Université Paris 7 - Denis Diderot
Licence Physique, Dominante Physique, L1

Cours de Mathématiques
Année 2008-2009, 1^{er} semestre

Feuille de TD n°3 - Correction

Polynômes

Exercice 6
Factoriser dans $\mathbb{C}$ revient à trouver les racines. On cherche donc les $z \in \mathbb{C}$ tels que :

$$\begin{aligned}(\frac{z+1}{z-1})^n &= 1\\ \frac{z+1}{z-1} &= e^{2i\frac{k\pi}{n}},\ k \in \{0, ..., n-1\}\end{aligned}$$

En fait, on peut éliminer le cas $k = 0$, puisqu'on aurait alors $z+1 = z-1$, donc $1 = -1$: c'est impossible.
On continue les calculs :

$$\begin{aligned}z+1 &= e^{2i\frac{k\pi}{n}}(z-1),\ k \in \{1, ..., n-1\}\\ z &= \frac{e^{2i\frac{k\pi}{n}}+1}{e^{2i\frac{k\pi}{n}}-1}\end{aligned}$$

On a le droit de diviser par $e^{2i\frac{k\pi}{n}} - 1$ parce que $0 < k < n$ donc $e^{2i\frac{k\pi}{n}} - 1 \neq 0$.

$$\begin{aligned}z &= \frac{e^{i\frac{k\pi}{n}}(e^{i\frac{k\pi}{n}} + e^{-i\frac{k\pi}{n}})}{e^{i\frac{k\pi}{n}}(e^{i\frac{k\pi}{n}} - e^{-i\frac{k\pi}{n}})}\\ &= \frac{\cos\frac{k\pi}{n}}{i\sin(\frac{k\pi}{n})}\\ z &= -i \cdot \cot(\frac{k\pi}{n}),\ k \in \{1, ..., n-1\}\end{aligned}$$

Ainsi, on a trouvé $n-1$ racines : c'est normal, parce que $(X+1)^n - (X-1)^n$ est de degré $n-1$ (on peut le voir avec le binôme de Newton). Finalement :

$$(X+1)^n - (X-1)^n = \prod_{k=1}^{n-1}(X + i \cdot \cot\frac{k\pi}{n})$$

Exercice 9

- On montre d'abord que si $(X-a)^2$ divise P, alors $P(a) = P'(a) = 0$. Supposons donc que $(X-a)^2$ divise P. Alors $P = (X-a)^2Q$ pour un certains polynôme Q. Donc $P(a) = (a-a)^2Q(a) = 0$. D'autre part, en dérivant on trouve $P' = 2(X-a)Q + (X-a)^2Q'$, donc on a bien $P'(a) = 0$.
- Réciproquement, il faut montrer que si $P(a) = P'(a) = 0$, alors $(X-a)^2$ divise P. On suppose donc $P(a) = P'(a) = 0$. D'abord, comme $P(a) = 0$, on sait que $X-a$ divise P. On peut donc écrire $P = (X-a)Q$. En dérivant on obtient $P' = Q + (X-a)Q'$. On applique l'hypothèse $P'(a) = 0$: $P'(a) = Q(a) + (a-a)Q'(a) = Q(a)$, donc $Q(a) = 0$, donc $X-a$ divise Q. Ainsi $Q = (X-a)A$ pour un certain polynôme A. Donc $P = (X-a)Q = (X-a)(X-a)A$. Donc $(X-a)^2$ divise P.

Exercice 10
(i) $P'(X) = 1 + X + ... + \frac{X^{n-1}}{(n-1)!}$ donc $P(X) - P'(X) = \frac{X^n}{n!}$.

(ii) Soit r une racine de P (il en existe puisqu'on est dans $\mathbb{C}$).
On raisonne par l'absurde en supposant que r soit une racine au moins double. On a alors $P(r) = P'(r) = 0$ donc d'après (i), $r^n = 0$. Or $r^n = 0 \Rightarrow r = 0$ donc $r = 0$.
Par ailleurs, par définition de P, $P(0) = 1$ donc 0 n'est pas une racine de P, en contradiction avec $r = 0$.
On en déduit que l'hypôthèse r est une racine au moins double est fausse, donc r est une racine simple.
Comme on a fait le raisonnement pour une racine quelconque de P, on peut conclure que toutes les racines de P sont simples.

Exercice 12
P est de degré au plus 3, donc on peut poser $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$. On a alors :

$$\begin{aligned} P(X+1) - P(X-1) &= X^2 + 1 \\ a(X+1)^3 + b(X+1)^2 + c(X+1) + d - a(X-1)^3 - b(X-1)^2 - c(X-1) - d &= X^2 + 1 \\ 6X^2 + 2a + 4bX + 2c &= X^2 + 1 \end{aligned}$$

En identifiant les coefficients, on trouve $a = 1/6$, $b = 0$, $c = 1/3$. On remarque qu'il n'y a pas de contrainte sur d : c'est normal, puisque le coefficient constant de P va toujours s'annuler quand on calcule $P(X+1) - P(X-1)$. Les polynômes P cherchés sont donc ceux de la forme :

$$\frac{1}{6}X^3 + \frac{1}{3}X + \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$$

Exercice 13
D'après les hypothèses, $(X-a)^m$ divise P, donc il existe un polynôme Q non divisible par $X - a$ tel que $P(X) = (X-a)^m\ Q(X)$.

Comme on a $m \geq 1$, on en déduit que

$$P'(X) = (X-a)^{m-1}\ Q(X) + (X-a)^m\ Q'(X) = (X-a)^{m-1}\big(Q(X) + (X-a)Q'(X)\big).$$

Il est donc évident que $(X-a)^{m-1}$ divise P'. Il nous reste à montrer que $(X-a)^m$ ne divise pas P'.

Raisonnons par l'absurde et supposons que $(X-a)^m$ divise P'.
Il existe alors T tel que $P'(X) = (X-a)^m\ T(X)$, or, d'après l'égalité précédente $P'(X) = (X-a)^{m-1}\ Q(X) + (X-a)^m\ Q'(X)$, donc il vient que $(X-a)^{m-1}\ Q(X) + (X-a)^m\ Q'(X) = (X-a)^m\ T(X)$ c'est-à-dire $(X-a)^{m-1}\Big(Q(X) - (X-a)\big(T(X) - Q'(X)\big)\Big) = 0$.
Un produit de polynômes est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul, or $(X-a)^{m-1}$ n'est pas nul donc $Q(X) - (X-a)\big(T(X) - Q'(X)\big)$ est nul c'est-à-dire $Q(X) = (X-a)\big(T(X) - Q'(X)\big)$.
Finalement, Q est divisible par $X - a$ ce qui est contradictoire avec Q non divisible par $X - a$. On en conclut que l'hypothèse est fausse, c'est-à-dire que $(X-a)^m$ ne peut pas diviser P'.

Conclusion : a est racine de P' de multiplicité exactement $m - 1$.

Exercice 15
Soit $\{r_1, ..., r_k\}$ l'ensemble des racines de P, avec r_i de multiplicité m_i, et soit n le degré de P. On a donc $P = \lambda\Pi_{i=1}^k(X - r_i)^{m_i}$, et $\Sigma_{i=1}^k m_i = n$. On a vu dans l'exercice 13 que r_i est racine de P' de degré de multiplicité $m_i - 1$. Ainsi, la somme des multiplicités des racines $\{r_1, ..., r_k\}$ dans P' vaut $\Sigma_{i=1}^k(m_i - 1) = n - k$. On sait par ailleurs que le degré de P' est $n - 1$, donc si $k \geq 2$, P' possède des racines qui ne sont pas dans $\{r_1, ..., r_k\}$, et donc en particulier P' ne peut pas diviser P. On a donc $k = 1$, ce qui veut dire que P s'écrit $\lambda(X - r)^n$. Dans ce cas, $P' = n\lambda(X - r)^{n-1}$ (sauf si $n = 0$), donc P' divise bien P. Si $n = 0$, $P = \lambda$; dans ce cas $P' = 0$, donc P' divise P si et seulement si $\lambda = 0$. Finalement, les polynômes P cherchés sont ceux de la forme :

$$\lambda(X - r)^n, \mathrm{r} \in \mathbb{C}, \lambda \in \mathbb{C}, \mathrm{n} > 0$$

Exercice 16
Erreur dans l'énoncé ! En fait l'énoncé correct aurait été :
Soient P, Q deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$. Soient A et B deux polynômes unitaires de degré maximal divisant P et Q. Montrer que $A = B$.

Exercice 17 (Correction sommaire)
On note $A = \Pi_{r\in\mathcal{A}}(X-r)$, $B = \Pi_{r\in\mathcal{B}}(X-r)$, $P = \Pi_{r\in\mathcal{P}}(X-r)$. $PGCD(A,B) = 1$ signifie $\mathcal{A}\cap\mathcal{B} = \emptyset$; sinon, pour $r \in \mathcal{A}\cap\mathcal{B}$, $(X-r)$ diviserait A et B (plus généralement on peut observer que $PGCD(A,B) = \Pi_{r\in\mathcal{A}\cap\mathcal{B}}(X-r)$). D'autre part A divise P signifie $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}$. Comme B divise aussi P, on a $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{P}$, donc $\mathcal{A}\cup\mathcal{B}\subseteq\mathcal{P}$, donc $\Pi_{r\in\mathcal{A}\cup\mathcal{B}}(X-r)$ divise P ; or $\mathcal{A}\cap\mathcal{B} = \emptyset$ comme on a vu, donc $\Pi_{r\in\mathcal{A}\cup\mathcal{B}}(X-r) = \Pi_{r\in\mathcal{A}}(X-r) * \Pi_{r\in\mathcal{B}}(X-r) = A * B$. Donc $A * B$ divise P.

En fait c'est exactement la même démonstration que dans $\mathbb{Z}$: il suffit de remplacer partout $X-r$ ci-dessus par p, et au lieu de prendre $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{C}$, on les prend dans l'ensemble $\mathbb{P}$ des nombres premiers.

Exercice 18
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 3.
(i) Soit a une racine de P dans $\mathbb{C}$. Si $a \in \mathbb{R}$ on trouvé un racine réelle de P, donc on a déjà gagné. On peut donc supposer $a \notin \mathbb{R}$. Dans ce cas, comme P est à coefficients réels, le conjugué $\overline{a}$ de a est une autre racine de P, distincte de a. On a ainsi deux racines ; comme P est de degré 3, il y en a une troisième, qu'on peut noter b, distincte de a et $\overline{a}$. Or $\overline{b}$ est aussi une racine de P, mais comme P ne peut avoir que trois racines, on a forcément soit $\overline{b} = a$ (impossible, sinon $b = \overline{a}$), soit $\overline{b} = \overline{a}$ (impossible, sinon $b = a$), soit $\overline{b} = b$. Donc $\overline{b} = b$, donc b est une racine réelle.
(ii) On suppose que le coefficient dominant de P est positif ; s'il est négatif, la démonstration est similaire. Comme P est de degré 3, sa dérivée P' est de degré 2 et son coefficient dominant est positif, donc en faisant une étude de fonction on constate que P (en tant que fonction) tend vers $-\infty$ en $-\infty$, et vers $+\infty$ en $+\infty$. Comme P est continue (comme tout polynôme, sinon on ne risquerait pas de pouvoir le dériver), et qu'elle passe de $-\infty$ à $+\infty$, elle coupe forcément l'axe des abscisses à un moment donné, à une abscisse a. On a donc $P(a) = 0$. Donc a est une racine réelle de P.

Exercice 19
1) Vrai. La démonstration est exactement comme dans l'exercice précédent. Une autre manière de le voir, c'est que vous avez vu en cours que quand on factorise un polynôme dans $\mathbb{R}[X]$, les facteurs sont de la forme $(X-r)$ pour $r \in \mathbb{R}$, ou $(X^2 + 2\mathcal{R}](z)X + |z|^2)$ pour $z \in \mathbb{C}$. Comme P est de degré impair, on ne peut pas avoir que des facteurs de la forme $(X^2 + 2\mathcal{R}e(z)X + |z|^2)$, parce qu'ils sont de degré 2. Il y a donc au moins un facteur de la forme $(X-r)$. Donc il y a au moins une racine réelle.
2) Faux. Par exemple $P = X^3 + X$ admet une racine réelle (c'est 0), mais sa dérivée $P' = 3X^2+1$ n'admet pas de racine réelle. (D'ailleurs si cette propriété "2)" était vraie, en la combinant avec la propriété "1)" ci-dessus, on déduirait que tous les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ ont une racine réelle, ce qui est faux, par exemple $X^2 + 1$.)
3) Vrai. On va le montrer par contraposée. C'est-à-dire, au lieu de montrer que si P admet au moins deux racines réelle, alors P' en admet au moins une, on va montrer que si P' n'admet aucune racine réelle, alors P en admet au plus une. Supposons donc que P' n'admet aucune racine réelle. Comme P' est continue (en tant que fonction, puisque c'est un polynôme), cela veut dire que P' ne coupe jamais l'axe de abscisses, donc P' est soit stricement positif partout, soit strictement négatif partout. On suppose que P' est strictement positif partout (la démonstration dans l'autre cas est similaire). Alors P ne fait que croître, donc P ne peut couper qu'une seule fois l'axe des abscisses, donc P a au plus une racine réelle. (Pour ceux qui l'ont déjà vu, c'est aussi le théorème de Rolle.)
4) Faux. Par exemple $P = X^2$: zéro est une racine double dans P, mais $P' = X$ n'a que des racines simples (il n'en a même qu'une seule).
5) Faux. Par exemple $P = X^3 - 1$ n'a que des racines simples (1 dans $\mathbb{R}$, $e^{2i\frac{\pi}{3}}$ et $e^{-2i\frac{\pi}{3}}$ dans $\mathbb{C}$), mais $P' = 3X^2$ a une racine double (en 0).