

Partiel MS1 du 22 Novembre 2008

Le sujet contient 2 pages.

Les documents, calculatrices et portables en service ne sont pas autorisés.

Exercice 1

Soit le nombre complexe $z_0 = \frac{\sqrt{3} + i}{2}$.

- 1) Calculer de manière algébrique les racines carrées de z_0 (écrire le résultat avec des racines carrées).
- 2) Calculer de manière polaire les racines carrées de z_0 puis déduire de la question 1 une expression exacte de $\cos(\frac{\pi}{12})$.
- 3) Soit a un réel quelconque, calculer $\cos(3a)$ en fonction uniquement de $\cos(a)$.

Exercice 2

Soit le polynôme $P = X^4 - 3X^3 + (1 - i)X^2 + 4iX + 4 - 4i$

- 1) Vérifier que 2 est une racine de P et donner son ordre de multiplicité.
- 2) Donner toutes les racines complexes du polynôme P .
- 3) Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 3

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on définit la matrice M_a par

$$M_a = \begin{pmatrix} -1 & -3 + a & -1 \\ -1 & a & -1 + 2a \\ 2 & 1 & 1 + a \end{pmatrix}$$

- 1) Déterminer pour quelles valeurs de a la matrice M_a est inversible.
- 2) Dans cette question $a = 3$. On considère le système S d'inconnues x, y et z suivant

$$M_3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \\ -1 \end{pmatrix}$$

D'après la question 1 et sans faire de calcul, que peut-on dire de l'ensemble des solutions de S ?

Puis résoudre le système S et exprimer géométriquement l'ensemble des solutions.

Exercice 4

Soit f l'application linéaire de \mathbb{R}^3 vers \mathbb{R}^3 définie par :

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto (2x - 3y - z, 2x - y - 3z, 2x - 4y) \end{aligned}$$

- 1) On note \mathcal{B}_0 la base canonique de \mathbb{R}^3 . Déterminer la matrice $A = \text{Mat}(f, \mathcal{B}_0, \mathcal{B}_0)$.
- 2) Donner une base du noyau de f . f est-elle injective ?
- 3) En déduire la dimension de $\text{Im}(f)$. f est-elle surjective ?
- 4) Donner une équation de $\text{Im}(f)$.
- 5) Montrer que les vecteurs suivants forment une base de \mathbb{R}^3 :

$$v_1 = (1, -1, 2) \quad v_2 = (1, 1, 1) \quad v_3 = (2, 1, 1)$$

- 6) Vérifier si les vecteurs v_1, v_2 et v_3 appartiennent à $\text{Ker}(f)$ ou à $\text{Im}(f)$.
- 7) Calculer $f(v_1), f(v_2)$ et $f(v_3)$ et exprimer ces vecteurs en fonction de v_1, v_2 et v_3 .
- 8) On note \mathcal{B} la base (v_1, v_2, v_3) de \mathbb{R}^3 . Déterminer la matrice $A' = \text{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B})$.
Quelle propriété particulière possède la matrice A' ?