Feuille de TD n°7

Suites réelles

Exercice 1 Montrer, en utilisant seulement la définition de la limite, que la suite $\frac{n}{n+2}$ tend vers 1 si n tend vers $+\infty$.

Exercice 2 Soit (u_n) une suite réelle. À partir de la définition de limite, montrer que si la suite de terme général nu_n tend vers 1, alors la suite (u_n) tend vers 0.

Exercice 3
Etudier les limites des suites suivantes (autrement dit, calculer la limite, si elle existe ; sinon, montrer qu'elle n'existe pas).

$a_n = 2^n - 3^n \ (n \geq 0)$; $b_n = \dfrac{2n^2+1}{n^2+3n+1} \ (n \geq 0)$; $c_n = \dfrac{n^3+2^n}{3^n} \ (n \geq 0)$;

$d_n = \dfrac{1}{n} + (-1)^n \ (n \geq 1)$; $e_n = \sqrt{n} + (-1)^n \ (n \geq 0)$; $f_n = \dfrac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n} \ (n \geq 0)$;

$g_n = \dfrac{n^2 + (-1)^n}{n^3} \ (n \geq 1)$; $h_n = \dfrac{n}{2} \sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right) \ (n \geq 0)$; $u_n = \dfrac{2-(-1)^n}{n + \cos n} \ (n \geq 0)$;

$v_n = \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2} \ (n \geq 1)$; $w_n = \cos\left(\dfrac{2^n}{n!}\right) \ (n \geq 0)$.

On étudiera éventuellement si la suite est croissante, décroissante, bornée.

Exercice 4
Même exercice.

$a_n = \sqrt{n^3+2n} - \sqrt{n^4-2}$; $b_n = \dfrac{e^n \sin(n\pi)}{n} \ (n \geq 0)$; $c_n = n^{\frac{1}{n}} \ (n \geq 1)$;

$d_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+1} \ (n \geq 0)$; $e_n = \dfrac{1}{1^1} + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^n} \ (n \geq 1)$; $f_n = n - \ln(n!) \ (n \geq 1)$.

Exercice 5
Considérons la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = 1^{-1/2} + 2^{-1/2} + ... + n^{-1/2}$.

Démontrer qu'on a $u_n \geq \sqrt{n}$ pour tout n entier ≥ 1. En déduire la limite de la suite.

Exercice 6
Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $\quad u_n = \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + ... + \dfrac{1}{n!} \quad$ et $\quad v_n = u_n + \dfrac{1}{n\,n!}$.

Démontrer que les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes. En déduire la convergence de $(u_n)_{n\geq 1}$. Trouver une approximation de la limite e de $(u_n)_{n\geq 1}$ à 10^{-2} près.

Exercice 7
Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = a$ et $u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2$, quel que soit $n \in \mathbb{N}$.
a) Etudier la fonction $f(x) = x^2 - 2x + 2$.
b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est monotone.
c) Discuter suivant a l'existence et la valeur de $\lim u_n$.

Exercice 8
On définit la suite (u_n) par : $u_0 = a \geq 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.

a) Montrer qu'il exise une et une seule valeur de a pour laquelle cette suite est constante. On nomme cette valeur c.
b) En discutant suivant les valeurs de a par rapport à c, montrer que la suite (u_n) est monotone et bornée.
c) Que peut-on déduire des questions précédentes sur l'existence, et, le cas échéant, la valeur de la limite de (u_n) ?

Exercice 9
On considère la suite (u_n) déterminée par : $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$.

a) Etudier la fonction $f : x \mapsto 1 + \dfrac{1}{x}$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est défini et $\dfrac{3}{2} \leq u_n \leq 2$.
b) Montrer que : $\forall\, n \geq 1 \quad |u_{n+1} - u_n| \leq \dfrac{4}{9}\,|u_n - u_{n-1}|$.
c) Montrer que la fonction $f \circ f$ est croissante sur l'intervalle $]0, +\infty[$; en déduire que les suites $(u_{2p})_{p\geq 0}$ et $(u_{2p+1})_{p\geq 0}$ sont adjacentes ; calculer leur limite commune r.
d) Montrer qu'on a : $\forall\, n \geq 1 \quad |u_{n+1} - r| \leq \dfrac{4}{9}\,|u_n - r|$; quelle valeur suffit-il de donner à l'entier n pour avoir $|u_n - r| \leq \dfrac{1}{1000}$?

Exercice 10 Soit (u_n) une suite réelle monotone. On suppose qu'il existe une suite extraite de u_n convergeante. Montrer que u_n converge.

Exercice 11
Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses ? Justifiez votre réponse soit en démontrant la proposition à l'aide des théorèmes du cours, soit en produisant un contre-exemple.

a) Soit (u_n) une suite réelle. Si la suite (u_n^2) converge alors la suite (u_n) converge également.
b) Soit (u_n) une suite réelle. Si la suite $(cos(u_n))$ a pour limite 1 alors la suite $(sin(u_n))$ est convergente.
c) Soit (u_n) une suite réelle strictement positive qui converge vers 0. Il existe un entier q tel que $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout entier $n \geq q$.
d) Soit (u_n) une suite convergente. $u_{n+1} - u_n$ tend vers 0.
e) Soit (u_n) une suite réelle strictement positive et convergente. Alors u_{n+1}/u_n tend vers 1.
f) Soit (u_n) une suite réelle strictement positive. Si u_{n+1}/u_n tend vers $3/4$ alors u_n tend vers 0.