Université Paris 7 - Denis Diderot
Licence Physique, Dominante Physique, L1

Cours de Mathématiques
Année 2008-2009, 1^{er} semestre

Feuille de TD n°7 - Correction

Suites réelles

Exercice 2
Écrire $n \cdot u_n \to 1$, cela signifie que pour chaque $\epsilon > 0$, il existe n_0 à partir duquel $|n \cdot u_n - 1| < \epsilon$. On peut donc prendre par exemple $\epsilon = 1$; et il existe n_0 tel que :

$$\begin{aligned} &\forall n \geq n_0, \quad |n \cdot u_n - 1| < 1 \\ \Leftrightarrow\ &\forall n \geq n_0, \quad 1 - 1 = 0 < n \cdot u_n < 1 + 1 = 2 \\ \Leftrightarrow\ &\forall n \geq n_0, \quad \frac{0}{n} = 0 < u_n < \frac{2}{n} \end{aligned}$$

On voit donc qu'à partir d'un certain rang, la suite (u_n) est coincée entre les suites (0) et $(2/n)$ qui tend aussi vers 0, donc le théorème des gendarmes permet de conclure que (u_n) tend vers 0 (on rappelle qu'une suite converge vers une limite si et seulement si elle converge vers cette limite à partir d'un certain rang).

Exercice 4
(a_n) : étudiée en TD.
(b_n) : en fait, $\sin(n\pi)$ vaut toujours 0, donc $b_n = 0 \to 0$. Le bon énoncé aurait été $\sin(\frac{n\pi}{2})$ à la place de $\sin(n\pi)$.
(c_n) : $n = e^{\ln n}$, donc $n^{\frac{1}{n}} = (e^{\ln n})^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\ln n}{n}}$. Comme $\frac{\ln n}{n} \to 0$ et que la fonction exponentielle est continue, on a $c_n \to e^0 = 1$.
(d_n) : on peut considérer les deux suites extraites :

$$\begin{aligned} d_{2n} &= (-1)^{2n}\frac{2n}{2n+1} = 1 \cdot \frac{2n}{2n+1} \to 1 \\ d_{2n+1} &= (-1)^{2n+1}\frac{2n+1}{2n+2} = -1 \cdot \frac{2n+1}{2n+2} \to -1 \end{aligned}$$

On a trouvé deux suites extraites qui convergent vers des limites différentes, donc (d_n) ne converge pas.
(e_n) : pour encadrer une somme, le plus simple est souvent d'encadrer chaque terme de la somme. Ici on remarque que pour $k \geq 2$, $k^k \geq 2^k$, donc $\frac{1}{k^k} \leq \frac{1}{2^k} = \left(\frac{1}{2}\right)^k$, donc :

$$\begin{aligned} e_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^k} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^k} \\ &\leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sum_{k=0}^{n-2} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1 - (\frac{1}{2})^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &\leq 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

On voit donc que (e_n) est majorée. D'autre part $e_{n+1} - e_n = \frac{1}{(n+1)^{n+1}} \geq 0$ donc (e_n) est croissante. En conclusion, (e_n) est coissante et majorée, donc elle converge. Ici on ne peut pas vraiment calculer la limite (par contre il est facile d'en donner des approximations aussi précises qu'on veut).
(f_n) : on rappelle que $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, donc en développant :

$$f_n = n - \ln n - \ln(n-1) - \ln(n-2) - \cdots - \ln 2 - \ln 1$$

En particulier on en déduit :

$$f_{n+1} - f_n = 1 - \ln(n+1) \to -\infty$$

Cela suffit à conclure que (f_n) tend vers $-\infty$. En effet, si $f_{n+1} - f_n \to -\infty$, en particulier il existe n_0 à partir duquel $f_{n+1} - f_n < -1$, donc $\forall n \geq n_0, f_{n+1} < f_n - 1$. Par une récurrence facile on en déduit $\forall k, f_{n_0+k} \leq f_{n_0} - k$, donc $f_{n_0+k} \to -\infty$, donc $f_n \to -\infty$.

Exercice 6

Montrons que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

(u_n) est croissante : en effet, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)!} \geq 0$.

(v_n) est décroissante : en effet-

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n\,n!} - \frac{1}{(n+1)!} \\ &= \frac{1}{(n+1)(n+1)!}\big(1 - \frac{n+1}{n}(n+1) - (n+1)\big) \\ &= \frac{1}{(n+1)(n+1)!}\big(-\frac{1}{n}(n+1)^2 - n)\big) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

$v_n - u_n \to 0$: en effet $v_n - u_n = \dfrac{1}{n\,n!} \to 0$.

Les suites (u_n) et (v_n) sont donc bien adjacentes. Par conséquent elles convergent toutes les deux, et leur limite est la même. En particulier $(u_n)_{n\geq 1}$ converge.

Appelons e la limite commune de (u_n) et de (v_n). La suite (u_n) croît, donc $\forall n, u_n \leq e$. La suite (v_n) décroît, donc $\forall n, v_n \geq e$. On a donc :

$$\begin{aligned} &\forall n, \quad u_n \leq e \leq v_n = u_n + \frac{1}{n\,n!} \\ &\forall n, \quad |u_n - e| < \frac{1}{n\,n!} \end{aligned}$$

En prenant par exemple $n = 5$, on a $n\,n! = 600$, et l'équation ci-dessus donne :

$$|u_5 - e| < \frac{1}{600} < 10^{-2}$$

En calculant on trouve $u_5 = \frac{103}{60} \approx 1.72$. La limite e vaut donc $1,72$ à 10^{-2} près. (En fait la limite de la suite est e comme dans l'exponentiel).

Exercice 9

a) *Sens de variation de f.*
f est définie sur $\mathbb{R}^*$. Elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$. $f'(x)$ est strictement négatif pour tout x donc f est strictement décroissante sur tout intervalle de $\mathbb{R}^*$, en particulier sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.
Attention : f n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$ car $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle (il y a un "trou" en 0). Par exemple, $f(-1) = 0 < f(1) = 2$.

Étude des points fixes de f.
Pour tout $x \neq 0$, $f(x) = x \Leftrightarrow x - 1 - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$ (car $x \neq 0$).
Cette dernière équation a pour discriminant 5 et pour racines $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\varphi' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
On en conclut que les points fixes de f sont $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\varphi' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Faire un schéma représentant f, la droite $y = x$ puis construire la suite u_0, u_1, u_2, etc.
On constate que les termes d'indices pairs (u_0, u_2, u_4, ...) de la suite décroissent et tendent vers φ et que les termes d'indices impairs (u_1, u_3, u_5, ...) de la suite croissent et tendent vers φ.
Comme $u_0 = 2$ et $u_1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, la propriété précédente implique que $\frac{3}{2} \leq u_n \leq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Cependant, il ne s'agit pas d'une démonstration mais d'une induction à partir du schéma.

Démonstration de $\frac{3}{2} \leq u_n \leq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
f est continue donc l'image d'un intervalle par f est un intervalle. De plus f est décroissante sur $]0, +\infty[$ donc soit $[a, b]$ un intervalle de $]0, +\infty[$, l'image de $[a, b]$ est l'intervalle $[f(b), f(a)]$.
$f(2) = \frac{3}{2}$ et $f(\frac{3}{2}) = \frac{5}{3}$ donc l'image de l'intervalle $[\frac{3}{2}, 2]$ est l'intervalle $[\frac{3}{2}, \frac{5}{3}] \subset [\frac{3}{2}, 2]$.
On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{3}{2} \leq u_n \leq 2$ implique $\frac{3}{2} \leq f(u_n) = u_{n+1} \leq 2$.
Comme $\frac{3}{2} \leq u_0 \leq 2$, par récurrence, il vient que $\frac{3}{2} \leq u_n \leq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Il s'agit de montrer que les termes de la suite se "rapprochent" les uns des autres quand n grandit, propriété indispensable à la convergence de la suite (cf. exercice 7.d). Cette propriété vient du fait que la pente de f est comprise entre -1 et 1 dans l'intervalle $[\frac{3}{2}, 2]$.
Vous pouvez comparer les différentes situations possibles et construire la suite u_n en remplaçant f par :
- $g_1(x) = 1 + \frac{1}{2}(x - 1)$, la pente de g_1 est $\frac{1}{2}$ et (u_n) converge vers le point fixe 1.
- $g_2(x) = 1 - \frac{1}{2}(x - 1)$, la pente de g_2 est $-\frac{1}{2}$ et (u_n) converge vers le point fixe 1.
- $g_3(x) = 1 + \frac{3}{2}(x - 1)$, la pente de g_3 est $\frac{3}{2}$ et (u_n) diverge.
- $g_4(x) = 1 - \frac{3}{2}(x - 1)$, la pente de g_4 est $-\frac{3}{2}$ et (u_n) diverge.

Rappel : théorème des accroissements finis.
Soient $[a, b]$ un intervalle et f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(a) - f(b) = f'(c)(a - b)$.

Démonstration de : $\forall n \geq 1 \quad |u_{n+1} - u_n| \leq \dfrac{4}{9}|u_n - u_{n-1}|$.
Soit $n \geq 1$, d'après a), u_n et u_{n-1} sont dans $[\frac{3}{2}, 2]$ et f est continue et dérivable sur $[\frac{3}{2}, 2]$.
On peut appliquer le théorème des accroissements finis à f et à l'intervalle $[u_n, u_{n-1}]$ ou $[u_{n-1}, u_n]$ selon l'ordre de u_n et u_{n-1} et il existe c compris entre u_n et u_{n-1} tel que
$f(u_n) - f(u_{n-1}) = f'(c)(u_n - u_{n-1})$ (égalité E_1).
De plus $f(u_n) - f(u_{n-1}) = u_{n+1} - u_n$ (égalité E_2).
Enfin u_n et u_{n-1} sont dans $[\frac{3}{2}, 2]$ donc c aussi et f' est croissante sur $[\frac{3}{2}, 2]$ donc
$f'(\frac{3}{2}) = -\frac{4}{9} \leq f'(c) \leq f'(2) = -\frac{1}{4}$ qui implique $|f'(c)| \leq \frac{4}{9}$ (inégalité I).

D'après E_1, E_2 et I, on conclut que $|u_{n+1} - u_n| = |f'(c)||(u_n - u_{n-1})| \leq \dfrac{4}{9}|u_n - u_{n-1}|$.

c) Soit x dans $]0, +\infty[$, $\frac{1}{x}$ est positif donc $f(x) = 1 + \frac{1}{x} \geq 1 > 0$, donc l'image de $]0, +\infty[$ par f est incluse dans $]0, +\infty[$.

Soient x et y dans $]0, +\infty[$, tels que $x \leq y$. D'après a), f est décroissante sur $]0, +\infty[$, donc par définition, $f(x) \geq f(y)$.
Comme $f(x)$ et $f(y)$ sont encore dans $]0, +\infty[$, $f(f(x)) \leq f(f(y))$.
On en conclut que $f \circ f$ est croissante sur $]0, +\infty[$.

Soit $n \geq 2$ quelconque.
$u_{n+2} - u_n = f \circ f(u_n) - f \circ f(u_{n-2})$.
$f \circ f$ est croissante sur $]0, +\infty[$, et $u_k > 0$ pour tout k donc $u_{n+2} - u_n$ est du même signe que $u_n - u_{n-2}$.

$u_2 - u_0 = \frac{5}{3} - 2 = -\frac{1}{3} < 0$ donc par récurrence $u_n - u_{n-2}$ est négatif pour tout n pair et $(u_{2p})_{p \geq 0}$ est décroissante.

$u_3 - u_1 = \frac{8}{5} - \frac{3}{2} = \frac{1}{10} > 0$ donc par récurrence $u_n - u_{n-2}$ est positif pour tout n impair et $(u_{2p+1})_{p\geq 0}$ est croissante.

Enfin d'après b), on a par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1} - u_n| \leq \left(\dfrac{4}{9}\right)^n |u_1 - u_0|$.
En effet le résultat est vrai pour $n = 0$.
Soit n quelconque, supposons le résultat vrai pour n, on a alors :
$|u_{n+2} - u_{n+1}| \leq \dfrac{4}{9}|u_{n+1} - u_n| \leq \dfrac{4}{9}\left(\dfrac{4}{9}\right)^n |u_1 - u_0| = \left(\dfrac{4}{9}\right)^{n+1} |u_1 - u_0|$,
donc le résultat est vrai pour $n + 1$.

Comme $\lim \left(\dfrac{4}{9}\right)^n = 0$ (suite géométrique de raison $\frac{4}{9}$), on déduit du résultat précédent que $\lim u_{n+1} - u_n = 0$, en particulier $\lim u_{2p} - u_{2p+1} = 0$.

$(u_{2p})_{p\geq 0}$ est décroissante, $(u_{2p+1})_{p\geq 0}$ est croissante et $\lim u_{2p} - u_{2p+1} = 0$ donc $(u_{2p})_{p\geq 0}$ et $(u_{2p+1})_{p\geq 0}$ sont adjacentes.
On en déduit qu'elles convergent vers une même limite r. La suite extraite de (u_n) des termes d'indices pairs et la suite extraite de (u_n) des termes d'indices impairs convergent vers une même limite r donc (u_n) converge vers r.

f est continue donc $\lim f(u_n) = f(r)$. De plus $\lim f(u_n) = \lim u_{n+1} = \lim u_n = r$ donc $f(r) = r$. D'après a., on en déduit que $r = \varphi$ ou $r = \varphi'$. $\varphi > 0$ et $\varphi' < 0$ or $r \geq 0$ puisque (u_n) est positive, on en conclut $r = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

d) On utilise le même raisonnement qu'en b).
Soit $n \geq 0$, d'après a), u_n est dans $[\frac{3}{2}, 2]$, donc $\lim u_n = r = \varphi$ aussi.
f est continue et dérivable sur $[\frac{3}{2}, 2]$, en appliquant le théorème des accroissements finis à f et à l'intervalle $[u_n, \varphi]$ ou $[\varphi, u_n]$ selon l'ordre de u_n et φ, il existe d compris entre u_n et φ tel que $f(u_n) - f(\varphi) = f'(d)(u_n - \varphi)$ (égalité E_1').
De plus $f(u_n) - f(\varphi) = u_{n+1} - \varphi$ (égalité E_2').
Enfin u_n et φ sont dans $[\frac{3}{2}, 2]$ donc d aussi et f' est croissante sur $[\frac{3}{2}, 2]$ donc $f'(\frac{3}{2}) = -\frac{4}{9} \leq f'(d) \leq f'(2) = -\frac{1}{4}$ qui implique $|f'(d)| \leq \frac{4}{9}$ (inégalité I').

D'après E_1', E_2' et I', on conclut que $|u_{n+1} - \varphi| = |f'(c)||(u_n - \varphi)| \leq \dfrac{4}{9}|u_n - \varphi|$.

Par une récurrence semblable à celle démontrée en c), on en déduit $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - \varphi| \leq \left(\dfrac{4}{9}\right)^n |u_0 - \varphi|$.

Pour avoir $|u_n - \varphi| \leq \dfrac{1}{1000}$ il suffit donc d'avoir $\left(\dfrac{4}{9}\right)^n |u_0 - \varphi| \leq \dfrac{1}{1000}$ (inégalité J).

Comme la fonction $\log_{10}$ est croissante, J équivaut à J' : $\log_{10}\left(\left(\dfrac{4}{9}\right)^n |u_0 - r|\right) \leq \log_{10} \dfrac{1}{1000} = -3$.

$$\begin{aligned}
\log_{10}\left(\left(\frac{4}{9}\right)^n |u_0 - \varphi|\right) &= \log_{10}\left(\frac{4}{9}\right)^n + \log_{10}|u_0 - \varphi| \\
&= n(\log_{10} 4 - \log_{10} 9) + \log_{10}\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \\
&= n(\log_{10} 4 - \log_{10} 9) + \log_{10}(3 - \sqrt{5}) - \log_{10} 2
\end{aligned}$$

Donc J' équivaut à $n \geq \dfrac{3 + \log_{10}(3 - \sqrt{5}) - \log_{10} 2}{\log_{10} 9 - log_{10}4} \approx 7,3$.
Finalement $|u_n - r| \leq \dfrac{1}{1000}$ pour $n \geq 8$.
On en déduit que $u_8 = \dfrac{89}{55}$ est une approximation par défaut à 10^{-3} du nombre d'or $\varphi = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$

Exercice 10
On suppose (u_n) croissante ; si (u_n) est décroissante le raisonnement est similaire. Par hypothèse, il existe une sous-suite extraite de (u_n) convergeante. On peut donc choisir $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante et $l \in \mathbb{R}$ tels que $u_{\phi(n)} \to l$. On veut montrer que (u_n) converge vers l.

Montrons d'abord que (u_n) est majorée par l. En effet si (u_n) n'était pas majorée par l, cela voudrait dire qu'il existerait $q \in \mathbb{N}$ tel que $u_q > l$. En choisissant n tel que $\phi(n) > q$, on aurait donc $u_{\phi(n)} \geq u_q > l$ donc comme $(u_{\phi(n)})$ est croissante elle ne pourrait pas converger vers l, ce qui est contradictoire.

Montrons que (u_n) tend vers l. Soit $\epsilon > 0$. Comme $u_{\phi(n)} \to l$, il existe n_0 tel que $\forall n \geq n_0, |u_{\phi(n)} - l| < \epsilon$. En particulier $|u_{\phi(n_0)} - l| < \epsilon$. Posons $n_1 = \phi(n_0)$. On a :

$$l - \epsilon < u_{\phi(n_0)} = u_{n_1}$$

donc par croissance de (u_n) :

$$\forall n \geq n_1, \quad l - \epsilon < u_{n_1} \leq u_n$$

Comme on a vu par ailleurs que (u_n) est majorée par l, on obtient finalement :

$$\begin{aligned} &\forall n \geq n_1, \quad l - \epsilon < u_n \leq l \\ &\forall n \geq n_1, \quad |u_n - l| < \epsilon \end{aligned}$$

Donc (u_n) converge aussi vers l.

Exercice 11
On les a toutes faites en TD sauf b).

La proposition b) est vraie.
Démonstration : si $\lim(\cos u_n) = 1$ alors $\lim(\cos^2 u_n) = 1$, or $\sin^2 u_n = 1 - \cos^2 u_n$ donc $\lim(\sin^2 u_n) = 0$. Comme la fonction $x \to \sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}^+$ est continue en 0 et que $\sqrt{x^2} = |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on en déduit $\lim |\sin u_n| = 0$. Or $\lim |\sin u_n| = 0$ équivaut à $\lim \sin u_n = 0$ donc $(\sin u_n)$ converge vers 0.