Université Paris 7 **13 Décembre 2011**
U4MC35 **Durée : 2 H**

DST 3

Dans les deux exercices qui suivent f est un symbole de fonction unaire, A et B des symboles de relation unaire, P un symbole de relation binaire, R est un symbole de relation ternaire et c, d des symboles de constante.

I. (x pts)

On considère les clauses suivantes :

(1)	$Rcv_2d \rightarrow$	(2)	$(Rv_0v_1v_3 \wedge Rv_1ffdv_4 \wedge Rv_0v_4v_5) \rightarrow Rv_3v_2v_5$
(3)	$\rightarrow Rdcd$	(4)	$\rightarrow Rv_0fv_0c$

1. Choisir les unifications adéquates pour pouvoir faire toutes les résolutions suivantes :

   Appliquer la règle de résolution entre les clauses (1) et (2), on obtient une clause (5). Donner une clause (6) obtenue par résolution entre (3) et (5), puis une clause (7) obtenue par résolution entre (4) et (6), et enfin une clause (8) obtenue par résolution entre (4) et (7).
2. Ce système de clauses est-il réfutable ?

II. (x pts)

Pour chacune des formules closes de $\mathfrak{L}$ données ci-dessous, dire, en justifiant, si elle est vraie dans toutes les $\mathfrak{L}$ -structures, fausse dans toutes les $\mathfrak{L}$ -structures ou s'il existe une $\mathfrak{L}$ -structure la rendant vraie et une $\mathfrak{L}$ -structure la rendant fausse (dans ce dernier cas, on donnera un tel couple de $\mathfrak{L}$-structures)

1. $\exists x\,(Ax \Rightarrow \forall y Ay)$
2. $\forall x \exists y\,(Ax \bigwedge \neg Ay)$
3. $\forall x \forall y\,(Ax \Rightarrow Ay)$
4. $(\forall x \exists y\,(Ax \Rightarrow By) \Rightarrow \exists y \forall x\,(Ax \Rightarrow By))$
5. $\forall x \forall y\ \exists z\,((Pxx \bigvee Pxy) \Rightarrow Pxz)$
6. $\exists x \exists y \exists z\,(Pxy \bigwedge Pyz \bigwedge \neg Pzx)$
7. $\exists x \exists y \forall z\,(\neg Pxy \bigwedge Pyx \bigwedge Pxz)$

III. (x pts)

1. Montrer que la fonction qui au couple d'entiers (i, n) elle associe le i-ème chiffre dans l'écriture décimale de n, 0 sinon, est primitive récursive.
2. Montrer que l'ensemble des couples de nombres premiers entre eux est récursif primitif.

T.S.V.P

IV. (x pts) (Modélisation de Sudoku)

Dans cet exercice, on considère une grille 4×4. Soit $P = \{p_{i,j,n}\,;\ 1 \leq i \leq 4, \quad 1 \leq j \leq 4 \ \text{ et } \ 1 \leq n \leq 4\}$ un ensemble de 64 variables propositionnelles.

On établit une correspondance biunivoque entre les positions des 4 chiffres de 1 à 4 sur la grille et les distributions δ de valeurs de vérité sur P de la manière suivante :

pour $1 \leq i \leq 4$, $1 \leq j \leq 4$ et $1 \leq n \leq 4$, $\delta(p_{i,j,n}) = 1$ si le chiffre n est dans la case située à l'inte

Les sous-grille d'une grille Sudoku 4×4 sont les quatres sous-grilles 2×2 contenant chacune un des quatres coins de la grille. Le but du jeu Sudoku 4×4 est de compléter une grille partiellement remplie avec la série de chiffres 1 à 4 de telle façon qu'ils ne se trouvent jamais plus d'une fois sur une même ligne, dans une même colonne ou dans une même sous-grille. Exemple :

	1	**2**	
2			
			4
	4	**3**	

Solution

4	**1**	**2**	3
2	3	4	1
3	2	1	**4**
1	**4**	**3**	2

1. Donner, pour $1 \leq i \leq 4$, une formule L_i telle que pour toute distribution de valeurs de vérité δ,
   δ satisfait L_i si et seulement si la ligne i contient tous les chiffres de 1 à 4 et chaque case de cette ligne i contient un et un seul chiffre.
2. On considère la sous-grille G_1 contenant la case 1-1. Donner une formule F_1 telle que pour toute distribution de valeurs de vérité qui rend F_1 vraie, la sous-grille G_1 contient tous les chiffres de 1 à 4 et chaque case de cette sous-grille G_1 contient un et un seul chiffre.
3. Supposons qu'une grille 4×4 est pré-remplie avec les cases 1-2, 2-1, 2-3, 3-4 et 4-3 contenant respectivement a, b, c, d et e des chiffres entre 1 et 4 avec $a \neq b$, $b \neq c$, $c \neq e$ et $e \neq d$. Donner un ensemble S de formules propositionnelles tel que pour toute distribution δ sur P :

$\delta \models S$ si et seulement si "la grille de Sudoku pré-remplie a une solution".