Université Paris 7 **7 décembre 2011**
Licence Math-Info (L3)
TD de Logique (Brice Minaud)

TD 9 bis

Récursivité, suite et fin

Note : les exercices 4 et 5 proviennent de l'examen de l'année dernière.

***Exercice* 1 :**
- Montrer que la fonction $x \mapsto x!$ est primitive récursive.
- Montrer que la fonction $x \mapsto \lfloor \sqrt[3]{x} \rfloor$ est primitive récursive.
- Montrer que la fonction $(x, n) \mapsto \lfloor \sqrt[n]{x} \rfloor$ est primitive récursive.

***Exercice* 2 :** Montrer que la fonction $\phi(n)$, qui à n associe le nombre d'entiers i plus petits que n tels que i et n sont premiers entre eux, est primitive récursive.

***Exercice* 3 :** Montrer que la fonction qui a n associe le n-ième nombre premier est primitive récursive.
(On pourra démontrer préalablement que pour tout n il y a un nombre premier entre n et $n! + 1$)

***Exercice* 4 :** Soit g primitive récursive. Montrer que la fonction $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ suivante est primitive récursive : $f : (x, n) \mapsto g^{(n)}(x) = g \circ g \circ \cdots \circ g(x)$, où g est composée n fois avec elle-même.

***Exercice* 5 :** Montrer que le sous-ensemble de $\mathbb{N}^3$ suivant est primitif récursif :

$$\{(a, b, c) : \text{l'équation } ax^2 + bx + c \text{ a une solution dans } \mathbb{Z}\}$$

***Exercice* 6 :** Montrer que la fonction f qui à (x, n) associe le n-ième nombre premier, par ordre croissant, dans la décomposition de n en nombres premiers, s'il existe, et 0 sinon, est primitive récursive.