**Université Paris 7** **8 novembre 2011**
**Licence Math-Info (L3)**
**TD de Logique (Brice Minaud)**

## Correction du TD 6

***Exercice 1 :***

$F_0 : \forall x\ 1 \times x = x$
$F_1 : \exists y\ \forall x\ x \times y = x$
$F_2 : \exists y\ \forall x\ x \times y = y$
$F_3 : \forall x\ \forall y\ \exists z\ x + z \times z = y$
$F_4 : \forall x\ \forall y\ \exists ! z\ x + z \times z \times z = y$

***Exercice 2 :***

- $Rcv_0$ signifie $\pi \leq v_0$ : l'ensemble demandé est $\{x \in \mathbb{R} : x \geq \pi\}$
- $\exists v_1\ fv_1 = v_0$ signifie $\exists v_1\ \cos v_1 = v_0$ : l'ensemble demandé est l'intervalle $[-1, 1]$
- $\exists v_1\ fv_0 = v_1$ signifie $\exists v_1\ \cos v_0 = v_1$ : l'ensemble demandé est $\mathbb{R}$ entier
- $fv_0 = c$ signifie $\cos v_0 = \pi$ : l'ensemble demandé est $\emptyset$
- $\exists v_1\ (Rcv_0 \wedge fv_1 = v_0)$ signifie $\exists v_1\ (\pi \leq v_0 \wedge \cos v_1 = v_0)$ : l'ensemble demandé est $\emptyset$
- $\exists v_1\ (Rcv_1 \wedge fv_0 = v_1)$ signifie $\exists v_1\ (\pi \leq v_1 \wedge \cos v_0 = v_1)$ : l'ensemble demandé est $\emptyset$
- $\forall v_1\ Rv_0 f v_1$ signifie $\forall v_1\ v_0 \leq \cos v_1$ : l'ensemble demandé est l'intervalle $]-\infty, -1]$
- $\forall v_1\ Rfv_0 fv_1$ signifie $\forall v_1\ \cos v_0 \leq \cos v_1$ : l'ensemble demandé est $\{3\pi/2 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$
- $\forall v_1\ \exists v_2\ (Rv_1 v_2 \wedge fv_2 = v_0)$ signifie $\forall v_1\ \exists v_2\ (v_1 \leq v_2 \wedge \cos v_2 = v_0)$ : l'ensemble est $[-1, 1]$
- $\forall v_0\ \exists v_1\ fv_1 = v_0$ signifie $\forall v_0\ \exists v_1\ \cos v_1 = v_0$ : formule close fausse donc l'ensemble est $\emptyset$
- $\exists v_1 \forall v_2\ Rfv_2 v_1$ signifie $\exists v_1 \forall v_2\ \cos v_2 \leq v_1$ : formule close vraie donc l'ensemble est $\mathbb{R}$

***Exercice 3 :***

$F_1 \wedge \neg F_2 :\ < \mathbb{R}, x \mapsto e^x, x \mapsto e^x >$
$F_2 :\ < \mathbb{R}, x \mapsto 0, x \mapsto 0 >$
$\neg F_1 \wedge F_3 :\ < \mathbb{R}, x \mapsto x, x \mapsto x + 1 >$
$\neg F_1 \wedge F_4 :\ < \mathbb{R}, x \mapsto x, x \mapsto 0 >$
$\neg F_3 \wedge \neg F_4 \wedge F_5 :\ < \mathbb{R}, x \mapsto x, x \mapsto |x| >$
$\neg F_5 :\ < \mathbb{R}, x \mapsto 0, x \mapsto 1 >$

***Exercice 4 :***

a.

1) $\exists x \forall y Rxy$
2) $\forall x \forall y (Rxy \implies \exists z (Rxz \wedge Rey))$
3) $\exists x \neg * xx \simeq x$
4) $\forall x (*xx \simeq c \implies x \simeq c)$
5) $\exists x * xx = \oplus dd$
6) $\exists x \exists y \forall z (Rzx \vee Rzy)$
7) $\forall x \exists y (Ryx \wedge \neg x \simeq y)$
8) $\exists x \forall y \neg Ryx$

b.

| | | |
|---|---|---|
| $F_1$ : | $< \mathbb{R}, 0, +, \times, \leq >$ | $< \mathbb{R}, 1, +, \times, \leq >$ |
| $F_2$ : | $< \mathbb{R}, 0, +, \times, \leq >$ | $< \mathbb{R}, 1, +, \times, \leq >$ |
| $F_3$ : | $< \mathbb{R}, 0, +, \times, = >$ | $< \mathbb{R}, 1, +, \times, \leq >$ |
| $F_4$ : | $< \mathbb{R}, 0, +, \times, = >$ | $< \mathbb{R}, 1, +, \times, \leq >$ |
| $F_5$ : | $< \mathbb{R}, 0, +, \times, < >$ | $< \mathbb{R}, 1, +, \times, \leq >$ |

***Exercice 5 :***

$A = \forall x \forall y \forall z (x < y \implies x \leq z)$
$B = \exists x \forall z \exists y (Rxx \implies Rzy)$
$C = \exists x \forall y \forall w \forall z \exists t \forall x' \exists y' \exists w' \exists z' \forall t' \big( (x \simeq y \wedge (w \simeq z \wedge t \simeq t)) \vee (\neg x' \simeq y' \wedge \neg (w' \simeq z' \wedge t' \simeq t')) \big)$

***Exercice* 6 :**

a) 2
b) 4
c) 4
d) 32

***Exercice* 7 :**

a. $\forall x \exists y \exists z \big( Exy \wedge Exz \wedge \neg x \simeq y \wedge \neg x \simeq z \wedge \neg y \simeq z \wedge \forall t (Etx \implies (t \simeq x \vee t \simeq y \vee t \simeq z)) \big)$
b. $\forall x \forall y \big( (\forall t (Etx \implies t \simeq x) \wedge \forall t (Ety \implies t \simeq y)) \implies x \simeq y \big)$

***Exercice* 8 :**

a.

$\alpha[x, y] : \{(x, y) : x \leq y\}$
$\beta[x] : \{0, 1\}$
$\gamma[x] : \{x : x \text{ est un carré}\}$
$\delta[x] : \emptyset$

b.

$A : F_A[x] = \exists y \exists u, (\forall z, uz \simeq z) \wedge x \simeq ffuuy$
$B : F_B[x] = \exists u, (\forall z, uz \simeq z) \wedge x \simeq fuu$
$C : F_C[x] = \neg(\exists u \exists y, (\forall z, uz \simeq z) \wedge x \simeq gyfuu)$
$D : F_D[x, y, z] = \exists a \exists b, x \simeq gaz \wedge y \simeq gbz \wedge$
$(\forall z', (\exists a \exists b, x \simeq gaz' \wedge y \simeq gbz') \implies \exists p, z \simeq fz'p)$