Université Paris 7 - Denis Diderot
Licence Physique, Dominante Physique, L1

Cours de Mathématiques
Année 2008-2009, 1^{er} semestre

Feuille de TD n°5 - Correction

Calcul matriciel

Exercice 8
A : fait en TD.
B : on calcule l'inverse avec la méthode du pivot de Gauss.

$$
\left(\begin{array}{ccccc|cccc}
1 & 2 & 3 & \cdots & n & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 & 0 & 1 & & \\
\vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\
 & & & 1 & 2 & & & 1 & 0 \\
0 & & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1
\end{array}\right)
$$

$$
\left(\begin{array}{cccccc|cccccc}
1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -n \\
0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & -(n-1) \\
\vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & & 1 & 2 & 0 & & & & 1 & 0 & -3 \\
 & & & 0 & 1 & 0 & & & & 0 & 1 & -2 \\
0 & & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & & \cdots & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
L_1 - nL_n \\
L_2 - (n-1)L_n \\
\vdots \\
L_{n-2} - 3L_n \\
L_{n-1} - 2L_n \\
L_n
\end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccccccc|ccccccc}
1 & 2 & \cdots & n-3 & n-2 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -(n-1) & n-2 \\
0 & 1 & \cdots & n-4 & n-3 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & -(n-2) & n-3 \\
\vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & & 1 & 2 & 0 & 0 & & & & 1 & 0 & -3 & 2 \\
 & & & 0 & 1 & 0 & 0 & & & & 0 & 1 & -2 & 1 \\
 & & & 0 & 0 & 1 & 0 & & & & 0 & 0 & 1 & -2 \\
0 & & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
L_1 - (n-1)L_{n-1} \\
L_2 - (n-2)L_{n-1} \\
\vdots \\
L_{n-3} - 3L_{n-1} \\
L_{n-2} - 2L_{n-1} \\
L_{n-1} \\
L_n
\end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccccccc|ccccccc}
1 & 2 & \cdots & n-3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -(n-2) & n-3 & 0 \\
0 & 1 & \cdots & n-4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & -(n-3) & n-4 & 0 \\
\vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & & 1 & 0 & 0 & 0 & & & & 1 & -2 & 1 & 0 \\
 & & & 0 & 1 & 0 & 0 & & & & 0 & 1 & -2 & 1 \\
 & & & 0 & 0 & 1 & 0 & & & & 0 & 0 & 1 & -2 \\
0 & & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
L_1 - (n-2)L_{n-2} \\
L_2 - (n-3)L_{n-2} \\
\vdots \\
L_{n-3} - 2L_{n-2} \\
L_{n-2} \\
L_{n-1} \\
L_n
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
\vdots \\
etc \\
\vdots
\end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccccccccc|ccccccccc}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & & & & \\
\vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\
 & & & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\
 & & & & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & & & & & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\
 & & & & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & & & & & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\
 & & & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & & & & & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\
0 & & & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & & & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
$$

On obtient ainsi l'inverse de B.

Exercice 10

(i) $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et pour $k \geq 3$, $J^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(ii) $P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P^3 = I_3$, donc
si $k \equiv 0$ [3], $P^k = I_3$
si $k \equiv 1$ [3], $P^k = P$
si $k \equiv 2$ [3], $P^k = P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(iii) $Q^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3Q$.
On en déduit par une récurrence immédiate que pour $k \geq 1$, $Q^k = 3^{k-1}Q$.

(iv) *Démonstration* : Soit $k > 0$ un entier.
On a $A^k = (Q - I_3)^k$. I_3 commute avec Q donc on peut appliquer la formule du binôme de Newton, c'est-à-dire : $A^k = \sum_{p=0}^{k} C_k^p \; Q^p \; (-I_3)^{k-p} = \sum_{p=0}^{k} C_k^p \; (-1)^{k-p} \; Q^p$.
Comme d'après la question précédente, pour tout $p > 0$, $Q^p = 3^{p-1}Q$, on en déduit :
$A^k = C_k^0(-1)^{k-0}Q^0 + \sum_{p=1}^{k} C_k^p \; (-1)^{k-p} \; 3^{p-1} \; Q = (-1)^k I_3 + \big(\sum_{p=1}^{k} C_k^p \; (-1)^{k-p} \; 3^{p-1}\big)Q$.
On peut a nouveau utiliser la formule du binôme de Newton pour simplifier la somme :
$\sum_{p=1}^{k} C_k^p \; (-1)^{k-p} \; 3^{p-1} = \frac{1}{3} \sum_{p=1}^{k} C_k^p \; (-1)^{k-p} \; 3^p = \frac{1}{3} \big(- C_k^0 \; (-1)^k \; 3^0 + \sum_{p=0}^{k} C_k^p \; (-1)^{k-p} \; 3^p\big)$
$= \frac{1}{3} \big((-1)^{k+1} + (3-1)^k\big) = \frac{1}{3} \big(2^k + (-1)^{k+1}\big)$.
Finalement, on obtient $A^k = (-1)^k \; I_3 + \frac{2^k + (-1)^{k+1}}{3} Q$.

On vérifie que cette formule est encore vraie pour $k = 0$ (facile).

Conclusion : on a bien le résultat demandé pour tout $k \in \mathbb{N}$.

(v) Soit n l'ordre de la matrice carrée A, on se restreint à $n > 1$ (pour $n = 1$, A est la matrice nulle).
On pose $Q = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ et on a $A = Q - I_n$.
De même que dans la question (iii), on montre que pour $k > 0$ entier, $Q^k = n^{k-1}Q$.
On en déduit par un calcul identique à celui de la question (iv) que pour tout k entier
$A^k = (-1)^k \; I_n + \frac{(n-1)^k + (-1)^{k+1}}{n} Q$.

Première preuve que A est inversible en utilisant la méthode générale.
On résout le système $AX = Y$ où
$X = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ est l'inconnue et $Y = (y_1, ..., y_n)$ est quelconque dans $\mathbb{R}^n$.

En se rappelant que $n > 1$, on a les équivalences suivantes :

$$AX = Y \iff \left\{\begin{array}{ccccccccccc} & & x_2 & + & \cdots & + & x_{n-1} & + & x_n & = & y_1 \\ x_1 & + & & & \cdots & + & x_{n-1} & + & x_n & = & y_2 \\ \vdots & & \vdots & & \cdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_1 & + & x_2 & + & \cdots & & & + & x_n & = & y_{n-1} \\ x_1 & + & x_2 & + & \cdots & + & x_{n-1} & & & = & y_n \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcll} x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n & = & y_1 & L_1 \\ x_1 - x_2 & = & y_2 - y_1 & L_2 - L_1 \\ \vdots & = & \vdots & \vdots \\ x_1 - x_{n-1} & = & y_{n-1} - y_1 & L_{n-1} - L_1 \\ x_1 - x_n & = & y_n - y_1 & L_n - L_1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcll} (n-1)x_1 & = & y_1 + \cdots + y_n - (n-1)y_1 & L_1 + L_2 + .. + L_{n-1} + L_n \\ x_2 & = & y_1 - y_2 + x_1 & \\ \vdots & = & \vdots & \\ x_{n-1} & = & y_1 - y_{n-1} + x_1 & \\ x_n & = & y_1 - y_n + x_1 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & \frac{1}{n-1}\big(y_1 + \cdots + y_n\big) - y_1 \\ x_2 & = & \frac{1}{n-1}\big(y_1 + \cdots + y_n\big) - y_2 \\ \vdots & = & \vdots \\ x_{n-1} & = & \frac{1}{n-1}\big(y_1 + \cdots + y_n\big) - y_{n-1} \\ x_n & = & \frac{1}{n-1}\big(y_1 + \cdots + y_n\big) - y_n \end{array}\right.$$

La dernière équivalence est obtenue par substitution de $y_1 + x_1$ à partir de la première équation. On en déduit que A est inversible et que $A^{-1} = \frac{1}{n-1}Q - I_n$.

Deuxième preuve que A est inversible : avec la bonne intuition, on calcule AQ en utilisant $A = Q - I_n$ et $Q^2 = nQ$.
$AQ = (Q - I_n)Q = Q^2 - Q = nQ - Q = (n-1)Q = (n-1)(A + I_n) = (n-1)A + (n-1)I_n$
On en déduit que $AQ - (n-1)A = (n-1)I_n$ c'est-à-dire que $A\big(\frac{1}{n-1}Q - I_n\big) = I_n$.
On a donc montré que A est inversible d'inverse $A^{-1} = \frac{1}{n-1}Q - I_n$.

(vi) A est triangulaire inférieure avec ses coefficients diagonaux tous non nuls, donc elle est inversible. Son inverse est $A' = (a'_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ définie par : $a'_{i,j} = \left\{\begin{array}{ll} (-1)^{i+j}\ C_{i-1}^{j-1} & \text{si } i \ge j \\ 0 & \text{sinon} \end{array}\right.$

En effet, en posant $A'' = A\ A'$, A'' a pour coefficient $a''_{i,j} = \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{k=j}^{i} C_{i-1}^{k-1}\ (-1)^{k+j}\ C_{k-1}^{j-1} \ \text{ si } i \ge j \\ 0 \ \text{ sinon} \end{array}\right.$

Pour $i \ge j$, on a $C_{i-1}^{k-1}\ C_{k-1}^{j-1} = \frac{(i-1)!}{(i-k)!(k-1)!}\ \frac{(k-1)!}{(k-j)!(j-1)!} = \frac{(i-1)!}{(i-k)!(k-j)!(j-1)!} = \frac{(i-1)!}{(i-j)!(j-1)!}\ \frac{(i-j)!}{(i-k)!(k-j)!}$,
c'est-à-dire $C_{i-1}^{k-1}\ C_{k-1}^{j-1} = C_{i-1}^{j-1}\ C_{i-j}^{k-j}$.
Donc $a''_{i,j} = \displaystyle\sum_{k=j}^{i}(-1)^{k+j}\ C_{i-1}^{j-1}\ C_{i-j}^{k-j} = C_{i-1}^{j-1}\ \sum_{k=j}^{i}(-1)^{k+j}\ C_{i-j}^{k-j}$.
Pour $i > j$, en posant $k' = k - j$ et en remarquant que $(-1)^{k'+2j} = (-1)^{k'}(-1)^{2j} = (-1)^{k'}$ on en déduit $a''_{i,j} = C_{i-1}^{j-1}\ \displaystyle\sum_{k'=0}^{i-j}(-1)^{k'+2j}\ C_{i-j}^{k'} = C_{i-1}^{j-1}\ \sum_{k'=0}^{i-j}(-1)^{k'}\ C_{i-j}^{k'} = C_{i-1}^{j-1}(1-1)^{i-j} = 0$ puisque $i - j > 0$.

De plus pour tout i, on a $a''_{i,i} = \displaystyle\sum_{k=i}^{i} C_{i-1}^{k-1}\ (-1)^{k+j}\ C_{k-1}^{j-1} = C_{i-1}^{i-1}\ (-1)^{i+i}\ C_{i-1}^{i-1} = 1$.

Finalement $A'' = I_n$ et donc A' est l'inverse de A.

Exercice 11
Soit $D \in M_2(\mathbb{R})$ quelconque.

On montre d'abord que : (D commute avec toutes les matrices de $M_2(\mathbb{R})$) $\Rightarrow$ (D est une matrice diagonale).
Notons $D = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et supposons que D commutent avec toutes les matrices de $M_2(\mathbb{R})$. Cette propriété est donc vraie pour les matrices particulières $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Or $DU = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix}$, $UD = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $DV = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}$, $VD = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}$,
De $DU = UD$ on déduit $a = d$ et $c = 0$. De $DV = VD$ on déduit $a = d$ et $b = 0$.
On en conclut que D est une matrice diagonale.

On montre maintenant que : (D est une matrice diagonale) $\Rightarrow$ (D commutent avec toutes les matrices de $M_2(\mathbb{R})$).
Supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, $D = \lambda I_2$. Pour toutes matrices $A \in M_2(\mathbb{R})$, on a alors
$DA = (\lambda I_2)A = \lambda(I_2 A) = \lambda A = \lambda(A I_2) = A(\lambda I_2) = AD$.

On a donc montré l'équivalence demandée.

Ce résultat reste vrai pour des matrices de format $n \times n$, avec $n > 2$. On le démontre en utilisant des matrices dont tous les coefficients sont nuls sauf un en dehors de la diagonale.