Correction Test 1

Exercice 1. ***a***

a. Soit $f : E \to F$ une application. Rappeler la définition de la surjectivité de f.

b. Donner un exemple d'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ surjective.

Correction

a. L'application $f : E \to F$ est surjective si et seulement si tout élément de F a au moins un antécédent par f.

b. Par exemple, $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ telle que $z \mapsto \mathrm{Re}(z)$ est surjective car tout réel x a au moins pour antécédent lui-même.

Exercice 1. ***b***

a. Soit $f : E \to F$ une application. Rappeler la définition de l'injectivité de f.

b. Donner un exemple d'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ injective.

Correction

a. L'application $f : E \to F$ est injective si et seulement si tout élément de F a au plus un antécédent par f.

b. Par exemple, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telle que $x \mapsto x$ est injective car pour tous réels x et x', $f(x) = f(x') \;\Rightarrow\; x = x'$ par définition de f.

Exercice 2. ***a***

Donner sous forme polaire les racines troisièmes dans $\mathbb{C}$ de : $Z = (\sqrt{2}-\sqrt{2}i)(-2\sqrt{3}+2i)$.

Correction

On écrit d'abord Z sous forme polaire. Pour cela, on calcule la forme polaire de chaque facteur :

$$\left|\sqrt{2} - \sqrt{2}i\right| = \sqrt{4} = 2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}(\sqrt{2} - \sqrt{2}i) = e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

$$\left|-2\sqrt{3} + 2i\right| = \sqrt{4.3 + 4} = \sqrt{16} = 4 \quad \text{et} \quad \frac{1}{4}(-2\sqrt{3} + 2i) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,i = e^{i\frac{5\pi}{6}}.$$

On en déduit que $Z = 8\,e^{i\frac{7\pi}{12}}$. On remarque que $8^{\frac{1}{3}} = (2^3)^{\frac{1}{3}} = 2$.

Les racines troisièmes de Z sont donc :

$z_0 = 2\,e^{i\frac{7\pi}{36}}$,

$z_1 = 2\,e^{i(\frac{7\pi}{36}+\frac{2\pi}{3})} = 2\,e^{i\frac{31\pi}{36}}$,

$z_2 = 2\,e^{i(\frac{7\pi}{36}+\frac{4\pi}{3})} = 2\,e^{i\frac{55\pi}{36}}$.

Exercice 2. ***b***

Donner sous forme polaire les racines quatrièmes dans $\mathbb{C}$ de : $Z = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}i}{\frac{1}{2}+\frac{i}{2}}$.

Correction
On écrit d'abord Z sous forme polaire. Pour cela, on calcule la forme polaire du numérateur et du dénominateur :
$\left|\sqrt{2}-\sqrt{6}i\right| = \sqrt{2+6} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ et $\frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{2}-\sqrt{6}i) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i = e^{-i\frac{\pi}{3}}$.
$\left|\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\right| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\sqrt{2}\,(\frac{1}{2}+\frac{i}{2}) = e^{i\frac{\pi}{4}}$.

On en déduit que $Z = \dfrac{2\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{3}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}\,e^{i\frac{\pi}{4}}} = 4\,e^{-i\frac{7\pi}{12}}$. On remarque que $(4)^{\frac{1}{4}} = (2)^{\frac{2}{4}} = \sqrt{2}$.

Les racines quatrièmes de Z sont donc :
$z_0 = \sqrt{2}\,e^{-i\frac{7\pi}{48}}$,
$z_1 = \sqrt{2}\,e^{i(-\frac{7\pi}{48}+\frac{\pi}{2})} = \sqrt{2}\,e^{i\frac{17\pi}{48}}$,
$z_2 = \sqrt{2}\,e^{i(-\frac{7\pi}{48}+\pi)} = \sqrt{2}\,e^{i\frac{41\pi}{48}}$.
$z_3 = \sqrt{2}\,e^{i(-\frac{7\pi}{48}+\frac{3\pi}{2})} = \sqrt{2}\,e^{i\frac{65\pi}{48}}$.

Exercice 3. ***a***
On considère le polynôme : $P(X) = X^4 + 2X^3 + X^2 + 12X + 20$.

a. *Montrer que -2 est une racine de P. Donner son ordre de multiplicité.*
b. *Trouver toutes les racines complexes de $P(X)$.*
c. *Factoriser $P(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$.*

Correction

a. $P(-2) = 2^4 - 2.2^3 + 4 - 24 + 20 = 0$ donc -2 est racine de P.

   Le polynôme dérivé de P est $P'(X) = 4X^3 + 6X^2 + 2X + 12$.
   $P'(-2) = -4.8 + 6.4 - 4 + 12 = -32 + 24 + 8 = 0$ donc l'ordre de multiplicité de -2 est au moins 2.

   Le polynôme dérivé seconde de P est $P''(X) = 12X^2 + 12X + 2 = 2(6X^2 + 6X + 1)$.
   $P''(-2) = 2(24 - 12 + 1) \neq 0$ donc l'ordre de multiplicité de -2 est exactement 2.

b. -2 est une racine double de P donc le polynôme $(X+2)^2 = X^2 + 4X + 4$ divise P.
   On calcule le quotient Q de la division euclidienne de P par $(X+2)^2$.

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
 & X^4 & +2X^3 & +X^2 & +12X & +20 & X^2+4X+4 \\
\ominus & X^4 & +4X^3 & +4X^2 & & & \\
\hline
 & & -2X^3 & -3X^2 & +12X & & Q(X) = X^2 - 2X + 5 \\
 & \ominus & -2X^3 & -8X^2 & -8X & & \\
\hline
 & & & 5X^2 & +20X & +20 & \\
 & & \ominus & 5X^2 & +20X & +20 & \\
\hline
 & & & & & 0 &
\end{array}
$$

   On en déduit que $P = (X+2)^2\,(X^2 - 2X + 5)$.

Q a pour discriminant $\Delta = 4 - 20 = -16$, dont les racines carrées sont $4i$ et $-4i$, donc Q a pour racines $\dfrac{2+4i}{2} = 1 + 2i$ et $\dfrac{2-4i}{2} = 1 - 2i$.

Conclusion : les racines complexes de P sont :
-2 (racine double), $1 + 2i$ et $1 - 2i$ (racines simples).

c. On a vu en 2. que $P = (X+2)^2\,(X^2 - 2X + 5)$.

$X + 2$ est irréductible car de degré 1.
$X^2 - 2X + 5$ est de degré 2 et n'a pas de racines réelles ($\Delta < 0$), il est donc également irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.
Donc ceci est la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 3. ***b***
On considère le polynôme : $P(X) = X^4 - 7X^2 - 4X + 20$.

a. *Montrer que 2 est une racine de P. Donner son ordre de multiplicité.*

b. *Trouver toutes les racines complexes de $P(X)$.*

c. *Factoriser $P(X)$ dans $\mathbb{C}[X]$.*

Correction

a. $P(2) = 16 - 28 - 8 + 20 = 0$ donc 2 est racine de P.
Le polynôme dérivé de P est $P'(X) = 4X^3 - 14X - 4 = 2(2X^3 - 7X - 2)$.
$P'(2) = 2(16 - 14 - 2) = 0$ donc l'ordre de multiplicité de 2 est au moins 2.
Le polynôme dérivé seconde de P est $P''(X) = 2(6X^2 - 7)$. $P''(2) = 2(24 - 7) \neq 0$ donc l'ordre de multiplicité de 2 est exactement 2.

b. 2 est une racine double de P donc le polynôme $(X-2)^2 = X^2 - 4X + 4$ divise P.
On calcule le quotient Q de la division euclidienne de P par $(X-2)^2$.

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
 & X^4 & & -7X^2 & -4X & +20 & X^2 - 4X + 4 \\
\ominus & X^4 & -4X^3 & +4X^2 & & & \\
\cline{2-4}\cline{7-7}
 & & +4X^3 & -11X^2 & -4X & & Q(X) = X^2 + 4X + 5 \\
 & \ominus & +4X^3 & -16X^2 & +16X & & \\
\cline{3-5}
 & & & 5X^2 & -20X & +20 & \\
 & & \ominus & 5X^2 & -20X & +20 & \\
\cline{4-6}
 & & & & & 0 &
\end{array}$$

On en déduit que $P = (X-2)^2\,(X^2 + 4X + 5)$.

Q a pour discriminant $\Delta = 16 - 20 = -4$, dont les racines carrées sont $2i$ et $-2i$, donc Q a pour racines $\dfrac{-4+2i}{2} = -2 + i$ et $\dfrac{-4-2i}{2} = -2 - i$.

Conclusion : les racines complexes de P sont :
2 (racine double), $-2 + i$ et $-2 - i$ (racines simples).

c. On a vu en 2. que $P = (X-2)^2\,(X^2+4X+5)$.
$X-2$ est irréductible car de degré 1.
X^2+4X+5 est de degré 2 et n'a pas de racines réelles ($\Delta < 0$), il est donc également irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.
Donc ceci est la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 4. *a*
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2 + (3+2i)z + 5 + 5i = 0$$

Vous donnerez les solutions sous forme algébrique.

Indication : $289 = 17^2$.

Correction

Cette équation du second degré a pour discriminant
$\Delta = (3+2i)^2 - 4(5+5i) = 9 - 4 + 12i - 20 - 20i = -15 - 8i$.

Calculons les racines carrées de Δ.
Soit x et y réels, on a les équivalences :

$$(x+iy)^2 = -15-8i \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2 - y^2 = -15 \\ 2xy = -8 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{15^2+8^2} = \sqrt{289} = 17 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x^2 = 2 \\ 2y^2 = 32 \\ xy = -4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2 = 1 \\ y^2 = 16 \\ xy = -4 \end{array}\right.$$

Les racines carrées de Δ sont donc $1-4i$ et $-1+4i$.

On en déduit que les solutions de l'équation sont

$$z_1 = \frac{-(3+2i)+1-4i}{2} = \frac{-2-6i}{2} = -1-3i \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-(3+2i)-1+4i}{2} = \frac{-4+2i}{2} = -2+i.$$

Exercice 4. *b*
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2 + (2+i)z + 2 + 4i = 0.$$

Vous donnerez les solutions sous forme algébrique.

Indication : $169 = 13^2$.

Correction

Cette équation du second degré a pour discriminant
$\Delta = (2+i)^2 - 4(2+4i) = 4 - 1 + 4i - 8 - 16i = -5 - 12i$.

Calculons les racines carrées de Δ.
Soit x et y réels, on a les équivalences :

$$(x+iy)^2=-5-12i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=-5 \\ 2xy=-12 \\ x^2+y^2=\sqrt{5^2+12^2}=\sqrt{169}=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2=8 \\ 2y^2=18 \\ xy=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=4 \\ y^2=9 \\ xy=-6 \end{cases}$$

Les racines carrées de Δ sont donc $2-3i$ et $-2+3i$.

On en déduit que les solutions de l'équation sont

$$z_1=\frac{-(2+i)+2-3i}{2}=\frac{-4i}{2}=-2i \quad \text{et} \quad z_2=\frac{-(2+i)-2+3i}{2}=\frac{-4+2i}{2}=-2+i.$$