**Université Paris 7** **4 octobre 2011**
**Licence Math-Info (L3)**
**TD de Logique (Brice Minaud)**

**Correction du TD 2**

***Exercice* 1 :**

(1) $\forall b \in B, \exists! a \in A, f(a) = b$
Autrement dit : $\forall b \in B, \exists a \in A, f(a) = b \wedge \forall c \in A, f(c) = b \Rightarrow c = a$

(2) On exprime le fait que $A$ est en bijection avec un entier (remarquer en effet que l'entier $n$ est un ensemble contenant justement $n$ éléments, ce qu'on peut montrer par récurrence).$\exists n \in \mathbb{N}, \exists f : n \to A, \forall a \in A, \exists! m \in n, f(m) = a$

(3) $\neg(\exists n \in \mathbb{N}, \exists g : n \to B, \forall b \in B, (\exists a \in A, f(a) = b) \Rightarrow (\exists m \in n, g(m) = b))$

***Exercice* 2 :**

(1) C'est vrai pour l'ensemble vide puisqu'il ne contient aucun élément (rappel, une proposition portant sur “tout élément de l'ensemble vide” est automatiquement vraie). Supposons maintenant que tout élément de $n$ est un entier. Soit $x$ un élément de $n^+ = n \cup \{n\}$ :

$$\begin{aligned} & x \in n \cup \{n\} \\ \Leftrightarrow & x \in n \vee x \in \{n\} \\ \Leftrightarrow & x \in n \vee x = n \end{aligned}$$

Dans le cas $x \in n$ on sait que $x$ est un entier par hypothèse de récurrence. Dans le cas $x = n$, $x$ est aussi un entier.

(2) On a $\bigcup \emptyset^+ = \bigcup\{\emptyset\} = \emptyset$ donc la propriété est vraie pour $\emptyset$. Supposons que $\bigcup n^+ = n$. On a :

$$\begin{aligned} \bigcup n^{++} &= \bigcup(n^+ \cup \{n^+\}) \\ &= (\bigcup n^+) \cup (\bigcup\{n\}) \\ &= n \cup n \\ &= n \subset n^+ \end{aligned}$$

(pour obtenir l'avant-dernière ligne on utilise l'hypothèse de récurrence)

(3) On fixe $m \in \mathbb{N}$, et on va faire un récurrence sur $\mathbb{N}$. La propriété qu'on veut montrer est : $m \in n \Rightarrow m \subset n$. C'est automatiquement vrai pour $n = \emptyset$ puisque $m \in \emptyset$ est automatiquement faux. Supponsons $m \in n \Rightarrow m \subset n$ pour un $n$ quelconque. On veut montrer $m \in n^+ \Rightarrow m \subset n^+$. D'abord si $m \notin n^+$, la propriété est vraie puisque le premier terme de l'implication est faux. On suppose donc $m \in n^+$. Alors $m \in n \cup \{n\}$ donc $m \in n$ ou $m = n$. Dans le premier cas, par hypothèse de récurrence, $m \subset n$ donc $m \subset n^+$. Dans le second cas $n \in n^+$ donc on a encore $m \in n^+$.

(4) On a $\emptyset \notin \emptyset$. Supposons $n \notin n$ pour la récurrence. Supposons $n^+ \in n^+$ par l'absurde. Alors comme précédemment $n^+ \in n$ ou $n^+ = n$. Le second cas est clairement faux puisque $n^+ = n \cup \{n\} \neq n$. Le premier cas dit $n \cup \{n\} \in n$, donc avec (3) on déduit $n \cup \{n\} \subset n$, donc en particulier $n \in n$, contradiction avec l'hypothèse de récurrence.

(5)-(6) On procède de la même façon que (3).

(7) On procède de la même façon que (4).

***Exercice* 3 :** (Correction rapide pour le (1)) On pose la fonction $H(n, k) : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ qui pour tout $n$ à $(n, 0)$ associe 1 et à $(n, 1)$ associe 0. Alors le théorème de définition par récurrence appliqué à $H$ avec $f(0) = 0$ comme valeur initiale donne la fonction souhaitée.

***Exercice* 4 :** Première manière (“par le haut”) : $A$ est l'intersection de tous les ensembles contenant $a$ et clos pour $R$.

Deuxième manière ("par le bas") : on définit $A_0 = \{a\}$ et $A_{n+1} = \{y : \exists x \in A_n, yRx\}$, et on prend $A = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n$.

***Exercice* 5 :** Seulement les trois mots suivants (noter que $P$ n'est pas une variable propositionnelle selon l'énoncé) : $((G \Leftrightarrow G) \Rightarrow G)$, $C$ et $\neg(A \wedge B)$.

***Exercice* 6 :** Pour comprendre le correction, réviser la définition des $F_n$ dans le cours. Noter tout d'abord que pour toute formule F on a $h[F] = \min\{n : F \in F_n\}$, donc en particulier on a toujours $F \in F_{h[F]}$.

Première partie :

(1) $G \in F_{h[G]}$ donc $\neg G \in F_{h[G]+1}$. Donc $h[G] + 1 \in \{n : \neg G \in F_n\}$. Donc $h[\neg G] = \min\{n : \neg G \in F_n\} \leq h[G] + 1$. (En effet si $x \in E$ alors $\min E \leq x$)

(2) $G \in F_{h[G]}$ et $H \in F_{h[H]}$. Posons $m = \max\{h[G], h[H]\}$. Alors $h[G] \leq m$ donc $F_{h[G]} \subset F_m$. De même $F_{h[H]} \subset F_m$. Donc en particulier $G \in F_m$ et $H \in F_m$. Donc $G\alpha H \in F_{m+1}$. Donc $h[G\alpha H] \leq m + 1$ par le même raisonnement qu'en (1).

Deuxième partie :

(1) Le théorème de lecture unique nous dit que la formule $\neg G$ ne peut être formée que comme la négation $\neg$ d'une unique formule $G$. En particulier, la formule $\neg G$ ne peut apparaître dans la hiérarchie des $F_n$ que comme la négation de la formule $G$ qui doit donc nécessairement appartenir à $F_{n-1}$. Ainsi : $\neg G \in F_n \Leftrightarrow G \in F_{n-1}$. Or $\neg G \in F_{h[\neg G]}$ donc $G \in F_{h[\neg G]-1}$, donc $h[G] \leq h[\neg G] - 1$, ce qu'on peut réécrire $h[\neg G] \geq h[G] + 1$. Or on a déjà démontré l'inégalité réciproque dans la première partie de l'exercice, donc $h[\neg G] = h[G] + 1$.

(2) Le théorème de lecture unique dit que la formule $(G\alpha H)$ ne peut être formée que comme la conjonction d'un unique couple de formules $(G, H)$ par l'opération $\alpha$. La formule $(G\alpha H)$ ne peut donc apparaître dans la hiérarchie des $F_n$ que comme conjonction des formules $G$ et $H$, qui sont donc nécessairement présentes dans $F_{n-1}$. On en déduit que $h[F] \leq n - 1$ et $h[G] \leq n - 1$, ce qu'on peut réécrire en une seule formule : $\max\{h[F], h[G]\} \leq n - 1$. Or $(G\alpha H) \in F_{h[(G\alpha H)]}$, donc on peut prendre $n = h[(G\alpha H)]$ dans le raisonnement qu'on vient de faire, et on obtient : $\max\{h[F], h[G]\} \leq h[(G\alpha H)] - 1$, ce qu'on peut réécrire : $h[(G\alpha H)] \geq \max\{h[F], h[G]\} + 1$. Or on a déjà démontré l'inégalité réciproque dans la première partie de l'exercice, donc finalement $h[(G\alpha H)] = \max\{h[F], h[G]\} + 1$.

***Exercice* 7 :** Le raisonnement est le même que dans l'exercice précédent.

***Exercice* 8 :** Le raisonnement est le même que dans l'exercice précédent.

***Exercice* 9 :** (Pour une question de place, la table est dessinée à 90° du sens habituel)

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $B$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $C$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $(A \Rightarrow B) \wedge A$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $(A \vee \neg C) \Leftrightarrow B$ | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $(A \Rightarrow B) \wedge (\neg B \vee A)$ | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $(\neg A \Rightarrow \neg B) \vee (\neg A \Leftrightarrow B)$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $((A \wedge B) \vee \neg C) \Rightarrow \neg(B \vee C)$ | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |

***Exercice* 10 :** Réponse : $\neg F \Rightarrow \neg F$, $F \Rightarrow (G \Rightarrow F)$, $F \Rightarrow (G \vee F)$, $F \vee \neg\neg(F \Rightarrow \neg F)$.