Université Paris 7 **18 octobre 2011**
Licence Math-Info (L3)
TD de Logique (Brice Minaud)

Correction du TD 4

***Exercice* 1 :** Deux formules sont équivalentes ssi elles ont la même table de vérité. Or à chaque table de vérité correspond une unique FNDC, à permutations près. En effet, quand on transforme une table de vérité en FNDC ou inversement, le nombre de termes de la FNDC est déterminé par le nombre de 1 dans la colonne correspondant à la formule dans la table de vérité ; chaque terme contient toutes les variables parce que c'est une forme canonique ; et la présence d'une négation ou non devant chaque variable est déterminée par les 0 et les 1 sur la ligne correspondant au terme. La formule est donc entièrement déterminée par la table de vérité, à permutations des termes près (et des variables à l'intérieur des termes).

Il y a une bijection entre les FNDC et les FNCC : il suffit d'inverser les opérateurs $\wedge$ et $\vee$, et les négations dans une FNDC pour obtenir une FNCC équivalente à la négation de la formule. En particulier, puisqu'on a déjà montré que les FNDC sont uniques à permutations près, la même chose est vraie pour les FNCC.

***Exercice* 2 :**

a. On sait que $\{\wedge, \vee, \neg\}$ est complet, donc il suffit de montrer qu'on peut recréer ces trois connecteurs à l'aide du système demandé.

$$\begin{aligned}
\text{Pour } \{\mathbf{0}, \Rightarrow\} : \neg A &\equiv (A \Rightarrow \mathbf{0}) \; ; \\
(A \vee B) &\equiv (\neg A \Rightarrow B) \equiv ((A \Rightarrow \mathbf{0}) \Rightarrow B) \; ; \\
(A \wedge B) &\equiv \neg(\neg A \vee \neg B) \equiv ((A \Rightarrow (B \Rightarrow \mathbf{0})) \Rightarrow \mathbf{0}). \\
\text{Pour } \{\mathbf{0}, \Leftrightarrow, \vee\} : \neg A &\equiv (A \Leftrightarrow \mathbf{0}) \; ; \\
(A \vee B) &\equiv (A \vee B) \; ; \\
(A \wedge B) &\equiv \neg(\neg A \vee \neg B) \equiv (((A \Leftrightarrow \mathbf{0}) \vee (B \Leftrightarrow \mathbf{0})) \Leftrightarrow \mathbf{0}). \\
\text{Pour } \{\mathbf{0}, \Leftrightarrow, \wedge\} : \neg A &\equiv (A \Leftrightarrow \mathbf{0}) \; ; \\
(A \wedge B) &\equiv (A \wedge B) \; ; \\
(A \vee B) &\equiv \neg(\neg A \wedge \neg B) \equiv (((A \Leftrightarrow \mathbf{0}) \wedge (B \Leftrightarrow \mathbf{0})) \Leftrightarrow \mathbf{0}).
\end{aligned}$$

b$\star$. On commence par le système $\{\mathbf{1}, \Rightarrow, \wedge, \vee\}$. On va montrer que ce système ne peut pas exprimer la négation. On raisonne par induction sur les formules à une variable composées avec ce système. L'hypothèse d'induction est :
Toute formule $F[A]$ à une variable A composée avec ce système est équivalente soit à A, soit à $\mathbf{1}$.

On initialise l'induction en considérant le cas $F \in P$ ou $F = \mathbf{1}$. Dans ce cas $F = A$ ou $F = \mathbf{1}$, et l'hypothèse d'induction est vérifiée. Ensuite si $F = (G \Rightarrow H)$, par hypothèse d'induction $G \equiv A$ ou $G \equiv 1$, et $H \equiv A$ ou $H \equiv 1$. Il y a donc quatre cas à considérer : 1- si $G \equiv A$ et $H \equiv A$, $F = (G \Rightarrow H) \equiv (A \Rightarrow A) \equiv A$; 2- si $G \equiv A$ et $H \equiv \mathbf{1}$, $F = (G \Rightarrow H) \equiv (A \Rightarrow \mathbf{1}) \equiv \mathbf{1}$; 3- si $G \equiv \mathbf{1}$ et $H \equiv A$, $F = (G \Rightarrow H) \equiv (\mathbf{1} \Rightarrow A) \equiv A$; 4- si $G \equiv \mathbf{1}$ et $H \equiv \mathbf{1}$, $F = (G \Rightarrow H) \equiv (\mathbf{1} \Rightarrow \mathbf{1}) \equiv \mathbf{1}$. Dans tous les cas on a donc bien $F \equiv A$ ou $F \equiv \mathbf{1}$. On vérifie de même les cas $F = (G \wedge H)$ et $F = (G \vee H)$.

Ainsi, aucune formules composée avec le système $\{\mathbf{1}, \Rightarrow, \wedge, \vee\}$ n'est équivalente à $\neg A$ (ni d'ailleurs à $\mathbf{0}$). Ce système ne peut donc pas exprimer la négation et n'est pas complet.

On raisonne de la même façon avec les deux autres systèmes. Pour $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \wedge, \vee\}$ on peut prendre comme hypothèse d'induction $F[A] \equiv A$, $\mathbf{0}$ ou $\mathbf{1}$; il manque donc à nouveau la négation. Pour $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \neg, \Leftrightarrow\}$ on peut prendre comme hypothèse d'induction $F[A, B] \equiv A$, B, $\neg A$, $\neg B$, $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$, ou $F[B, A]$. En particulier ce système ne peut pas exprimer $\Rightarrow$ parce que $(A \Rightarrow B)$ ne vérifie pas l'hypothèse d'induction. Note : dans un devoir, on ne vous demandera probablement pas de vraie justification, juste “ce système ne peut pas exprimer la négation”.

***Exercice* 3 :**

a. On remarque que si $y = z$, $\phi(x,y,z)$ est déterminé par les formules $\phi(t,0,0) = 1$ et $\phi(t,1,1) = 0$. Sinon $y \neq z$, et $\phi(x,y,z)$ est déterminé par les deux autres formules (avec $\phi(x,y,z) = 1$ ssi $x = z$). Ainsi ϕ est entièrement déterminé par les formules de l'énoncé, il existe donc un unique connecteur qui les satisfait. (Si cela vous aide, vous pouvez écrire sa table de vérité)

b. En s'aidant éventuellement d'une table de vérité de ϕ, ou bien du raisonnement fourni en (a), on peut donner une FND de $\phi(x,y,z)$ comme $(\neg y \wedge \neg z) \vee (x \wedge \neg y \wedge z) \vee (\neg x \wedge \neg z)$.

d$\star$. Oui. On peut d'abord remarquer $\neg A \equiv \phi(A,A,A)$, ensuite $\mathbf{0} \equiv \phi(A,A,\neg A)$, enfin $A \vee B \equiv \phi(\neg A, \neg B, \mathbf{0})$. En composant tout ensemble on obtient :
$(A \vee B) \equiv \phi(\phi(A,A,A), \phi(B,B,B), \phi(A,A,\phi(A,A,A)))$.

e. Oui. Dans la question précédente on a recréé les connecteurs $\neg$ et $\vee$, qui forment un système de connecteurs complets.

***Exercice* 4 :**

$\Delta^{A_0} = \{0,1\}^P$ (toutes les distributions)

$\Delta^{A_1} = \{\delta \in \{0,1\}^P : \forall n, \delta(p_n) = 1\}$ (une seule distribution)

$\Delta^{A_2} = \{\delta \in \{0,1\}^P : \forall n, \delta(p_n) \geq \delta(p_{n+1})\}$ (une infinité de distributions)

$\star\Delta^{A_3} = \{\epsilon_0, \epsilon_{011}, \epsilon_{101}, \epsilon_{110} : \forall n, \epsilon_0(p_n) = 0; \epsilon_{011}(p_{3n}) = 0, \epsilon_{011}(p_{3n+1}) = 1, \epsilon_{011}(p_{3n+2}) = 1; \epsilon_{101}(p_{3n}) = 1, \epsilon_{101}(p_{3n+1}) = 0, \epsilon_{101}(p_{3n+2}) = 1; \epsilon_{110}(p_{3n}) = 1, \epsilon_{110}(p_{3n+1}) = 1, \epsilon_{110}(p_{3n+2}) = 0\}$ (quatre distributions)

$\Delta^{A_4} = \Delta^{A_1}$ (une distribution)

***Exercice* 5 :**

a. $A = \{p_{n+1} \Rightarrow p_n : n \in \mathbb{N}\}$

b. $A_m = A \cup \{p_n : n \leq m\}$

c$\star$. Soit B tel que $\{\delta_k : k \in \mathbb{N}^*\} \subset \Delta^B$. On va montrer $\delta_\infty \in \Delta^B$. Noter que cela suffit à démontrer ce que demande l'énoncé.

On raisonne par l'absurde. Supposons donc $\delta_\infty \notin \Delta^B$. Cela signifie qu'il existe une formule $F \in B$ telle que $\overline{\delta_\infty}(F) = 0$. Or cette formule F est finie (comme toute formule) : elle contient donc un ensemble fini de variables propositionnelle $p_{i_1}, \ldots, p_{i_k}$. Les valeurs de vérité des variables qui n'apparaissent pas dans F n'influent évidemment pas sur la valeur de vérité de F. En d'autres termes, toute distribution δ qui est d'accord avec δ_∞ sur $p_{i_1}, \ldots, p_{i_k}$ est également d'accord avec δ_∞ sur F (c'est-à-dire $\overline{\delta}(F) = 0$). En particulier, en prenant $m = \max\{i_j : j \leq k\}$, on a $\delta_{m+1}(p_{i_j}) = 1 = \delta_\infty(p_{i_j})$, donc $\overline{\delta_{m+1}}(F) = \overline{\delta_\infty}(F) = 0$. On en déduit $\delta_{m+1} \notin \Delta^B$. C'est une contradiction, puisqu'on a supposé $\{\delta_k : k \in \mathbb{N}^*\} \subset \Delta^B$.