Test 3 - Correction

Exercice 1. *Soit $a > 1$. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = 1+\ln u_n$.*

a. *Écrire le développement de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 (c'est-à-dire qu'il y a deux termes dans la formule, plus le reste) au point 1 de la fonction $x \mapsto 1 + \ln x$.*

▷ Le développement sécrit :

$$1 + \ln x = 1 + (x-1) - \frac{1}{2c^2}(x-1)^2 = x - \frac{1}{2c^2}(x-1)^2, \quad c \in]1, x[\cup]x, 1[$$

b. *En déduire que pour tout $x > 0$, $1 + \ln x \leq x$.*

▷ Le terme $-\frac{1}{2c^2}(x-1)^2$ dans l'équation précédente est nécéssairement négatif, donc $1 + \ln x \leq x$.

c. *À l'aide de la question précédente, montrer que la suite (u_n) est décroissante.*

▷ On calcule $u_{n+1} - u_n = 1 + \ln u_n - u_n \leq 0$ car on a vu dans la question précédente que $1 + \ln x \leq x$.

d. *Montrer que (u_n) est minorée par 1 (on peut faire une récurrence).*

▷ Montrons par récurrence $\forall n \geq 0, u_n > 1$. On observe que $u_0 = a > 1$. Supposons maintenant $u_n > 1$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors $\ln u_n > 0$, donc $u_{n+1} = 1 + \ln u_n > 1$. Ainsi par récurrence $u_n > 1$ pour tout $n \geq 0$.

e. *Montrer que (u_n) converge et trouver sa limite ($x \mapsto 1 + \ln x$ est continue...).*

▷ La suite (u_n) est décroissante et minorée, donc elle converge. D'autre part $u_{n+1} = 1 + \ln u_n$, et la fonction $x \mapsto 1 + \ln x$ est continue, donc la limite l de la suite doit vérifier $1 + \ln l = l$. Il y a deux manières de déduire l.

1) On peut faire une étude de la fonction $f : x \mapsto 1 + \ln x - x$ pour trouver les x où elle s'annulle. La dérivée $f' : x \mapsto \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$ est strictement positive sur $]0, 1[$, strictement négative sur $]1, +\infty[$, or $f(1) = 0$, donc c'est la seule solution.
2) À la question *a)* on a trouvé $1 + \ln x = x - \frac{1}{2c^2}(x-1)^2$, donc la seule solution pour avoir $1 + \ln x = x$ est que $-\frac{1}{2c^2}(x-1)^2 = 0$, donc $x = 1$.

Il y a donc une unique solution à l'équation $1 + \ln l = l$, et c'est $l = 1$. La suite (u_n) converge donc vers 1 quel que soit a.

Exercice 2.
Soit la fonction f définie par $f(x) = e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}$ pour $x > 0$ et $f(0) = 0$.

a. *Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.*

▷ La fonction f est composée de fonctions continues sur R_+^* donc elle est continue sur R_+^*. Montrons qu'elle est continue en 0 :

$$\lim_{x \to 0} e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}} = 0 = f(0)$$

Ainsi la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

b. *Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et calculer sa dérivée.*

▷ La fonction f est composée de fonctions dérivables sur R_+^* donc elle est dérivable sur R_+^*. Sa dérivée vaut $f'(x) = \frac{1}{2x^{3/2}} e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}$ pour $x > 0$.

c. *Montrer que f est dérivable aussi en 0.*

▷ Le plus simple est de calculer directement la dérivée en 0 en revenant à la définition :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^2} = 0$$

En posant $t = \sqrt{x}$. Ainsi f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

Exercice 3.
Calculer les limites suivantes :

$$a) \lim_{x\to+\infty} \frac{5^x - x^5}{4^x - x^4} \qquad b) \lim_{n\to+\infty} \frac{(-n)^n}{n^2} \qquad c) \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \qquad d) \lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 2^3}{x - 2}$$

▷ a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{5^x - x^5}{4^x - x^4} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{5}{4}\right)^x \frac{1 - \frac{x^5}{5^x}}{1 - \frac{x^4}{4^x}} = +\infty$

▷ b) On observe $u_n = \dfrac{(-n)^n}{n^2} = (-1)^n n^{n-2}$, donc $u_{2n} = (2n)^{2n-2} \to +\infty$ tandis que $u_{2n+1} = -(2n+1)^{2n-1} \to -\infty$. Il n'y a donc pas de limite.

▷ c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln x}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln(\sqrt{x}^2)}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{2\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+\infty} e^{2\frac{\ln t}{t}} = 1$, en posant $t = \sqrt{x}$.

▷ d) Deux méthodes :

1) En faisant la division euclidienne on trouve $X^3 - 2^3 = (X-2)(X^2+2X+4)$ donc :

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 2^3}{x - 2} = \lim_{x\to 2} x^2 + 2x + 4 = 12$$

2) On observe que la limite donnée est exactement la définition de la dérivée de la fonction $x \mapsto x^3$ au point 2. Sa valeur est donc $(x \mapsto x^3)'(2) = 3 \cdot 2^2 = 12$.

Exercice 4. Soit :

$$S_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

a. *À l'aide du théorème des accroissements finis, montrer pour tout $x > 0$:*

$$\frac{1}{(x+1)^2} \le \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \le \frac{1}{x^2}$$

▷ On applique le théorème des accroissements finis à la fonction $x \mapsto 1/x$ entre x et $x+1$ (avec $x > 0$) :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} = -\frac{1}{c^2}(x+1-x), \qquad c \in]x, x+1[\\
&\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{c^2}
\end{aligned}$$

Comme $x \leq c \leq x+1$, on a $\frac{1}{(x+1)^2} \leq \frac{1}{c^2} \leq \frac{1}{x^2}$, donc :

$$\frac{1}{(x+1)^2} \leq \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{x^2}$$

b. *En déduire que pour* $x > 1$: $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1} \leq \dfrac{1}{x^2} \leq \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x}$.

▷ On a déjà montré $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{x^2}$ dans la question précédente. Toujours dans la question précédente, on a aussi montré

$$\frac{1}{(x+1)^2} \leq \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

En posant $y = x+1$, cette équation devient :

$$\frac{1}{y^2} \leq \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y}$$

Comme $x > 0$, on a bien $y > 1$, donc on vient de montrer la partie droite de l'ingalité demandée. Ainsi :

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}$$

c. *En déduire l'inégalité :* $1 - \dfrac{1}{n+1} \leq S_n \leq 2 - \dfrac{1}{n}$.

▷ On applique le résultat de la question précédente :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2} \\
&\geq \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

Le principe est le même pour la deuxième moitié de l'inégalité :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2} \\
&= 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{n^2} \\
&\leq 1 + \sum_{k=2}^{n} (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) \\
&= 1 + (\frac{1}{1} - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \cdots + (\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1}) + (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) \\
&= 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Finalement on obtient bien :

$$1 - \frac{1}{n+1} \leq S_n \leq 2 - \frac{1}{n}$$

d. *Montrer que la suite (S_n) converge.*
▷ On a vu dans la question précédente : $S_n \leq 2 - \frac{1}{n}$, donc en particulier (S_n) est majorée par 2. D'autre part la suite est croissante puisque $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$. En conclusion, la suite (S_n) est croissante et majorée, donc elle converge.

Exercice 5. (quand vous avez fini le reste)
Le père Noël a aime boire son eau et son whisky purs. Il a un verre E de 20ml d'eau, et un verre W de 20ml de whisky sur sa table. Sans faire exprès un de ses cerfs renverse 5ml de son verre d'eau dans son verre de whisky, et les deux liquides se mélangent complètement. Pour que ca ne se voie pas trop, le cerf reverse 5ml du mélange whisky-eau dans le verre d'eau. Finalement, lequel des deux verres contient le liquide le plus pur ? Autrement dit, est-ce qu'il y a plus d'eau dans le whisky ou plus de whisky dans l'eau ? Ou bien est-ce égal ?

▷ En fait il y a autant de whisky dans l'eau que d'eau dans le whisky. En effet, s'il y a mettons $x\%$ d'eau dans le whisky, comme il y a 20ml d'eau en tout, et 20ml de liquide dans chaque verre, il y a nécécessairement $(100 - x)\%$ d'eau dans le verre d'eau, donc il y a $x\%$ de whisky dans l'eau.

Ce qui est rigolo c'est qu'on peut aussi faire beaucoup de calculs avant de trouver le résultat. Soit dit en passant, on peut remarquer que le résultat ne dépend pas, en fait, des mélanges qui ont été faits. La seule donnée qu'on utilise, c'est qu'il y a la même quantité de liquide dans chaque verre, au départ et à l'arrivée.