Correction Test 2-a

Exercice 1. *Combien y a-t-il d'injections d'un ensemble à* 10 *éléments dans un ensemble à* 5 *éléments ?*

Correction
Une application est injective si et seulement si elle n'envoie jamais deux éléments sur la même image. Si une application envoie 10 éléments sur seulement 5 images possibles il y a au moins deux éléments qui vont avoir la même image, donc la fonction ne peut pas être injective. Il y a 0 injection de 10 éléments dans 5.

Exercice 2. ***a***
On considère le polynôme $P = X^5 + X^3 - X^2 - 1$.
a. *Factoriser* P *dans* $\mathbb{C}[X]$. *Il peut être utile de remarquer que* i *est racine.*

Correction
On vérifie d'abord que i est bien racine :

$$P(i) = i^5 + i^3 - i^2 - 1 = i - i + 1 - 1 = 0$$

On constate que i est bien racine de P. De plus, comme P est un polynôme à coefficients réels, le conjugué de n'importe quelle racine est aussi racine (c'est le point crucial !), donc $\bar{i} = -i$ est aussi racine automatiquement.

On peut donc effectuer la division euclidienne de P par $(X - i)(X + i) = X^2 + 1$; on obtient :

$$P = (X^2 + 1)(X^3 - 1)$$

On trouve le polynôme $X^3 - 1$ des racines troisièmes de l'unité ; ses racines sont donc $e^{0*2i\pi/3} = 1$, $e^{2i\pi/3}$, et $e^{4i\pi/3} = e^{-2i\pi/3}$. On trouve ainsi :

$$P = (X - i)(X + i)(X - 1)(X - e^{2i\pi/3})(X - e^{-2i\pi/3})$$

Autre méthode : on peut aussi calculer les racines de $X^3 - 1$ en remarquant que 1 est racine, donc $X^3 - 1$ peut se factoriser par $X - 1$. On trouve :

$$X^3 - 1 = (X - 1)(X^2 + X + 1)$$

On retrouve alors les racines précédentes en calculant les deux racines de $X^2 + X + 1$ à l'aide du discriminant.

Exercice 2. ***b***
Factoriser P *dans* $\mathbb{R}[X]$.

Correction
Connaissant la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$, on la déduit dans $\mathbb{R}$ en groupant chaque racine complexe avec son conjugué (voir cours). Ainsi :

$$\begin{aligned} P &= (X - i)(X + i)(X - 1)(X - e^{2i\pi/3})(X - e^{-2i\pi/3}) \\ &= (X^2 + 1)(X - 1)(X^2 - (e^{2i\pi/3} + e^{-2i\pi/3})X + e^{2i\pi/3}e^{-2i\pi/3}) \\ &= (X^2 + 1)(X - 1)(X^2 + X + 1) \end{aligned}$$

Exercice 3. ***a***
Ecrire $(1-i)^n$ *sous forme polaire.*

Correction
On calcule le module et l'argument de $1-i$.

$$|1-i| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$$

donc si θ est l'argument cherché :

$$\begin{aligned} 1-i &= \sqrt{2}(\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= \sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}) \\ \theta &= -\pi/4 \end{aligned}$$

Ainsi-

$$\begin{aligned} (1-i)^n &= (\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}})^n \\ &= 2^{\frac{n}{2}}e^{-ni\frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

Exercice 3. ***b***
Développer $(1-i)^{4n}$ *à l'aide de la formule du binôme de Newton. On séparera la partie réelle et la partie imaginaire.*

Correction
On applique directement la formule :

$$(1-i)^{4n} = \sum_{k=0}^{4n} C_{4n}^k(-i)^k$$

On sépare les parties réelle et imaginaire en séparant k pair et impair :

$$\begin{aligned} (1-i)^{4n} &= \sum_{k=0}^{2n} C_{4n}^{2k}(-i)^{2k} + \sum_{k=0}^{2n-1} C_{4n}^{2k+1}(-i)^{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{2n} C_{4n}^{2k}((-i)^2)^k + \sum_{k=0}^{2n-1} C_{4n}^{2k+1}((-i)^2)^k(-i)^1 \\ &= \sum_{k=0}^{2n} C_{4n}^{2k}(-1)^k + i\sum_{k=0}^{2n-1} C_{4n}^{2k+1}(-1)^{k+1} \end{aligned}$$

Exercice 3. ***c***
En déduire la valeur de la somme suivante :

$$S(n) = \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k C_{4n}^{2k} = C_{4n}^0 - C_{4n}^2 + C_{4n}^4 - C_{4n}^6 + \cdots - C_{4n}^{4n-2} + C_{4n}^{4n}$$

Correction
On reconnait grâce à la question précédente que :

$$\begin{aligned} S(n) &= \mathcal{R}e((1-i)^{4n}) \\ &= \mathcal{R}e(2^{\frac{4n}{2}} e^{-4ni\frac{\pi}{4}}) \quad \text{cf. question a} \\ &= \mathcal{R}e(4^n(-1)^n) \\ &= (-4)^n \end{aligned}$$

Exercice 4. *a*
Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la matrice :

$$M(a) = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$$

***a**. Pour quelles valeurs de a la matrice $M(a)$ est-elle inversible ?*

Correction
Une matrice est inversible si et seulement si son détermiant est non nul. On calcule donc le déterminant de M. En développant suivant la première ligne par exemple on trouve :

$$\begin{aligned} det(M(a)) &= 1(1-a) - (-a)(a-1) \\ &= 1 - a + a^2 - a \qquad = a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2 \end{aligned}$$

La matrice $M(a)$ est donc inversible si et seulement si $a \neq 1$.

Exercice 4. *b*
Calculer l'inverse de $M(-1)$.

Correction
On applique la méthode du pivot de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 + L_1 \\ L_3 + L_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 - L_2/2 \\ L_2/2 \\ L_3/2 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 + L_3/2 \\ L_2 - L_3/2 \\ L_3 \end{array}$$

On trouve ainsi :

$$M(-1)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Exercice 5. ***a***
On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a. *Calculer* $A^3 - 2A$.

Correction
Un calcul correct donne :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

On trouve $A^3 - 2A = I_3$.

Exercice 5. ***b***
En déduire une expression de l'inverse de A à l'aide de puissances de A (c'est-à-dire I,A,A^2,A^3, *etc...).*

Correction

$$\begin{aligned} & I_3 = A^3 - 2A \\ \Leftrightarrow\ & I_3 A^{-1} = (A^3 - 2A)A^{-1} \\ \Leftrightarrow\ & A^{-1} = A^2 - 2I_3 \end{aligned}$$

Exercice 5. ***c***
En déduire l'inverse de A.

Correction
Avec la formule de la question précédente $A^{-1} = A^2 - 2I_3$, et le calcul de A^2 effetué dans la première question, on obtient :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Correction Test 2-b

Exercice 1. *Combien y a-t-il de surjections d'un ensemble à* 5 *éléments dans un ensemble à* 10 *éléments ?*

Correction

Une application est surjective si et seulement si chaque élément de l'ensemble d'arrivée a au moins une antécédent. Si une application n'envoie que 5 éléments sur 10 images possibles il y a au moins cinq images qui n'ont pas d'antécédent, donc la fonction ne peut pas être surjective. Il y a 0 surjection de 5 éléments dans 10.

Exercice 2. ***a***

On considère le polynôme $P = X^5 + X^3 + X^2 + 1$.

a. *Factoriser* P *dans* $\mathbb{C}[X]$. *Il peut être utile de remarquer que* i *est racine.*

Correction

On vérifie d'abord que i est bien racine :

$$P(i) = i^5 + i^3 + i^2 + 1 = i - i - 1 + 1 = 0$$

On constate que i est bien racine de P. De plus, comme P est un polynôme à coefficients réels, le conjugué de n'importe quelle racine est aussi racine (c'est le point crucial !), donc $\bar{i} = -i$ est aussi racine automatiquement.

On peut donc effectuer la division euclidienne de P par $(X - i)(X + i) = X^2 + 1$; on obtient :

$$P = (X^2 + 1)(X^3 + 1)$$

Pour trouver les racinees de $X^3 + 1$, on peut résoudre l'équation $z^3 = -1$; on trouve trois solutions : $-1 \cdot e^{0*2i\pi/3} = -1$, $-1 \cdot e^{2i\pi/3} = e^{-i\pi/3}$, et $-1 \cdot e^{4i\pi/3} = e^{i\pi/3}$. On en déduit :

$$P = (X - i)(X + i)(X + 1)(X - e^{i\pi/3})(X - e^{-i\pi/3})$$

Autre méthode : on peut aussi calculer les racines de $X^3 + 1$ en remarquant que -1 est racine, donc $X^3 + 1$ peut se factoriser par $X + 1$. On trouve :

$$X^3 + 1 = (X + 1)(X^2 - X + 1)$$

On retrouve alors les racines précédentes en calculant les deux racines de $X^2 - X + 1$ à l'aide du discriminant.

Exercice 2. ***b***

Factoriser P *dans* $\mathbb{R}[X]$.

Correction

Connaissant la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$, on la déduit dans $\mathbb{R}$ en groupant chaque racine complexe avec son conjugué (voir cours). Ainsi :

$$\begin{aligned} P &= (X - i)(X + i)(X + 1)(X - e^{i\pi/3})(X - e^{-i\pi/3}) \\ &= (X^2 + 1)(X + 1)(X^2 - (e^{i\pi/3} + e^{-i\pi/3})X + e^{i\pi/3}e^{-i\pi/3}) \\ &= (X^2 + 1)(X + 1)(X^2 - X + 1) \end{aligned}$$

Exercice 3. ***a***
Ecrire $(1+i)^n$ sous forme polaire.

Correction
On calcule le module et l'argument de $1+i$.

$$|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$

donc si θ est l'argument cherché :

$$\begin{aligned} 1+i &= \sqrt{2}(\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= \sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}) \\ \theta &= \pi/4 \end{aligned}$$

Ainsi-

$$\begin{aligned} (1+i)^n &= (\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^n \\ &= 2^{\frac{n}{2}}e^{ni\frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

Exercice 3. ***b***
Développer $(1+i)^{4n}$ à l'aide de la formule du binôme de Newton. On séparera la partie réelle et la partie imaginaire.

Correction
On applique directement la formule :

$$(1+i)^{4n} = \sum_{k=0}^{4n} C_{4n}^k i^k$$

On sépare les parties réelle et imaginaire en séparant k pair et impair :

$$\begin{aligned} (1+i)^{4n} &= \sum_{k=0}^{2n} C_{4n}^{2k} i^{2k} + \sum_{k=0}^{2n-1} C_{4n}^{2k+1} i^{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{2n} C_{4n}^{2k} (i^2)^k + \sum_{k=0}^{2n-1} C_{4n}^{2k+1} (i^2)^k i^1 \\ &= \sum_{k=0}^{2n} C_{4n}^{2k} (-1)^k + i \sum_{k=0}^{2n-1} C_{4n}^{2k+1} (-1)^k \end{aligned}$$

Exercice 3. ***c***
En déduire la valeur de la somme suivante :

$$S(n) = \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k C_{4n}^{2k+1} = C_{4n}^1 - C_{4n}^3 + C_{4n}^5 - C_{4n}^7 + C_{4n}^9 - \cdots + C_{4n}^{4n-3} - C_{4n}^{4n-1}$$

Correction
On reconnait grâce à la question précédente que :

$$\begin{aligned}S(n) &= \mathcal{I}m((1+i)^{4n}) \\ &= \mathcal{I}m(2^{\frac{4n}{2}}e^{-4ni\frac{\pi}{4}}) \quad \text{cf. question a} \\ &= \mathcal{I}m(4^n(-1)^n) \\ &= 0\end{aligned}$$

Exercice 4. *a*
Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la matrice :

$$M(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ -a & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a. *Pour quelles valeurs de a la matrice $M(a)$ est-elle inversible ?*

Correction
Une matrice est inversible si et seulement si son détermiant est non nul. On calcule donc le déterminant de M. En développant suivant la première colonne par exemple on trouve :

$$\begin{aligned}det(M(a)) &= 1(1-a) - (-a)(a-1) \\ &= 1 - a + a^2 - a \qquad = a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2\end{aligned}$$

La matrice $M(a)$ est donc inversible si et seulement si $a \neq 1$.

Exercice 4. *b*
Calculer l'inverse de $M(-1)$.

Correction
On applique la méthode du pivot de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 - L_1 \\ L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 + L_2/2 \\ L_2/2 \\ L_3 - L_2/2 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 + L_3/2 \\ L_3/2 \end{array}$$

On trouve ainsi :

$$M(-1)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Exercice 5. ***a***
On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a. *Calculer $A^3 - 2A$.*

Correction
Un calcul correct donne :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

On trouve $A^3 - 2A = I_3$.

Exercice 5. ***b***
En déduire une expression de l'inverse de A à l'aide de puissances de A (c'est-à-dire I,A,A^2,A^3, etc...).

Correction

$$\begin{aligned} & I_3 = A^3 - 2A \\ \Leftrightarrow\ & I_3A^{-1} = (A^3 - 2A)A^{-1} \\ \Leftrightarrow\ & A^{-1} = A^2 - 2I_3 \end{aligned}$$

Exercice 5. ***c***
En déduire l'inverse de A.

Correction
Avec la formule de la question précédente $A^{-1} = A^2 - 2I_3$, et le calcul de A^2 effetué dans la première question, on obtient :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$