theta^2 c_t^2 / 2}.$$

On obtient alors par conditionnements successifs

$$\begin{aligned}\mathbb{E}e^{\theta(M_t - M_0)} &= \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left\{ e^{\theta(M_t - M_{t-1} + M_{t-1} - M_0)} \middle| \mathcal{F}_{t-1} \right\} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[e^{\theta(M_{t-1} - M_0)} \mathbb{E} \left\{ e^{\theta(M_t - M_{t-1})} \middle| \mathcal{F}_{t-1} \right\} \right] \\ &\leq e^{\theta^2 c_t^2 / 2} \mathbb{E} \left[e^{\theta(M_{t-1} - M_0)} \right] \\ &\leq e^{\theta^2 / 2 \sum_{s=1}^t c_s^2}.\end{aligned}$$

L'inégalité de Markov donne alors pour $a > 0$:

$$\mathbb{P}(M_t - M_0 \geq a) \leq \mathbb{E}e^{\theta(M_t - M_0)} e^{-\theta a} \leq e^{-[\theta a - \theta^2 / 2 \sum_{s=1}^t c_s^2]}.$$

Pour la valeur de $\theta > 0$ qui minimise cette borne, soit $\theta = a / (\sum_{s=1}^t c_s^2)$, on obtient alors la majoration annoncée, en $e^{-a^2 / (2 \sum_{s=1}^t c_s^2)}$. \square

Corollaire 15.1. *Sous les mêmes hypothèses, on a pour tout $a > 0$:*

$$\mathbb{P}(|M_t - M_0| \geq a) \leq 2e^{-a^2 / (2 \sum_{s=1}^t c_s^2)}. \quad (15.7)$$

Preuve. Le membre de gauche de (15.7) s'écrit

$$\mathbb{P}(M_t - M_0 \geq a) + \mathbb{P}((-M_t) - (-M_0) \geq a).$$

Remarquant que $\{-M_s\}_{s \geq 0}$ est encore une martingale, à incréments bornés par les c_s , on obtient le résultat en appliquant l'inégalité d'Azuma-Hoeffding à chacun des deux termes. \square

Corollaire 15.2. *Soient $t \geq 1$ et des ensembles mesurables $\Omega_1, \dots, \Omega_t$ et soit f une fonction de $\Omega := \Omega_1 \times \dots \times \Omega_t$ dans \mathbb{R} . On suppose l'existence de constantes $c_s, s = 1, \dots, t$ telles que pour tout $x_1^t \in \Omega$, tout $s \in [t]$ et tout $y_s \in \Omega_s$, on ait*

$$|f(x_1^t) - f(x_1^{s-1} y_s x_{s+1}^t)| \leq c_t.$$

Alors étant données des variables aléatoires indépendantes X_s à valeurs dans $\Omega_s, s \in [t]$, la variable aléatoire $Y := f(X_1^t)$ vérifie

$$\forall a > 0, \mathbb{P}(Y - \mathbb{E}Y \geq a) \leq e^{-\frac{a^2}{2 \sum_{s=1}^t c_s^2}}.$$

Preuve. On définit $\mathcal{F}_s = \sigma(X_1^s)$, et $M_s = \mathbb{E}[Y | \mathcal{F}_s], s = 0, \dots, t$, de sorte que \mathcal{F}_0 est la tribu triviale, et donc $M_0 = \mathbb{E}(Y)$, et \mathcal{F}_t contient toute l'information X_1^t , et donc $M_t = Y$. Par ailleurs, les propriétés élémentaires de l'espérance conditionnelle garantissent la propriété de martingale pour $\{M_s\}_{s=0, \dots, t}$. On écrit alors

$$M_s = \int_{\Omega_{s+1} \times \dots \times \Omega_t} f(X_1^s x_{s+1}^t) \prod_{i=s+1}^t \mathbb{P}(X_i \in dx_i).$$

Il vient alors pour $s \in \{0, \dots, t-1\}$:

$$|M_s - M_{s-1}| \leq \int_{\Omega_s \times \dots \times \Omega_t} |f(X_1^s x_{s+1}^t) - f(X_1^{s-1} x_s^t)| \prod_{i=s}^t \mathbb{P}(X_i \in dx_i).$$

Par hypothèse sur f , l'intégrand est majoré par c_s , et donc son espérance est elle aussi majorée par c_s . La borne d'Azuma-Hoeffding s'applique donc, donnant le résultat. \square

15.3 Accroissements bornés et couplage

Pour prouver le lemme 15.2, il nous suffit de montrer que la différence $X_i(t) - x_i(t)$ s'écrit $M_t - M_0$ pour une martingale $\{M_s\}_{s=0,\dots,t}$ dont les accroissements sont bornés par 2: en effet le résultat du lemme est alors une simple application de la borne d'Azuma-Hoeffding. Le but de cette section est d'établir le

Lemme 15.3. *Soient $i, t \geq 1$ fixés. Pour tout $s = 0, \dots, t$, on pose $M_s := \mathbb{E}(X_i(t) | \mathcal{F}_s)$, où $X_i(t)$ est le nombre de sommets de degré i dans le graphe de Barabási-Albert G_t , et $\mathcal{F}_s = \sigma(V_1^s)$ représente l'information dans la construction séquentielle jusqu'à l'étape s du graphe en question.*

Alors $X_i(t) - \mathbb{E}(X_i(t)) = M_t - M_0$, et $\{M_s\}$ est une martingale à incréments majorés par 2.

La définition de M_s est semblable à celle dans la preuve du corollaire 15.2. On ne peut cependant pas appliquer ce dernier: ici les variables V_s sont dépendantes. Afin de prouver le lemme, nous allons utiliser la construction de couplage suivante.

Preuve. Soit $s \in [t]$, et soit $v_1^s \in \mathcal{V}_0 \times \dots \times \mathcal{V}_{s-1}$. Soit $V_s' \in \mathcal{V}_{s-1}$, distribué selon $\pi_s(\cdot | v_1^{s-1})$. On construit alors itérativement (V_u, V_u') pour $u = s+1, \dots, t$ en posant, pour tous $v, v' \in \mathcal{V}_{u-1}$:

$$\begin{aligned} v \notin \{v_s, V_s'\} &\Rightarrow \mathbb{P}(V_u = V_u' = v | V_{s+1}^{u-1}, V_s'^{u-1}) = \pi_u(v | v_1^s V_{s+1}^{u-1}), \\ (v, v') \in \{v_s, V_s'\} &\Rightarrow \mathbb{P}(V_u = v, V_u' = v' | V_{s+1}^{u-1}, V_s'^{u-1}) = \frac{\pi_u(v | v_1^s V_{s+1}^{u-1}) \pi_u(v' | v_1^{s-1} V_s'^{u-1})}{\pi_u(v_s | v_1^s V_{s+1}^{u-1}) + \pi_u(V_s' | v_1^s V_{s+1}^{u-1})}. \end{aligned} \quad (15.8)$$

Notons G_u et G_u' les graphes construits correspondants respectivement aux points d'ancrage V_u , V_u' . On a alors les propriétés suivantes, par récurrence sur $u = s, \dots, t$. Les degrés $D_{u-1}(v)$ et $D_{u-1}'(v)$ coïncident pour $v \notin \{v_s, V_s'\}$. Cela implique que

$$v \in \mathcal{V}_{u-1} \setminus \{v_s, V_s'\} \Rightarrow \mathbb{P}(V_u = V_u' = v | V_{s+1}^{u-1}, V_s'^{u-1}) = \pi_u(v | v_1^s V_{s+1}^{u-1}) = \pi_u(v | v_1^{s-1} V_s'^{u-1}). \quad (15.9)$$

Cela implique aussi, d'après l'identité $\sum_{v \in \mathcal{V}_{u-1}} D_{u-1}(v) = \sum_{v \in \mathcal{V}_{u-1}} D_{u-1}'(v) = 2e_{u-1}$:

$$D_{u-1}(v_s) + D_{u-1}(V_s') = D_{u-1}'(v_s) + D_{u-1}'(V_s').$$

On en déduit:

$$\pi_u(v_s | v_1^s V_{s+1}^{u-1}) + \pi_u(V_s' | v_1^s V_{s+1}^{u-1}) = \pi_u(v_s | v_1^{s-1} V_s'^{u-1}) + \pi_u(V_s' | v_1^{s-1} V_s'^{u-1}). \quad (15.10)$$

Les propriétés (15.9), (15.10) garantissent que l'équation (15.8) définit bien une loi de probabilité pour (V_u, V_u') sur $\mathcal{V}_{u-1} \times \mathcal{V}_{u-1}$, et que par ailleurs pour tout $v \in \mathcal{V}_{u-1}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(V_u = v | V_{s+1}^{u-1}, V_s'^{u-1}) &= \pi_u(v | v_1^s V_{s+1}^{u-1}), \\ \mathbb{P}(V_u' = v | V_{s+1}^{u-1}, V_s'^{u-1}) &= \pi_u(v | v_1^{s-1} V_s'^{u-1}). \end{aligned}$$

Cela entraîne, en prenant des espérances conditionnelles, que la loi de V_u conditionnellement à V_{s+1}^{u-1} est donnée par $\pi_u(v | v_1^s V_{s+1}^{u-1})$, et la loi de V_u' conditionnellement à $V_s'^{u-1}$ est donnée par $\pi_u(v | v_1^{s-1} V_s'^{u-1})$. En d'autres termes, la séquence $v_1^s V_{s+1}^u$ a la loi du processus de construction de Barabási-Albert conditionnellement à $V_1^s = v_1^s$, et la séquence $v_1^{s-1} V_s'^u$ a la loi du processus de construction de Barabási-Albert conditionnellement à $V_1^{s-1} = v_1^{s-1}$.

On rappelle que la fonction f est définie telle que le nombre $X_i(t)$ de sommets de degré i dans G_t vaut $f(V_1^t)$. Les propriétés précédentes impliquent alors que, conditionnellement à $V_1^s = v_1^s$, on a

$$M_s = \mathbb{E}f(v_1^s V_{s+1}^t), \quad M_{s-1} = \mathbb{E}f(v_1^{s-1} V_{s-1}'^t).$$

Or, d'après la construction couplée des deux suites (V_u, V'_u) , les degrés des sommets $v \in \mathcal{V}_t$ dans G_t coïncident avec ceux dans G'_t pour tout $u \notin \{v_s, V'_s\}$. Il en ressort que avec probabilité 1,

$$|f(v_1^s V_{s+1}^t) - f(v_1^{s-1} V_{s-1}^t)| \leq 2.$$

Par conséquent,

$$|M_s - M_{s-1}| = |\mathbb{E}[f(v_1^s V_{s+1}^t) - f(v_1^{s-1} V_{s-1}^t)]| \leq 2,$$

comme annoncé. □

Chapitre 16

Détection de communautés par méthodes spectrales

Le “clustering” est un problème générique d’apprentissage non supervisé aux applications nombreuses. Il consiste à partitionner un ensemble d’objets en groupes, chaque objet au sein d’un groupe ayant idéalement des propriétés similaires. La détection de communautés consiste à réaliser un tel partitionnement, lorsque les données de départ sont des observations des interactions entre les objets. On peut commodément représenter de telles observations sous la forme d’un graphe: les sommets sont les objets, et une arête (i, j) représente une interaction observée entre deux objets i, j . La détection de communautés revient alors à partitionner les sommets d’un graphe en groupes aux propriétés similaires. Dans la version la plus simple du problème, la donnée consiste en un tel graphe non orienté. Dans de nombreuses situations, on dispose aussi d’informations sur les types d’interaction entre objets, auquel cas la donnée peut être représentée par un graphe dont les arêtes sont munies d’un label qui représente le type d’interaction observé.

Voici quelques scénarios où la détection de communautés peut s’appliquer. Les usagers d’un réseau social en ligne sont naturellement connectés par des relations d’“amitié”. Dans ce contexte, un partitionnement des usagers sur la base de ce graphe d’amitié peut révéler des groupes d’individus dont les intérêts sont proches. On peut alors utiliser ce partitionnement pour recommander à un usager des nouveaux contacts possibles parmi sa communauté ainsi détectée. Un autre exemple consiste en un graphe bipartite entre clients et articles d’une boutique en ligne, un arc indiquant qu’un client a acheté un article. La détection de communautés, fournissant ici des groupes de clients et des groupes d’articles est alors utile pour la recommandation. On pourra recommander à un client des articles dans le même groupe que d’autres articles qu’il a achetés, ou des articles achetés par des clients dans le groupe auquel appartient ce client.

Dans un contexte très différent, les biologistes disposent de données en biologie cellulaire sous la forme de listes de réactions chimiques, et des principales protéines impliquées dans ces réactions. Ces données étant trop massives pour un traitement manuel, la détection de communautés sur le graphe bipartite (réaction, protéine) peut révéler des groupes de protéines aux fonctions interchangeables. La recherche de tels groupes fonctionnels permet de progresser dans la compréhension de la biologie cellulaire.

Ce chapitre introduit des méthodes spectrales de détection de communautés, une analyse de leur performance sur des graphes aléatoires particuliers, dits modèles stochastiques de blocs (“Stochastic Block Model”, ou SBM). Il couvre aussi les outils mathématiques nécessaires, à savoir le contrôle des perturbations de vecteurs et valeurs propres de matrices symétriques, et le contrôle du rayon spectral de matrices aléatoires.

16.1 Méthodes spectrales pour la détection de communautés

Etant donné un graphe non orienté $G = (V, E)$ sur l'ensemble de sommets $V = [n]$, on note A sa matrice d'adjacence. Celle-ci étant symétrique réelle, d'après le théorème spectral ses valeurs propres sont toutes réelles, et elle admet une base orthonormée de vecteurs propres réels. Soient λ_i , $i \in [n]$ ses valeurs propres triées selon leur module: $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \dots$, et $\{x_i\}_{i \in [n]}$ une base orthonormée de vecteurs propres associés¹. La matrice A s'écrit encore

$$A = \sum_{i \in [n]} \lambda_i x_i x_i^T.$$

On peut alors obtenir une représentation de dimension réduite $k < n$ des données d'origine, soit la matrice A , en associant à chaque indice $i \in [n]$ un vecteur z_i de \mathbb{R}^k donné par $z_i = \sqrt{n}(x_1(i), \dots, x_k(i))^T$. Ce plongement des données pour chaque i , initialement de taille n , en dimension $k < n$, est à la base de l'analyse en composantes principales, introduite par le célèbre statisticien Karl Pearson en 1901 [13].

Munis des vecteurs $z_i \in \mathbb{R}^k$, on peut donner à titre d'exemple l'algorithme dit des K -moyennes comme méthode populaire pour partitionner $[n]$ en K groupes (K non nécessairement égal à k). Cet algorithme est initialisé par K vecteurs $y_1, \dots, y_K \in \mathbb{R}^k$ et procède itérativement, créant à chaque étape les groupes $C_j = \{i \in [n] : \|z_i - y_j\| \in \operatorname{argmin}(\|z_i - y_\ell\|, \ell \in [K])\}$ pour tout $j \in [K]$, puis la mise à jour

$$y_j = \frac{1}{|C_j|} \sum_{i \in C_j} z_i.$$

Les propriétés de convergence de cet algorithme ne sont pas complètement élucidées, et sont sensibles aux choix initiaux $y_j, j \in [K]$.

Notre objectif sera principalement de caractériser le comportement des valeurs propres λ_i , et des représentants z_i issus de la méthode spectrale lorsque le graphe de départ provient du modèle stochastique de blocs. Nous verrons que dans ce contexte un choix naturel de la dimension k de plongement s'impose, et que les représentants z_i résultants se concentrent fortement selon les "blocs" sous-jacents dans le modèle. Il s'ensuivra que sous ces conditions, le problème de partitionnement des z_i dans \mathbb{R}^k devient particulièrement simple.

16.2 Le modèle stochastique de blocs

Ce modèle de graphe aléatoire est spécifié par les paramètres suivants: le nombre de sommets n , le nombre K fixé de blocs, des poids $\alpha_\ell \in [0, 1], \ell \in [K]$ sommant à 1, i.e. $\sum_{\ell \in [K]} \alpha_\ell = 1$, le bloc ℓ contenant $\alpha_\ell n$ sommets, une matrice symétrique $B \in \mathbb{R}_+^{K \times K}$ et un paramètre $d > 0$ pouvant varier avec n .

Pour tout sommet $i \in [n]$, on note $\sigma(i) \in [K]$ le bloc auquel il appartient. Le graphe aléatoire est alors défini comme suit: pour chaque paire de sommets (i, j) , l'arête (i, j) est présente avec probabilité $B_{\sigma(i), \sigma(j)} \frac{d}{n}$, et ce indépendamment des autres arêtes.

On voit ainsi qu'il s'agit d'une généralisation du modèle d'Erdős-Rényi au cas de plusieurs types de sommets, les types $\sigma(i)$ et $\sigma(j)$ venant moduler la probabilité de présence de l'arête (i, j) . Le paramètre d fournit l'ordre de grandeur du degré moyen des sommets dans le graphe,

¹Des algorithmes efficaces pour le calcul approché de ces éléments propres sont implémentés dans tout bon environnement de calcul numérique.

puisqu'un sommet de type $\ell \in [K]$ aura comme nombre moyen de voisins:

$$\sum_{j \in [L]} \alpha_j B_{j,\ell} d - (d/n) B_{\ell,\ell},$$

qui est bien d'ordre d .

Ce modèle est adapté à l'analyse de détection de communautés: en effet, on peut comparer le partitionnement des n sommets que donne une méthode particulière sur un tel graphe aléatoire au partitionnement en blocs selon les valeurs $\sigma(i)$ qui définissent le modèle.

16.3 Propriétés spectrales du modèle stochastique de blocs

Nous énonçons maintenant le résultat principal du chapitre:

Théorème 16.1. *Soit un graphe SBM sur n sommets, tel que ses K blocs sont distinguables, i.e. pour tous $k \neq \ell \in [K]$, il existe $m \in [K]$ avec $B_{km} \neq B_{\ell m}$. On suppose que le paramètre d vérifie $d \sim n^\delta$ pour un exposant $\delta \in]0, 1[$ fixe. Soit $R \leq K$ le rang de la matrice B . Alors avec forte probabilité:*

i) Le spectre de la matrice d'adjacence A contient R valeurs propres d'ordre d , et $n - R$ valeurs propres d'ordre $o(d)$.

ii) Le plongement spectral de dimension $k = R$ reflète les blocs du modèle de la manière suivante: pour tous sommets $i, j \in [n] \setminus \mathcal{B}$, où $|\mathcal{B}| = o(n)$, on a $\|z_i - z_j\| = o(1)$ si $\sigma(i) = \sigma(j)$ et $\|z_i - z_j\| = \Omega(1)$ si $\sigma(i) \neq \sigma(j)$.

Ce résultat suggère des algorithmes pour le choix de la dimension de plongement spectral k , et pour le partitionnement des sommets selon leurs représentants spectraux $z_i \in \mathbb{R}^k$, pour lesquels on a des garanties de performance.

Tout d'abord, le point i) sur la taille des valeurs propres garantit que pour un seuil T suffisamment grand, en choisissant comme dimension k du plongement spectral

$$k = \inf\{i \geq 1 : |\lambda_i| \geq T|\lambda_{i+1}|\},$$

alors avec forte probabilité on aura $k = R$, le rang de la matrice B .

Ensuite, considérons la stratégie suivante de groupement des sommets $i \in [n]$. Ayant déjà formé ℓ groupes C_1, \dots, C_ℓ , tant qu'il reste au moins $\epsilon_1 n$ sommets non groupés, i.e. tant que

$$\sum_{m=1}^{\ell} |C_m| \leq (1 - \epsilon_1)n,$$

on choisit l'un d'eux uniformément au hasard, soit $i_{\ell+1}$, et on constitue le groupe $C_{\ell+1}$ avec les sommets j non encore groupés tels que $\|z_{i_{\ell+1}} - z_j\| \leq \epsilon_2$. Alors le résultat ii) du théorème garantit que, pour $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ suffisamment petits, avec forte probabilité cette procédure crée précisément K groupes, et il existe une permutation s de $[K]$ telle que pour tout $\ell \in [K]$:

$$|C_\ell \setminus D_{s(\ell)}| + |D_{s(\ell)} \setminus C_\ell| = o(n), \quad (16.1)$$

où $D_\ell := \{i \in [n] : \sigma(i) = \ell\}$. En d'autres termes, cette procédure reconstitue les K blocs de sommets sous-jacents au modèle, sauf éventuellement pour une fraction négligeable de sommets qui peuvent être assignés à un mauvais bloc.

En effet, supposant la propriété (16.1) vérifiée à l'étape $\ell < K$ de la construction, si $\epsilon_1 < \min_{m \in [K]} \alpha_m$, la procédure ne s'arrête pas, et un choix uniforme du sommet $i_{\ell+1}$ tombe avec

probabilité $1 - o(1)$ dans l'un des D_m , $m \in [K] \setminus \{s(1), \dots, s(\ell)\}$, et n'appartient pas à l'ensemble \mathcal{B} des "mauvais sommets". Pour $\epsilon_2 > 0$ assez petit le résultat ii) garantit que l'ensemble C_ℓ vérifie

$$D_m \setminus \mathcal{B} \subset C_\ell \subset D_m \cup \mathcal{B}.$$

On peut donc poser $s(\ell+1) = m$ et la propriété annoncée (16.1) est vérifiée au rang $\ell+1$. Enfin, à la fin de la K -ème étape le nombre de sommets résiduels est en $o(n)$ et la procédure s'arrête donc.

L'algorithme qu'on vient de décrire met en oeuvre trois paramètres T^{-1} , ϵ_1 , ϵ_2 et l'argument ci-dessus n'est valable que pour des valeurs suffisamment petites de ces paramètres. Un choix adapté de leurs valeurs ne peut être fait indépendamment des paramètres du modèle stochastique de blocs dont proviennent les observations. Il est cependant possible de choisir ces paramètres en fonction uniquement du graphe observé de façon que l'algorithme décrit ait encore les propriétés annoncées avec probabilité $1 - o(1)$ (on pourra consulter [16] pour les détails).

Stratégie de preuve La preuve du théorème 16.1 procède de la manière suivante. Ayant décomposé la matrice A en $\bar{A} + W$, où $\bar{A}_{ij} = (d/n)B_{\sigma(i),\sigma(j)}$, on établit que la matrice moyenne \bar{A} satisfait les propriétés du théorème. On établit ensuite des bornes générales sur la perturbation des éléments propres d'une matrice symétrique \bar{A} lorsqu'on lui ajoute une matrice symétrique W , exprimées en fonction du rayon spectral de la matrice de perturbation W . Enfin, on établit une borne sur ce rayon spectral dans le contexte particulier du modèle stochastique de blocs.

16.4 Spectre de la matrice d'adjacence moyenne

On va établir le

Lemme 16.1. *Pour tout vecteur $t \in \mathbb{R}^K$ on définit $\phi(t) \in \mathbb{R}^n$ par $\phi(t)_i = t_{\sigma(i)}$. La matrice symétrique $\bar{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ définie par $\bar{A}_{ij} = (d/n)B_{\sigma(i),\sigma(j)}$ vérifie*

$$\bar{A}\phi(t) = d\phi(Mt), \quad t \in \mathbb{R}^K, \quad (16.2)$$

où $M = B \text{Diag}\{\alpha_j\}_{j \in [K]} \in \mathbb{R}^{K \times K}$.

Soit R le rang de la matrice symétrique $B \in \mathbb{R}^{K \times K}$, et soient $(\mu_u, t_u)_{u \in [R]}$ des paires de valeurs propres et vecteurs propres associés de M . Le spectre de \bar{A} comprend alors R valeurs propres non nulles $\lambda_u = d\mu_u$, $u \in [R]$ de vecteurs propres associés $\phi(t_u)$, et la valeur propre 0 avec multiplicité $n - R$.

Preuve. L'identité (16.2) découle immédiatement de la structure par blocs de \bar{A} et du fait que la taille du bloc $\{i \in [n] : \sigma(i) = m\}$ vaut $\alpha_m n$ pour tout $m \in [K]$. L'image de tout vecteur par \bar{A} étant constante par blocs, tout vecteur propre de \bar{A} associé à une valeur propre non nulle est constant par blocs, et s'écrit donc $\phi(t)$ pour un $t \in \mathbb{R}^K$. Le résultat annoncé en découle aisément. \square

Corollaire 16.1. *L'hypothèse de distingabilité des blocs (pour tous $k \neq \ell \in [K]$, il existe $m \in [K]$ avec $B_{km} \neq B_{\ell m}$), garantit l'existence d'un $\epsilon > 0$ fonction de B et $\{\alpha_m\}_{m \in [K]}$ tel que pour tout choix de vecteurs propres orthonormés $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_R$ de \bar{A} associés à ses valeurs propres non nulles λ_u , $u \in [R]$, les vecteurs $\bar{z}_i = \sqrt{n}(\bar{x}_1(i), \dots, \bar{x}_R(i))^T \in \mathbb{R}^R$ vérifient*

$$\forall i, j \in [n], \begin{cases} \sigma(i) = \sigma(j) \Rightarrow \|\bar{z}_i - \bar{z}_j\| = 0, \\ \sigma(i) \neq \sigma(j) \Rightarrow \|\bar{z}_i - \bar{z}_j\| > \epsilon. \end{cases} \quad (16.3)$$

Preuve. Soit $t_u \in \mathbb{R}^K$ tel que $\sqrt{n}\bar{x}_u = \phi(t_u)$. Alors, notant $\sqrt{\alpha} = \text{Diag}(\{\sqrt{\alpha_i}\}_{i \in [K]})$, les vecteurs $\{\sqrt{\alpha}t_u\}_{u \in [R]}$ sont orthonormaux d'après l'orthonormalité des \bar{x}_u . t_u étant un vecteur propre de M , $\sqrt{\alpha}t_u$ est donc un vecteur propre de la matrice symétrique $\sqrt{\alpha}B\sqrt{\alpha}$, de valeur propre associée μ_u . On a donc

$$\sqrt{\alpha}B\sqrt{\alpha} = \sum_{u \in [R]} \mu_u \sqrt{\alpha}t_u t_u^T \sqrt{\alpha},$$

soit

$$B = \sum_{u \in [R]} \mu_u t_u t_u^T. \quad (16.4)$$

Il est clair que pour deux sommets $i, j \in [n]$, si $\sigma(i) = \sigma(j)$ alors $\bar{z}_i = \bar{z}_j$. Dans le cas où $\sigma(i) = u \neq \sigma(j) = v$, comme $\bar{z}_i = (t_1(u), \dots, t_R(u))^T$ et $\bar{z}_j = (t_1(v), \dots, t_R(v))^T$, on en conclut de (16.4) que si $\bar{z}_i = \bar{z}_j$, alors B a deux lignes identiques, ce qui est exclu par l'hypothèse de distinguabilité. L'ensemble de vecteurs $\{t_u\}_{u \in [R]}$ possibles est compact, et la distance correspondante

$$\|\bar{z}_i - \bar{z}_j\| = \sqrt{\sum_{w \in [R]} (t_w(u) - t_w(v))^2}$$

pour $u \neq v$ en dépend continûment, et ne peut atteindre zéro. Elle est donc minorée par un $\epsilon > 0$. \square

16.5 Perturbations des vecteurs et valeurs propres de matrices symétriques

Nous commençons par donner un cas particulier des inégalités de Weyl, qui contrôlent la perturbation des valeurs propres. Ces contrôles sont donnés en fonction du rayon spectral d'une matrice de perturbation W , qui est défini comme:

Définition 16.1. *Le rayon spectral d'une matrice W , qu'on note $\rho(W)$, est par définition le plus grand module de toutes ses valeurs propres.*

On a alors:

Lemme 16.2. *Soient \bar{A} , W deux matrices symétriques, et $A = \bar{A} + W$. On note λ_i (respectivement, $\bar{\lambda}_i$) les valeurs propres de A (respectivement, \bar{A}) triées par ordre décroissant. Alors, pour tout $n \in [n]$ on a*

$$|\lambda_i - \bar{\lambda}_i| \leq \rho(W).$$

Preuve. Le théorème de Courant-Fisher donne la caractérisation variationnelle suivante de la i -ème valeur propre λ_i d'une matrice symétrique A comme:

$$\lambda_i = \sup_{E: \dim(E)=i} \inf_{x \in E, \|x\|=1} x^T A x,$$

où E est un sous-espace vectoriel. Soit $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ une base orthonormale de vecteurs propres de \bar{A} associés avec les valeurs propres $\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_n$. En appliquant le théorème de Courant-Fisher, pour le choix $E = \text{Vect}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_i)$, il vient

$$\begin{aligned} \lambda_i &\geq \inf_{x \in \text{Vect}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_i)} x^T (\bar{A} - W)x \\ &\geq \inf_{x \in \text{Vect}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_i)} x^T (\bar{A})x - \sup_{x \in \text{Vect}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_i)} x^T (W)x. \end{aligned}$$

Le premier terme vaut précisément $\bar{\lambda}_i$ alors que le second est minoré par $-\rho(W)$, soit $\lambda_i \geq \bar{\lambda}_i - \rho(W)$. Le même argument appliqué à $\bar{\lambda}_i$ donne $\bar{\lambda}_i \geq \lambda_i - \rho(W)$, d'où le résultat. \square

On a de plus le contrôle suivant sur la perturbation de vecteurs propres:

Lemme 16.3. *Soient \bar{A} , W deux matrices symétriques, et $A = \bar{A} + W$. Soit $\Delta := \inf_{i,j:\bar{\lambda}_i \neq \bar{\lambda}_j} |\bar{\lambda}_i - \bar{\lambda}_j|$. On suppose de plus que $\rho(W) < \Delta/2$. Alors pour tout vecteur propre normé x_i de A associé à λ_i , il existe un vecteur propre normé \bar{x}_i de \bar{A} associé à $\bar{\lambda}_i$ tel que*

$$\langle x_i, \bar{x}_i \rangle \geq \sqrt{1 - \left(\frac{\rho(W)}{\Delta - \rho(W)} \right)^2}.$$

Preuve. On décompose x_i selon la base des \bar{x}_j , soit $x_i = \sum_j \theta_j \bar{x}_j$, ce qui donne en appliquant A :

$$\lambda_i x_i = \sum_j \bar{\lambda}_j \theta_j \bar{x}_j + W x_i,$$

soit

$$W x_i = \sum_j \theta_j (\bar{\lambda}_j - \lambda_i) \bar{x}_j$$

D'après l'inégalité de Weyl, si $\bar{\lambda}_j \neq \bar{\lambda}_i$, alors:

$$|\lambda_i - \bar{\lambda}_j| \geq \Delta - \rho(W).$$

Il vient donc

$$\rho(W) \geq \|W x_i\| \geq (\Delta - \rho(W)) \sqrt{1 - \sum_{k:\bar{\lambda}_k = \bar{\lambda}_i} |\theta_k|^2},$$

ce qui donne

$$\sum_{k:\bar{\lambda}_k = \bar{\lambda}_i} |\theta_k|^2 \geq 1 - \left(\frac{\rho(W)}{\Delta - \rho(W)} \right)^2.$$

On pose alors

$$\bar{x} := \left(\sum_{k:\bar{\lambda}_k = \bar{\lambda}_i} |\theta_k|^2 \right)^{-1/2} \sum_{k:\bar{\lambda}_k = \bar{\lambda}_i} \theta_k \bar{x}_k.$$

Il s'agit clairement d'un vecteur propre normé de \bar{A} associé à la valeur propre $\bar{\lambda}_i$. Par ailleurs, on a:

$$\langle x_i, \bar{x} \rangle = \sqrt{\sum_{k:\bar{\lambda}_k = \bar{\lambda}_i} |\theta_k|^2}.$$

La minoration annoncée en découle. \square

Corollaire 16.2. *Soit une matrice symétrique \bar{A} de rang R fixe, de valeurs propres non nulles $d\mu_i$, $i \in [R]$ où les μ_i sont fixes, et où $d \gg 1$. Soit une matrice symétrique de perturbation W de rayon spectral $\rho = o(d)$. Alors le spectre de la matrice $A = \bar{A} + W$ consiste en R valeurs propres $\{d\mu_i(1 + O(\rho/d))\}_{i \in [R]}$, et $n - R$ valeurs propres en $O(\rho) = o(d)$. A tout système (x_1, \dots, x_R) de R vecteurs propres orthonormés de A associés à ses R valeurs propres d'ordre d on peut associer un système $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_R)$ de R vecteurs propres orthonormés de \bar{A} associés aux valeurs propres $d\mu_i$, $i \in [R]$ de \bar{A} et tels que pour tout $i \in [R]$:*

$$\langle x_i, \bar{x}_i \rangle = 1 - O((\rho/d)^2) = 1 - o(1).$$

Preuve. Les deux lemmes précédents nous fournissent presque tout, en particulier le spectre de \bar{A} admet une séparation Δ d'ordre d . Le lemme précédent donne donc l'existence, pour tout système orthonormé (x_1, \dots, x_R) de vecteurs propres pour A , d'un système normé (mais pas nécessairement orthogonal) $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_R)$ de vecteurs propres pour \bar{A} tel que

$$\forall i \in [R], \langle x_i, \bar{x}_i \rangle = 1 - O((\rho/d)^2) = 1 - o(1).$$

Il nous reste donc à vérifier qu'on peut choisir les vecteurs propres $\{\bar{x}_i\}_{i \in [R]}$ orthonormés. Supposant que les $r \leq R$ premières valeurs propres $\{\mu_i\}_{i \in [r]}$ coïncident, on procède comme suit. On applique le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r)$ pour construire un système orthonormé de vecteurs propres $(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_r)$ associés à la même valeur propre $d\mu_1$ de \bar{A} . Montrons par récurrence que le résultat est bien tel que

$$\langle x_i, \tilde{x}_i \rangle = 1 - O((\rho/d)^2) = 1 - o(1).$$

C'est immédiat pour $i = 1$ puisque $\tilde{x}_1 = \bar{x}_1$. Par ailleurs on a

$$\tilde{x}_i = \frac{1}{t} \left[\bar{x}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle \bar{x}_i, \tilde{x}_j \rangle \tilde{x}_j \right],$$

où $t = \|\bar{x}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle \bar{x}_i, \tilde{x}_j \rangle \tilde{x}_j\|$. En écrivant pour $j < i$:

$$\begin{aligned} \langle \bar{x}_i, \tilde{x}_j \rangle &= \langle \bar{x}_i, \tilde{x}_j - \bar{x}_j \rangle + \langle \bar{x}_i, \bar{x}_j - x_j \rangle \\ &\quad + \langle \bar{x}_i - x_i, x_j \rangle + \langle x_i, x_j \rangle, \end{aligned}$$

le premier terme du membre de droite est d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz en $O(\rho/d) = o(1)$ par l'hypothèse de récurrence, le second et le troisième aussi d'après $\langle x_k, \bar{x}_k \rangle = 1 - O((\rho/d)^2)$, et finalement le dernier est nul car les x_k sont orthonormés. On a donc $\langle \bar{x}_i, \tilde{x}_j \rangle = O(\rho/d)$. Cela entraîne que $t = 1 - O((\rho/d)^2)$. En écrivant

$$\begin{aligned} \langle x_i, \tilde{x}_i \rangle &= t[\langle x_i, \bar{x}_i \rangle - \sum_{j=1}^{i-1} \langle \bar{x}_i, \tilde{x}_j \rangle \langle x_i, \tilde{x}_j \rangle] \\ &= t[\langle x_i, \bar{x}_i \rangle - \sum_{j=1}^{i-1} \langle \bar{x}_i, \tilde{x}_j \rangle \langle \bar{x}_i, \tilde{x}_j \rangle \dots \\ &\quad - \sum_{j=1}^{i-1} \langle \bar{x}_i, \tilde{x}_j \rangle \langle x_i - \bar{x}_i, \tilde{x}_j \rangle], \end{aligned}$$

on utilise $t = 1 - O((\rho/d)^2)$, $\langle x_i, \bar{x}_i \rangle = 1 - O((\rho/d)^2)$ et le fait que tous les autres produits scalaires intervenant dans cette dernière expression sont en $O(\rho/d)$ pour conclure que $\langle x_i, \tilde{x}_i \rangle = 1 - O((\rho/d)^2)$.

Le résultat du corollaire s'obtient alors en appliquant la même construction de Gram-Schmidt pour chaque espace propre correspondant aux valeurs propres distinctes $d\mu_i$ de \bar{A} . \square

16.6 Contrôle du rayon spectral de matrices aléatoires

Nous fournissons maintenant des bornes sur le rayon spectral de matrices aléatoires. Le premier résultat ci-dessous suffira pour établir le théorème 16.1:

Proposition 16.1. *Soit W une matrice symétrique de taille $n \times n$ dont les entrées $\{W_{ij}\}_{1 \leq i \leq j \leq n}$ sont aléatoires, indépendantes, vérifient $|W_{ij}| \leq 1$, $\mathbb{E}(W_{ij}) = 0$ et $\mathbb{E}W_{ij}^2 \leq d/n$ pour un paramètre d dépendant éventuellement de n . Soit $\epsilon > 0$ fixé. Alors, avec forte probabilité lorsque $n \rightarrow \infty$, on a*

$$\rho(W) \leq \sqrt{dn}^\epsilon.$$

Preuve. Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé. On a

$$\rho(W)^{2k} \leq \sum_{i \in [n]} \lambda_i^{2k} = \text{Trace}(W^{2k}),$$

où les λ_i sont les valeurs propres de W . On utilise alors la représentation suivante pour la trace de W^{2k} :

$$\text{Trace}(W^{2k}) = \sum_{i_0^{2k} \in [n]^{2k+1} : i_0 = i_{2k}} \prod_{j=1}^{2k} W_{i_{j-1}i_j}$$

Comme les W_{ij} sont de moyenne nulle et indépendants, les seuls termes non nuls dans l'espérance de $\text{Trace}(W^{2k})$ correspondent aux choix $i_0^{2k} \in [n]^{2k+1}$ tels que chaque arc (u, v) parcouru par la suite (i_{j-1}, i_j) , $j \in [2k]$ apparaît au moins deux fois dans cette suite. Pour une telle suite, si on note e le nombre d'arcs distincts qu'elle parcourt, ce nombre est nécessairement au plus k . Notant v le nombre de sommets découverts par cette suite, on a $v \leq e + 1$, puisque en plus du sommet i_0 on découvre au plus e sommets supplémentaires, un par arc utilisé.

Soit $C(e, v)$ le nombre de suites i_0^{2k} qui contiennent e arcs distincts visités chacun au moins deux fois, v sommets distincts, et tels que ces sommets sont précisément $1, \dots, v$. Le nombre de suites aux mêmes propriétés sauf la dernière contrainte, les v sommets choisis pouvant être n'importe lesquels dans $[n]$, est au plus $n^v C(e, v)$. Puisque $|W_{ij}| \leq 1$, on a pour tout $\ell \geq 0$ la borne

$$\mathbb{E}(|W_{ij}|^{\ell+2}) \leq \mathbb{E}|W_{ij}|^2 \leq \frac{d}{n}.$$

Il vient donc

$$\mathbb{E}\text{Trace}(W^{2k}) \leq \sum_{e=1}^k \sum_{v=1}^{e+1} C(e, v) n^v \left(\frac{d}{n}\right)^e,$$

d'où

$$\mathbb{E}\text{Trace}(W^{2k}) \leq \sum_{e=1}^k \sum_{v=1}^{e+1} C(e, v) n d^e = O(n d^k).$$

On a alors d'après l'inégalité de Markov:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\rho(W) \geq \sqrt{d} n^\epsilon) &\leq \mathbb{E}(\rho(W)^{2k}) d^{-k} n^{-2k\epsilon} \\ &\leq \mathbb{E}(\mathbb{E}\text{Trace}(W^{2k})) d^{-k} n^{-2k\epsilon} = O(n^{1-2k\epsilon}). \end{aligned}$$

En choisissant $k > 1/(2\epsilon)$, on conclut que $\mathbb{P}(\rho(W) \geq \sqrt{d} n^\epsilon) = o(1)$, comme annoncé. \square

Nous citons maintenant sans preuve un résultat plus fin, qui peut être utilisé à la place de la proposition 16.1 afin d'obtenir une version plus forte du théorème 16.1. Celle-ci est une conséquence des résultats de Feige et Ofek [6]. On pourra consulter [16] pour le détail des arguments.

Proposition 16.2. *Soit une matrice symétrique A , dont les entrées $(A_{ij})_{1 \leq i < j \leq n}$ sont indépendantes, appartiennent à $[0, 1]$ et telles que $A_{ii} = 0$, $\mathbb{E}(A_{ij}) \leq d/n$, où $d \leq n^{1/5}$. Alors pour une constante universelle $\kappa > 0$ on a avec forte probabilité lorsque $n \rightarrow \infty$:*

$$\rho(A - \mathbb{E}(A)) \leq \kappa \sqrt{\max(\log(n), d)}.$$

16.7 Preuve du théorème 16.1

La matrice d'adjacence A du modèle stochastique de blocs s'écrit

$$A = \bar{A} + W_1 + W_2,$$

où la matrice \bar{A} est définie par ${}_{bar}A_{ij} = (d/n)B_{\sigma(i)\sigma(j)}$, la matrice W_1 est définie par $W_1 = A - \mathbb{E}(A)$, et finalement $W_2 = \text{Diag}(\{-(d/n)B_{\sigma(i)\sigma(i)}\})$.

La proposition 16.1 appliquée à W_1 donne que pour tout $\epsilon > 0$ fixe, avec forte probabilité, $\rho(W_1) \leq n^\epsilon \sqrt{d}$. Par ailleurs on a clairement $\rho(W_2) = O(d/n)$. Pour deux matrices symétriques W_1, W_2 , le rayon spectral de $W = W_1 + W_2$ est majoré par $\rho(W_1) + \rho(W_2)$. On a donc $A = \bar{A} + W$, avec $\rho(W) \leq O(d/n) + n^\epsilon \sqrt{d}$.

Sous l'hypothèse $d \sim n^\delta$ pour un exposant δ fixe, $\delta \in]0, 1[$, en choisissant $\epsilon < \delta/2$, il vient $\rho(W) = o(d)$. Le corollaire 16.2 s'applique et donne la conclusion du théorème sur les valeurs propres de A . Il donne aussi qu'à tout système orthonormal (x_1, \dots, x_R) de vecteurs propres de A associés aux R valeurs propres d'ordre d , on peut associer un système orthonormé de vecteurs propres $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_R)$ de \bar{A} associés aux R valeurs propres non nulles de \bar{A} , vérifiant

$$\langle x_i, \bar{x}_i \rangle = 1 - O((\rho/d)^2),$$

soit encore $\|x_i - \bar{x}_i\|^2 = O((\rho/d)^2) = o(1)$. Pour $i \in [n]$, le vecteur R -dimensionnel z_i est donné par $\sqrt{n}(x_1(i), \dots, x_R(i))^T$, et de même $\bar{z}_i(i) = \sqrt{n}(\bar{x}_1(i), \dots, \bar{x}_R(i))^T$. On a donc

$$\sum_{i \in [n]} \|z_i - \bar{z}_i\|^2 = n \sum_{j \in [R]} \|x_j - \bar{x}_j\|^2 = n\theta(n),$$

où $\theta(n) = o(1)$. L'inégalité de Bienaymé-Tchebitchev donne alors:

$$|\{i \in [n] : \|z_i - \bar{z}_i\| \geq \theta(n)^{1/3}\}| \leq n\theta(n)^{1/3} = o(n).$$

Le corollaire 16.1 précise que les \bar{z}_i sont les mêmes au sein d'un bloc, et à distance minorée par un ϵ fixe entre deux blocs distincts. La conclusion du théorème en découle.

Remarque 16.1. *La conclusion du théorème 16.1 reste vraie si on suppose $d \leq n^{1/5}$, et $d \gg \sqrt{\log(n)}$. En effet, En utilisant la proposition 16.2 plutôt que la proposition 16.1 dans la preuve, on voit que sous ces hypothèses le rayon spectral de W est en $O(\sqrt{\max(\log(n), d)})$ soit en $O(\sqrt{d}) = o(d)$. Le reste de la preuve s'applique encore sans autre modification.*

Chapitre 17

Annexe: preuves

17.1 Mesures stationnaires et ergodicité des chaînes de Markov

Théorème 2.2 Une chaîne de Markov ayant un état x récurrent admet une mesure (pas nécessairement de masse totale finie) invariante ν , donnée par la formule

$$\nu_y := \mathbb{E}_x \sum_{n=1}^{T_x} \mathbf{1}_{X_n=y}.$$

Si la chaîne est irréductible, cette mesure invariante est unique à une constante multiplicative près parmi les mesures non négatives invariantes, et met une masse strictement positive sur chaque état $y \in E$.

Preuve. Ecrivons pour un $z \in E$ fixé, d'après le théorème de Fubini:

$$\sum_{y \in E} \nu_y p_{yz} = \sum_{n \geq 1, y \in E} \mathbb{E}_x \mathbf{1}_{n \leq T_x} \mathbf{1}_{X_n=y} p_{yz}.$$

La propriété de Markov peut être utilisée, puisque $\{T_x \geq n\}$ est \mathcal{F}_n -mesurable, pour obtenir

$$\mathbb{E}_x \mathbf{1}_{n \leq T_x} \mathbf{1}_{X_n=y} p_{yz} = \mathbb{E}_x \mathbf{1}_{n \leq T_x} \mathbf{1}_{X_n=y} \mathbf{1}_{X_{n+1}=z},$$

ce qui donne

$$\sum_{y \in E} \nu_y p_{yz} = \sum_{n \geq 1} \mathbb{E}_x \mathbf{1}_{n \leq T_x} \mathbf{1}_{X_{n+1}=z} = \mathbb{E}_x \sum_{n=2}^{T_x+1} \mathbf{1}_{X_n=z}.$$

La propriété de Markov forte implique que $\mathbb{E}_x \mathbf{1}_{X_{T_x+1}=z} = \mathbb{E}_x \mathbf{1}_{X_1=z}$, et donc

$$\sum_{y \in E} \nu_y p_{yz} = \nu_z.$$

Montrons maintenant que pour tout $z \in E$, ν_z est fini. Soit donc z tel que $\nu_z > 0$, et donc tel qu'il existe n pour lequel $p_{xz}^n > 0$. Puisque x est récurrent, il existe nécessairement $m > 0$ tel que $p_{zx}^m > 0$ car sinon on aurait $\mathbb{P}_x(T_x = +\infty) \geq p_{xz}^n > 0$, une contradiction. On obtient alors, en itérant m fois la relation de stationnarité:

$$\nu_x = 1 = \sum_{y \in E} \nu_y p_{yx} = \cdots = \sum_{y \in E} \nu_y p_{yx}^m \geq \nu_z p_{zx}^m.$$

Nécessairement, $\nu_z < +\infty$. On a donc bien une mesure, et celle-ci est invariante.

On suppose maintenant la chaîne irréductible et récurrente. La mesure invariante qu'on vient de construire est dénotée $\nu^{(x)}$. Soit une autre mesure invariante non négative μ . Soit $x \in E$ tel que $\mu_x > 0$ (si la mesure est nulle on n'a rien à montrer). On peut renormaliser μ pour avoir $\mu_x = 1$. Pour tout $y \in E$, on a

$$\mu_y = \sum_{z \in E} \mu_z p_{zy} = \delta_y^{(x)} + \sum_{z \in E} \mu_z \tilde{p}_{zy},$$

où on a introduit la mesure $\delta^{(x)}$ valant 1 en x et zéro ailleurs, et la matrice $\tilde{p}_{zy} := p_{zy} \mathbf{1}_{y \neq x}$, correspondant à la matrice de transitions dans laquelle on met à zéro la colonne x . La dernière équation implique alors:

$$\mu \geq \delta^{(x)} + \mu \tilde{P}.$$

En itérant, ceci donne pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mu \geq \sum_{k=0}^n \delta^{(x)} \tilde{P}^k.$$

Le membre de droite de cette expression s'écrit sous forme probabiliste, pour tout $y \in E$:

$$\mu_y \geq \sum_{k=0}^n \mathbb{E}_x \mathbf{1}_{X_n=y} \mathbf{1}_{T_x > n}.$$

En faisant tendre n vers l'infini, on obtient:

$$\mu_y \geq \nu_y^{(x)}.$$

Montrons maintenant qu'il y a égalité entre les deux mesures μ et $\nu^{(x)}$. Puisqu'elles sont toutes deux invariantes pour P , notant $\pi := \mu - \nu^{(x)}$, π est non-négative d'après ce qui précède, et est aussi invariante. Par ailleurs, $\pi_x = 0$ par construction. Or par invariance, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\pi_x \geq \pi_y p_{yx}^n,$$

et par irréductibilité, il existe pour tout y un n tel que $p_{yx}^n > 0$. Il en résulte que $\pi_y = 0$, donc $\pi \equiv 0$, i.e. les mesures μ et $\nu^{(x)}$ sont bien égales. Le même argument indique que la mesure invariante π ne peut mettre une masse nulle sur aucun état y car sinon elle serait identiquement nulle. \square

Renouvellement à temps discret Etant donnée une loi de probabilité $\{f_k\}_{k \geq 1}$ sur $\{1, \dots, n, \dots\}$, et une suite de variables aléatoires i.i.d. T_1, T_2, \dots distribuées selon cette loi, la séquence de renouvellement correspondante est définie par la suite de variables aléatoires $S_0 = 0, S_1 = T_1, \dots, S_k = S_{k-1} + T_k, \dots$

On associe à ce processus de renouvellement la mesure de renouvellement $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sur \mathbb{N} correspondante, définie par

$$u_n = \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(S_k = n).$$

On vérifie aisément, en conditionnant par la valeur m que prend T_1 , que la mesure de renouvellement $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie l'équation de renouvellement:

$$u_0 = 1, \quad u_k = \sum_{m=1}^{k-1} f_m u_{k-m}, \quad k \geq 1. \quad (17.1)$$

Ces relations caractérisent uniquement, par récurrence, la mesure de renouvellement associée à la distribution $\{f_k\}$. Définissant la période d'une mesure $\{u_k\}$ sur \mathbb{N} comme le PGCD des entiers n tels que $u_n > 0$, on a alors le

Lemme 17.1. *La mesure de renouvellement $\{u_n\}$ admet la même période d que la loi de probabilité $\{f_n\}_{n \geq 1}$ à partir de laquelle elle est construite.*

Preuve. Comme $u_k \geq f_k$ pour tout $k \geq 0$, la période d_u de $\{u_k\}$ divise nécessairement la période d_f de $\{f_k\}$. Par ailleurs, pour tout $k \geq 1$, $\mathbb{P}(S_k = n)$ ne peut être non nul que si n est un multiple de d_f , d'où le résultat. \square

Théorème 17.1. *(Théorème du renouvellement à temps discret). Soit $\{u_n\}$ une mesure de renouvellement associée à une distribution $\{f_n\}$ apériodique. Notant $\mu = \mathbb{E}T_1 = \sum_{k \geq 1} k f_k$, on a*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \frac{1}{\mu}, \quad (17.2)$$

le membre de droite valant zéro si $\mu = +\infty$.

Avant de donner la preuve, énonçons le lemme suivant:

Lemme 17.2. *Pour une mesure $\{f_n\}$ sur $\{1, 2, \dots\}$, on note $\mathcal{S} := \{k \geq 1 : f_k > 0\}$ son support,*

$$\mathcal{S}^+ = \{n \geq 1 : \exists x_1, \dots, x_k \in \mathcal{S}, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N} : n = n_1 x_1 + \dots + n_k x_k\}$$

le support du semi-groupe additif engendré par les éléments de \mathcal{S} , et

$$\mathcal{S}^\pm = \{n \geq 1 : \exists x_1, \dots, x_k \in \mathcal{S}, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z} : n = n_1 x_1 + \dots + n_k x_k\}$$

le support du groupe additif engendré par les éléments de \mathcal{S} .

Si $\{f_k\}$ est apériodique, alors il existe $a \in \mathbb{N}$ tel que tout $n \geq a$ appartient à \mathcal{S}^+ .

Preuve. Soit m le plus petit élément positif de \mathcal{S}^\pm . Nécessairement, $m = 1$: en effet, si $m > 1$, d'après l'hypothèse d'apériodicité, il existe $x \in \mathcal{S}$ qui n'est pas multiple de m , i.e. pour lequel il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $km < x < (k+1)m$. L'élément $x - km$ appartient à \mathcal{S}^\pm et vérifie

$$0 < x - km < m,$$

une contradiction. Donc $m = 1$. Ceci établit l'existence de $x_1, \dots, x_k \in \mathcal{S}$, $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z}$ tels que

$$1 = x_1 n_1 + \dots + x_k n_k.$$

Posons $n_0 := x_1 |n_1| + \dots + x_k |n_k|$. Soit $n \geq n_0^2$ quelconque. On peut écrire $n = a n_0 + b$ avec $a \geq n_0$ et $0 \leq b < n_0$. On a donc:

$$n = a n_0 + b = \sum_{i=1}^k (a |n_i| x_i + b n_i x_i) = \sum_{i=1}^k x_i [a |n_i| + b n_i].$$

Ceci établit que tout $n \geq n_0^2$ appartient à \mathcal{S}^+ , puisque $a |n_i| + b n_i \geq 0$ d'après $a \geq n_0 > b \geq 0$. \square

Preuve. (théorème de renouvellement à temps discret).

Soit $r_n = \mathbb{P}(T_1 > n) = \sum_{k > n} f_k$, et L la plus grande valeur S_k avec $S_k \leq n$. On a $L = \ell$ si et seulement si un renouvellement se produit en ℓ , et l'intervalle suivant est de longueur strictement supérieure à $n - \ell$. Ceci donne la relation

$$1 = \mathbb{P}(L \leq n) = \sum_{\ell=0}^n u_\ell r_{n-\ell}. \quad (17.3)$$

Soit $\lambda = \limsup_{n \rightarrow \infty} u_n$, et $n(k)$ une sous-suite telle que $\lim_{k \rightarrow \infty} u_{n(k)} = \lambda$. Soit $i \in \mathcal{S}$, i.e. tel que $f_i > 0$. Fixant $N > 0$ arbitraire, d'après (17.1) et $u_k \leq 1$ on a

$$u_{n(k)} \leq \sum_{m > N} f_m + \sum_{m=1}^N u_{n(k)-m} f_m.$$

Faisant tendre k vers l'infini, on en déduit que

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} u_{n(k)-i} f_i \geq \lambda - \sum_{m \neq i, m \leq N} f_m \lambda - \sum_{m > N} f_i.$$

Faisant tendre N vers l'infini, ceci implique que $\liminf_{k \rightarrow \infty} u_{n(k)-i} \geq \lambda$, et donc que $\lim_{k \rightarrow \infty} u_{n(k)-i} = \lambda$.

En reproduisant cet argument, on établit de même que pour tout $i \in \mathcal{S}^+$, de la forme $i = \sum_{j=1}^{\ell} x_j n_j$ avec $x_j \in \mathcal{S}$ et $n_j \geq 0$, on a encore $\lim_{k \rightarrow \infty} u_{n(k)-a} = \lambda$. Or d'après le lemme précédent, il existe un entier $a > 0$ tel que tout $i \geq a$ appartient à \mathcal{S}^+ .

Appliquons la relation (17.3) à $n = n(k) - a$ pour obtenir, ayant fixé arbitrairement $N > 0$:

$$1 \geq \sum_{\ell=0}^N u_{n(k)-a-\ell} r_{\ell}$$

Faisant tendre k vers l'infini dans cette expression, d'après ce qui précède chaque terme $u_{n(k)-a-\ell}$ converge vers λ , d'où

$$1 \geq \lambda \sum_{\ell=0}^N r_{\ell}.$$

Faisant maintenant tendre N vers l'infini, puisque $\mu = \sum_{\ell \geq 0} r_{\ell}$, on a

$$\mu \lambda \leq 1.$$

Dans le cas où $\mu = \infty$, cela donne $\lambda = \limsup_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, et donc $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$. Pour $\mu < \infty$, on procède comme suit. Posant $\nu := \liminf_{n \rightarrow \infty} u_n$, on choisit une suite $n(k)$ telle que $\lim_{k \rightarrow \infty} u_{n(k)} = \nu$. Comme précédemment on obtient pour tout $i \in \mathcal{S}$:

$$u_{n(k)} \geq \sum_{m=1}^N u_{n(k)-m} f_m,$$

et donc $\limsup_{k \rightarrow \infty} u_{n(k)-i} \leq \nu$. Itérant, on en déduit de même que pour tout $i \in \mathcal{S}^+$, et donc tout $i \geq a$ pour un a suffisamment grand, $\lim_{k \rightarrow \infty} u_{n(k)-i} = \nu$. Choisisant $n = n(k) - a$ dans (17.3) cela donne pour $N > 0$ fixé arbitraire:

$$1 \leq \left(\sum_{\ell=0}^N u_{n(k)-a-\ell} r_{\ell} \right) + \sum_{\ell > N} r_{\ell},$$

puis après passage à la limite $k \rightarrow \infty$:

$$1 \leq (\nu \sum_{\ell=0}^N r_{\ell}) + \sum_{\ell > N} r_{\ell}.$$

Comme on a supposé $\mu < \infty$, on peut faire tendre N vers l'infini, ce qui donne: $1 \leq \mu \nu$, soit $\liminf_{n \rightarrow \infty} u_n \geq 1/\mu$. Ceci, combiné avec $\limsup_{n \rightarrow \infty} u_n \leq 1/\mu$, établit le résultat. \square

Théorème 2.3 (Théorème ergodique). Une chaîne de Markov irréductible de matrice de transition P admet une loi invariante π si et seulement si elle est récurrente positive. On dit alors que la chaîne est ergodique. La loi invariante est unique, donnée par

$$\forall x, y \in E, \pi_x = \frac{1}{\mathbb{E}_x(T_x)} = \frac{\mathbb{E}_y \sum_{n=1}^{T_y} \mathbf{1}_{X_n=x}}{\mathbb{E}_y T_y}. \quad (17.4)$$

et pour toute fonction f telle que $\sum_{x \in E} \pi_x |f(x)| < +\infty$, on a la convergence presque sûre, ou théorème ergodique (les moyennes en temps sont égales aux moyennes en espace):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n f(X_m) = \sum_{x \in E} \pi_x f(x). \quad (17.5)$$

Preuve. D'après le théorème 2.2, une chaîne de Markov irréductible récurrente admet une mesure stationnaire, unique à une constante multiplicative près. Soit $\nu^{(x)}$ la mesure stationnaire qui y est construite. Sa masse totale est donnée par

$$\sum_{y \in E} \nu_y^{(x)} = \mathbb{E}_x \sum_{n=1}^{T_x} 1 = \mathbb{E}_x(T_x).$$

Cette masse totale est donc finie (ou de manière équivalente, la chaîne admet une loi invariante, obtenue par normalisation de cette mesure) si et seulement si la chaîne est récurrente positive. La première partie du théorème sera établie en montrant qu'une chaîne irréductible transiente ne peut admettre de loi invariante.

Supposant donc qu'il existe une loi invariante π pour la chaîne, montrons qu'elle ne peut être transiente. Par invariance, pour une loi initiale de X_0 donnée par π , $X_n \sim \pi$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit un $x \in E$ tel que $\pi_x > 0$. Alors, notant comme dans la proposition 2.1 par N_x le nombre total de visites à x par X_1, \dots, X_n, \dots , on a

$$\mathbb{E}_\pi N_x = +\infty.$$

Or d'après la propriété de Markov forte appliquée à T_x , on a:

$$\mathbb{E}_{pi} N_x = \mathbb{P}_\pi(T_x > \infty)(1 + \mathbb{E}_x N_x).$$

Donc si une loi stationnaire π existe, nécessairement $\mathbb{E}_x N_x = +\infty$. L'état x est donc récurrent.

Supposant la chaîne ergodique, et notant encore π sa loi invariante, soit maintenant une fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\sum_{y \in E} \pi_y |f(y)| < \infty$. En décomposant la fonction f entre sa partie positive et sa partie négative, on peut se ramener au cas où $f \geq 0$, ce que nous faisons. Fixons un état $x \in E$, et notons T_k le nombre d'étapes entre la $(k-1)$ -ème et la k -ème visite de la chaîne à l'état x , $T_0 = 0$, $N_k = T_1 + \dots + T_k$, $Z_k = \sum_{m=S_{k-1}+1}^{S_k} f(X_m)$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $N(n)$ le nombre de visites de la chaîne à x par X_1, \dots, X_n . On a alors:

$$\frac{Z_1 + \dots + Z_{N(n)}}{T_1 + \dots + T_{N(n)+1}} \leq \frac{\sum_{m=1}^n f(X_m)}{n} \leq \frac{Z_1 + \dots + Z_{N(n)+1}}{T_1 + \dots + T_{N(n)}} \quad (17.6)$$

Or d'après la propriété de Markov forte, les T_k sont indépendants, et pour $k > 1$, T_k a la loi de T_x sous \mathbb{P}_x . De même, les Z_k sont indépendants, et pour $k > 1$, Z_k a la loi de

$$\sum_{m=1}^{T_x} f(X_m)$$

sous \mathbb{P}_x . La loi forte des grands nombres nous donne alors l'existence des limites presque sûres:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{S_N}{N} = \mathbb{E}_x(T_x), \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{Z_1 + \dots + Z_N}{N} = \mathbb{E}_x \sum_{n=1}^{T_x} f(X_n).$$

La première limite garantit que le rapport S_N/N est majoré avec probabilité 1, mettons $\forall N \in \mathbb{N}, S_N \leq NX$ pour une variable aléatoire X presque sûrement finie. Ceci implique que $N(n) \geq n/X$, et donc que presque sûrement $\lim_{n \rightarrow \infty} N(n) = +\infty$. En réécrivant les majorants et mineurs dans (17.6) comme

$$\frac{Z_1 + \dots + Z_{N(n)}}{N(n)} \frac{N(n)+1}{S_{N(n)+1}} \frac{N(n)}{N(n)+1}, \quad \frac{Z_1 + \dots + Z_{N(n)+1}}{N(n)+1} \frac{N(n)}{T_1 + \dots + T_{N(n)}} \frac{N(n)+1}{N(n)},$$

on déduit de ces convergences presque sûres le résultat annoncé. \square

On a enfin: **Théorème 2.4** Pour une chaîne de Markov X_0^∞ ergodique (i.e., irréductible, récurrente positive), supposée de plus apériodique, on a alors la convergence en loi suivante pour toute loi initiale ν :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_\nu(X_n = x) = \pi_x.$$

Preuve. On fixe un état arbitraire $x \in E$, et on note $f_i = \mathbb{P}_x(T_x = i)$. On introduit la mesure de renouvellement associée $\{u_n\}$ qui s'interprète comme $u_n = \mathbb{P}_x(X_n = x)$. On a alors, d'après la propriété de Markov forte:

$$\mathbb{P}_\nu(X_n = x) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}_\nu(T_x = k) u_{n-k}.$$

Par convergence dominée, on obtient du théorème de renouvellement à temps discret que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_\nu(X_n = x) = \frac{1}{\mathbb{E}_x(T_x)} = \pi_x,$$

comme annoncé. \square

On a une forme de réciproque de ce dernier théorème et du théorème ergodique avec le résultat suivant: **Théorème 2.5** Une chaîne de Markov irréductible non ergodique (i.e. transiente ou récurrente nulle) est telle que pour tout $x \in E$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = x) = 0.$$

Preuve. Dans le cas transient, ce résultat est une conséquence directe de la proposition 2.1. En effet, pour x transient, la somme $\sum_{n \geq 1} p_{xx}^n$ est finie, et donc a fortiori $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{xx}^n = 0$. On peut alors écrire, d'après la propriété de Markov forte,

$$\mathbb{P}(X_n = x) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(T_x = k) p_{xx}^{n-k}.$$

La conclusion s'obtient alors en invoquant le théorème de convergence dominée.

Dans le cas récurrent nul, on utilise le théorème du renouvellement à temps discret, avec comme dans la preuve précédente, pour un état x récurrent nul, $f_i = \mathbb{P}_x(T_x = i)$, $\{u_n\}$ la mesure de renouvellement associée, et l'identité

$$\mathbb{P}_\nu(X_n = x) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}_\nu(T_x = k) u_{n-k},$$

mais la récurrence nulle entraîne maintenant que $\mathbb{E}_x(T_x) = +\infty$, et donc $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$. Par convergence dominée on en déduit que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_\nu(X_n = x) = 0$. \square

17.2 Dynamiques de gradient: preuve du théorème 5.3

Théorème 5.3 Soit une fonction $F : \mathbb{R}_+^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ convexe, continument différentiable sur chaque ensemble $\{x : F(x) \leq A\}$ pour tout $A \in \mathbb{R}$. On suppose chacun de ces ensembles compact. Soient des fonctions $\kappa_i : \mathbb{R}_+^d \rightarrow (0, \infty)$, supposées minorées au-dessus de 0, continument dérivables de dérivées uniformément bornées.

Alors l'équation (5.19) admet une unique solution pour chaque condition initiale $x(0) \in \mathbb{R}_+^d$.

De plus la valeur $F(x(t))$ décroît avec t vers F^* , la valeur minimale de F sur \mathbb{R}_+^d . Si la fonction F admet un unique minimiseur x^* sur \mathbb{R}_+^d , alors $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^*$.

Preuve. Théorème 5.3, existence: On fixe un pas de temps $\epsilon > 0$. On construit par récurrence $x(n)$, $n \in \mathbb{N}$, démarrant avec la condition initiale $x(0)$ et posant

$$x_i(n+1) = \begin{cases} x_i(n) & \text{si } n \neq i \pmod{d}, \\ \max(0, \operatorname{argmin}_{z \in I_i(n)} (F(x^{-i}(n), z))) & \text{si } n = i \pmod{d}, \end{cases}$$

où et $(x^{-i}(n), z)$ désigne le vecteur de j -ème coordonnée z pour $j = i$ et de j -ème coordonnée $x_j(n)$ pour $j \neq i$, et où on a défini $I_i(n)$, posant $b_i(n) = x_i(n) - d\epsilon\kappa_i(x(n))\partial_i F(x(n))$, par

$$I_i(n) := [\max(0, \min(x_i(n), b_i(n))), \max(x_i(n), b_i(n))].$$

En d'autres termes on met à jour de manière cyclique chacune des d coordonnées, en adaptant une coordonnée i par une modification de taille au plus $|d\epsilon\kappa_i(x(n))\partial_i F(x(n))|$, de façon à minimiser F , tout en maintenant cette coordonnée dans \mathbb{R}_+ .

Par construction, $F(x(n))$ est décroissante. La suite des $x(n)$ reste donc dans l'ensemble supposé compact $\{x \in \mathbb{R}_+^d : F(x) \leq F(x(0))\}$. On a aussi supposé F continument dérivable sur un tel ensemble. Le gradient de F évalué en $x(n)$ reste donc borné uniformément en n . Les différences $x(n) - x(n-1)$ ont donc une norme majorée par ϵC pour une constante C , et ce uniformément en n et en ϵ . Le lemme 17.3 ci-dessous implique donc que la suite de fonctions

$$x^{(\epsilon)}(t) = x(n), \quad t \in [n\epsilon, (n+1)\epsilon),$$

admet une sous-suite convergeant uniformément sur tout intervalle compact $[0, T]$ lorsque $\epsilon \rightarrow 0$ vers une limite Lipschitzienne.

Soit x une telle fonction limite d'une sous-suite des fonctions $x^{(\epsilon)}$. On veut établir que x satisfait la représentation intégrale (5.20). Pour ce faire on fixe $i \in [d]$. Pour tout $s \in (0, t)$, on écrit

$$x_i(s+h) - x_i(s) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon d \sum_{n:s \leq n \leq s+h} \operatorname{argmin}_{z \in I_i(n)} (F(x^{-i}(n), z)) \mathbf{1}_{n=d \pmod{d}}.$$

On distingue selon plusieurs cas.

Cas 1: $x_i(s) > 0$. Par continuité de $\partial_i F$, et continuité de la trajectoire limite x , la limite vaut, pour $h > 0$ assez petit, $-h\partial_i F(x(s)) + o(h)$. La dérivée en s de x_i existe donc et vaut $-\partial_i F(x(s))$.

Cas 2: $x_i(s) = 0$ et $\partial_i F(x(s)) \geq 0$. La limite vaut alors, encore par continuité de $\partial_i F$ et continuité de la trajectoire limite x , $o(h)$. La dérivée à droite en s de x_i existe donc et vaut $0 = \max(0, -\partial_i F(x(s)))$.

Cas 3: $x_i(s) = 0$ et $\partial_i F(x(s)) < 0$. La limite vaut alors $-h\partial_i F(x(s)) + o(h)$. La dérivée à droite existe alors, et est strictement positive car égale à $-\partial_i F(x(s))$. Mais dans ce cas la dérivée à gauche de x_i en s ne saurait être strictement positive, car cela impliquerait $x_i(s-h) < 0$ pour $h > 0$ assez petit. On est donc en un point de non dérivabilité de la trajectoire.

Pour conclure que la représentation intégrale est satisfaite on invoque le théorème de Rademacher, selon lequel toute fonction Lipschitzienne est presque partout dérivable, et égale à l'intégrale de sa dérivée. \square

Nous citons sans preuve le Lemme suivant. Il s'agit d'une variante du théorème d'Arzela-Ascoli. Ce dernier caractérise les suites de fonctions continues f_n sur $[0, T]$ qui sont compactes pour la topologie de la convergence uniforme. Pour une preuve on pourra consulter [17].

Lemme 17.3. *Soit une suite de fonctions $f_n : (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour une constante $M > 0$ et une suite $\{\sigma_n\}_{n \geq 0}$ tendant vers 0 dans \mathbb{R} , on a les propriétés suivantes:*

- (i) $\{f_n(0)\}_{n \geq 0}$ est bornée;
- (ii) $\forall s, t \in [0, T], |f_n(t) - f_n(s)| \leq M|t - s| + \sigma_n$.

Alors la suite f_n admet une sous-suite qui converge uniformément sur $[0, T]$ vers une fonction limite, qui est M -Lipschitzienne sur $[0, T]$.

Preuve. **Théorème 5.3, unicité:** Soient x, \tilde{x} deux solutions issues de la même condition initiale $x(0)$.

On définit la fonction

$$f(t) := \sum_{i=1}^d g_i(x(t))(x_i(t) - \tilde{x}_i(t))^2,$$

où on a posé $g_i = 1/\kappa_i$. Cette fonction est alors absolument continue, presque partout dérivable de dérivée

$$\begin{aligned} f'(t) &= 2 \sum_{i=1}^d (x_i(t) - \tilde{x}_i(t)) [-\partial_i F(x(t))]_{x_i(t)}^+ - \frac{g_i(x(t))}{g_i(\tilde{x}(t))} [-\partial_i F(\tilde{x}(t))]_{\tilde{x}_i(t)}^+ \\ &\quad + \sum_{i=1}^d (x_i(t) - \tilde{x}_i(t))^2 D_i(t), \end{aligned}$$

où $D_i(t)$ est la dérivée en temps de $g_i(x(t))$. D'après hypothèses de régularité (continument dérivables) et de minoration au-dessus de 0 sur les κ_i , le deuxième terme est majoré par $bf(t)$ pour une constante $b \geq 0$. On décompose le premier terme comme somme de

$$A(t) := 2 \sum_{i=1}^d (x_i(t) - \tilde{x}_i(t)) \{ [-\partial_i F(x(t))]_{x_i(t)}^+ - [-\partial_i F(\tilde{x}(t))]_{\tilde{x}_i(t)}^+ \},$$

et

$$B(t) = 2 \sum_{i=1}^d (x_i(t) - \tilde{x}_i(t)) \left[1 - \frac{g_i(x(t))}{g_i(\tilde{x}(t))} \right] [-\partial_i F(\tilde{x}(t))]_{\tilde{x}_i(t)}^+.$$

A nouveau des hypothèses de régularité sur les κ_i et donc les g_i nous permettent de majorer $B(t)$ par $bf(t)$ pour une constante $b \geq 0$. Considérons enfin $A(t)$. Le vecteur $-\{[-\partial_i F(x(t))]_{x_i(t)}^+\}$ est un sous-gradient (cf. [15]) en $x(t)$ de la fonction convexe valant F sur \mathbb{R}_+^d et $+\infty$ ailleurs. De même, le vecteur $-\{[-\partial_i F(\tilde{x}(t))]_{\tilde{x}_i(t)}^+\}$ est un sous-gradient de cette fonction en \tilde{x} . La propriété de monotonie du sous-gradient des fonctions convexes (cf. [15]) garantit donc que $A(t) \leq 0$. Il s'en suit que

$$f'(t) \leq bf(t),$$

et donc puisque $f(0) = 0$,

$$f(t) \leq b \int_0^t f(s) ds.$$

Le lemme de Gronwall (cf. ci-dessous) entraîne alors que $f(t) \leq 0$. Ceci implique l'unicité annoncée. \square

Lemme 17.4. (Gronwall). *Soit une fonction $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour deux constantes $a, b \geq 0$, on a*

$$\forall t \in [0, T], f(t) \leq a + b \int_0^t f(s) ds.$$

Alors:

$$f(t) \leq ae^{bt}.$$

Preuve. Posant $g(t) = e^{-bt} \int_0^t f(s) ds$, on a par hypothèse

$$g'(t) \leq ae^{-bt}.$$

En intégrant (on peut supposer $b > 0$ car pour $b = 0$ le résultat est trivial), ceci donne

$$g(t) = e^{-bt} \int_0^t f(s) ds \leq \frac{a}{b}(1 - e^{-bt}),$$

qui entraîne

$$a + b \int_0^t f(s) ds \leq e^{bt}.$$

Le résultat en découle après une nouvelle utilisation de l'hypothèse. \square

Preuve. Théorème 5.3, convergence vers un minimiseur: La valeur $F(x(t))$ décroît avec t , puisqu'elle décroît sur la construction discrète utilisée pour prouver l'existence de la solution $x(t)$. Soit x^* un minimiseur de F sur \mathbb{R}_+^d . Soit $x(t) \in \mathbb{R}_+^d$ tel que $F(x(t)) < \infty$ un point de la trajectoire. Puisque la fonction convexe $s \rightarrow F((1-s)x(t) + sx^*)$ est au-dessus de sa tangente, on a:

$$F(x^*) \geq F(x(t)) + \sum_i (x_i^* - x_i) \partial_i F(x(t)) \geq F(x(t)) - \sum_i (x_i^* - x_i(t)) [-\partial_i F(x(t))]_{x_i(t)}^+. \quad (17.7)$$

Ici on a utilisé le fait que pour $x_i(t) = 0$, alors

$$(x_i^* - x_i(t)) \partial_i F(x(t)) = -x_i^* (-\partial_i F(x(t))) \geq -x_i^* \max(0, -\partial_i F(x(t))).$$

Ce même argument établit que $\{-[-\partial_i F(x)]_{x_i}^+\}_{i=1, \dots, d}$ est un sous-gradient de F en x .

On a par ailleurs pour presque tout $t > 0$:

$$\frac{d}{dt} F(x(t)) = \sum_i \partial_i F(x(t)) \kappa_i(x(t)) [-\partial_i F(x(t))]_{x_i(t)}^+ \leq -\kappa_{\min} \sum_i \left([-\partial_i F(x(t))]_{x_i(t)}^+ \right)^2.$$

D'après (17.7) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$F(x(t)) - F(x^*) \leq \|x^* - x(t)\| \cdot \|[-\partial_i F(x(t))]_{x_i(t)}^+\|.$$

Pour un $\epsilon > 0$ tel que $F(x(t)) \geq F(x^*) + \epsilon$, cela donne donc, notant C l'ensemble compact des x tels que $F(x) \leq F(x(0))$:

$$\frac{d}{dt} F(x(t)) \leq -\kappa_{\min} \min_{x \in C} (\|x - x^*\|^{-2} (F(x(t)) - F(x^*))^2) \leq -\kappa_{\min} \min_{x \in C} (\|x - x^*\|^{-2}) \epsilon^2.$$

On conclut donc que pour tout ϵ , au bout d'un temps fini, $F(x(t)) \leq F(x^*) + \epsilon$. \square

Bibliography

- [1] D. Aldous. Ultimate instability of exponential back-off protocol for acknowledgement-based transmission control of random access communication channels. *IEEE Transactions on Information Theory*, 33:219–223, 1987.
- [2] S. Asmussen. *Applied Probability and Queues*. Springer, 2003.
- [3] T. Bodineau. *Modélisation de phénomènes aléatoires: introduction aux chaînes de Markov et aux martingales*. Ecole Polytechnique, 2015.
- [4] J. Bonnans and S. Gaubert. *Recherche opérationnelle: aspects mathématiques et applications*. Ecole Polytechnique, 2015.
- [5] A. Ephremides and B. Hajek. Information theory and communication networks: an unconsummated union. *IEEE Transactions on Information Theory*, 44(6), 1998.
- [6] U. Feige and E. Ofek. Spectral techniques applied to sparse random graphs. *Random Struct. Algorithms*, 27(2):251–275, Sept. 2005.
- [7] B. Hajek. Notes for ece 467: Communication network analysis. 2006.
- [8] L. Harper. Optimal assignment of numbers to vertices. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 12(1):131–135, 1964.
- [9] F. Kelly. Charging and rate control for elastic traffic. *Eur. Trans. Telecommun.*, (8):33–37, 1997.
- [10] F. Kelly and E. Yudovina. *Stochastic Networks*. Cambridge University Press, 2014.
- [11] P. Key and L. Massoulié. Fluid models of integrated traffic and multipath routing. *Queueing Systems: Theory and Applications*, 2006.
- [12] J. Nash. The bargaining problem. *Econometrica*, 18:155–162, 1950.
- [13] K. Pearson. On lines and planes of closest fit to systems of points in space. *Philosophical Magazine*, (2), 1901.
- [14] P. Robert. *Réseaux de communications, algorithmes et probabilités*. Ecole Polytechnique, 2014.
- [15] R. T. Rockafellar. *Convex analysis*. Princeton Mathematical Series, No. 28. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.
- [16] D.-C. Tomozei and L. Massoulié. Distributed user profiling via spectral methods. *Stochastic Systems*, (4), 2014.

- [17] H.-Q. Ye, J. Ou, and X.-M. Yuan. Stability of data networks: stationary and bursty models. *Oper. Res.*, 53(1):107–125, 2005.