Sujet d'initiation à la recherche en informatique ou en mathématiques

Complétude de la logique intuitionniste par rapport aux faisceaux de modèles

Université Bordeaux 1
Laboratoire Bordelais de Recherche en Informatique et Institut de Matématiques de Bordeaux
Christian Retoré (LaBRI) URL: http://www.labri.fr/perso/retore/ email: christian.retore@labri.fr
Jean Gillibert (IMB) URL: http://www.math.u-bordeaux1.fr/~gilliber/ email: Jean.Gillibert@math.u-bordeaux1.fr

Contexte

La logique intuitionniste (LJ) est très usitée en informatique car les démonstrations formelles de cette logique peuvent se traduire en algorithmes, comme on le voit dans la programmation fonctionnelle typée (par exemple: ML, CaML, Haskell) et dans certains démonstrateurs ou vérificateurs automatiques (par exemple: Coq).

Il est connu que LJ est complète par rapport aux faisceaux de L-structures (un ensemble muni d'une interprétation de chaque symbole de relation ou de fonction) sur un espace topologique :

> *(*) une formule du premier ordre est démontrable dans LJ*
> *si et seulement si*
> *(**) elle est valide dans tout faisceau de modèle*s.

Un faisceau de L-structures associe à chaque ouvert U d'un espace topologique X un modèle M(U), de sorte que:

- Lorsque V est inclus dans U, on a un morphisme de L-structures de M(U) dans M(V).
- Lorsqu'une relation R(t1,...,tn) est vraie dans chacun des M(Ui) pour un recouvrement ouvert (Ui) de X, R(t1,...,tn) est vraie dans chacun M(X).

Dans la littérature, la complétude (**)=>(*) est établie en montrant que l'algèbre de Lindenbaum Ω des formules (formules quotientées par l'équivalence A=> B ssi A|-B et B|-A, A≤B ssi A|-B) a la structure des ouverts d'un espace topologique (plus précisément, d'une algèbre de Heyting complète, ce qui correspond à une prétopologie,aussi appelée topologie de Grothendieck), puis la complétude pour les modèles Ω-valués, afin de conclure grâce à l'équivalence entre la catégorie des faisceaux sur Ω et des modèles Ω-valuées.

Objectif

Le but de ce mémoire est de produire et de rédiger une preuve directe de ce résultat. On pourra ensuite l'étendre à la logique multivaluée (ce qui est facile) puis à la logique d'ordre supérieur (ce qui est un peu plus difficile). On illustrera ce travail par la construction de modèles qui réfutent des théorèmes démontrables en logique classique mais pas en logique intuitionniste.

Perspectives ultérieures

En cas de franche réussite, l'étudiant pourra ensuite poursuivre en master recherche voire en thèse sur l'étude des modèles de la théorie des types intuitionniste ou linéaire *avec premier ordre*. Ceci a des applications très prometteuses pour la formalisation et l'automatisation de la sémantique du langage naturel (il y a aussi des applications plus traditionnelles en spécification et vérification de programmes, même si ce point de vue est moins développé dans notre équipe). Il nous semble *a priori* difficile d'aborder ces applications dans un stage de courte d'initiation à la recherche mais si l'étudiant y arrive, pourquoi pas.

Prérequis

Des connaissances en logique sont indispensables et une familiarité avec la topologie générale est souhaitable. Une allergie à la théorie des catégories peut être un obstacle.

Bibliographie

- Petite école sur les faisceaux en logique et en géométrie (Jean Gillibert, Christian Retoré) http://www.labri.fr/perso/retore/GeoLog/index.html
- Peter T JOHNSTONE ***Sketches of an Elephant: A Topos Theory Compendium*, Vol. I & II** Oxford Logic Guides (vol. 43 & 44), Oxford University Press, 2003.
- Joachim LAMBEK & Phil SCOTT ***Introduction to Higher-Order Categorical Logic*** Cambridge studies in advanced mathematics Cambridge University Press, 1988
- Anne Sjerp TROELSTRA & Dirk VAN DALEN ***Constructivism in mathematics, Vol I & II***, North-Holland, 1988.