

Comment faire des preuves exactes sur des polynômes à l'aide de calculs en flottants

David Monniaux
chargé de recherche au CNRS, laboratoire VERIMAG
<http://www-verimag.imag.fr/~monniaux/>
David.Monniaux@imag.fr

8 mars 2010

Lieu du stage : Laboratoire VERIMAG, 2 avenue de Vignate, 38610 Gières (banlieue de Grenoble)

Sujet : Comment prouver qu'un polynôme est positif ? Comment montrer qu'un système d'inégalités polynomiales n'a pas de solutions ? Comment borner un polynôme sur un compact ?

Ces questions ont une importance pratique :

- preuves d'invariants de programme
- preuves formelles à la Coq
- preuves de théorèmes mathématiques (p.ex. les lemmes de la preuve de la conjecture de Kepler¹ par Thomas Hales)

On se propose d'utiliser, via des théorèmes dits « Positivstellensatz », une réduction de ces problèmes vers la programmation semidéfinie,² c'est-à-dire la recherche d'une matrice semidéfinie positive (valeurs propres positives ou nulles) parmi un ensemble $-F_0 + \sum_i \lambda_i F_i$.

Il existe des algorithmes et des outils³ qui permettent de résoudre ce problème numériquement. Malheureusement, ces algorithmes sont inadaptés aux cas où l'ensemble des solutions est géométriquement dégénéré (plat).

L'encadrant du stage a proposé en 2010 un algorithme permettant de « rectifier » des résultats numériques à l'aide de l'algorithme LLL.⁴ L'implémentation actuelle, si elle donne des résultats intéressants, souffre encore de certaines inefficacités. L'objet du stage serait de réfléchir à des améliorations et des les programmer, notamment par usage judicieux de bibliothèques d'algèbre linéaire creuse, soit exacte,⁵ soit flottante.

¹<http://code.google.com/p/flyspeck/>

²<http://www.stanford.edu/~boyd/cvxbook/>

³<http://www.mcs.anl.gov/DSDP/>

⁴Algorithme de réduction de bases de réseaux dû à Lenstra, Lenstra et Lovász, voir par exemple http://en.wikipedia.org/wiki/LLL_algorithm

⁵<http://www.linalg.org/>