# TD : Modèles et algorithmes des réseaux

2 octobre 2018

## 1 Chaînes de Markov

**Exercice 1** (Équations d'équilibre global)**.** Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov sur un espace d'état $S$, avec matrice de transition $P$.

1. Montrer que les équations d'équilibre $\pi P = P$ peuvent aussi s'exprimer de la façon suivante :

$$\forall I \subseteq S, \quad \sum_{i\in I}\sum_{j\notin I} \pi_i P_{ij} = \sum_{j\notin I}\sum_{i\in I} \pi_j P_{ji}.$$

2. Interpréter ces équations.

**Exercice 2** (File d'attente)**.** On considère un modèle de file d'attente : des clients arrivent et font la queue à un guichet, qui sert une personne à la fois. On note $X_n$ le nombre de clients dans la file (y compris celui en train d'être servi) juste avant le départ du $n$-ième client, et $A_n$ le nombre de clients arrivant entre le début et la fin du service du $n$-ième client. On a donc la relation suivante :

$$X_{n+1} = \max(X_n - 1, 0) + A_{n+1}.$$

On suppose de plus que les $A_n$ sont i.i.d et indépendantes des $X_n$.

1. Justifier que $X_n$ est une chaîne de Markov homogène, et préciser son ensemble d'états.
2. À quelle condition cette chaîne est-elle irréductible ? Quelle est sa période ?

   On note $\Phi$ la fonction génératrice des $A_n$, et $\Psi_n$ celle de $X_n$.
3. Donner une relation entre $\Psi_n$ et $\Psi_{n+1}$.
4. On suppose qu'on est dans le cas stationnaire, i.e. $\Psi_n = \Psi_{n+1}$. Montrer que $\mathbb{E}(A_n) \leq 1$, et que si $\mathbb{E}(A_n) = 1$, alors $A_n = 1$ presque sûrement. Que se passe-t-il dans le dernier cas ?

**Exercice 3** (Processus de naissance et de mort)**.** Soient $(p_i), (q_i)$ et $(r_i)$ trois suites telles que pour tout $i \geq 0$, $p_i > 0$, $q_i > 0$ (sauf $q_0 = 0$), $r_i \geq 0$ et $p_i + q_i + r_i = 1$. On considère une chaîne de Markov avec matrice de transition $P$ telle que $P_{ii} = r_i$, $P_{i(i+1)} = p_i$ et $P_{i(i-1)} = q_i$.

1. Donner une représentation graphique de cette chaîne de Markov.
2. Sous quelle condition cette chaîne a-t-elle une unique distribution stationnaire ? La déterminer le cas échéant.

# Algorithme PageRank

**Exercice 4.** Comme dans le cours, on note $M$ la matrice carrée telle que $M_{ij} = \frac{1}{d^+(i)}$ si $i \to j$ et zero sinon. Si $i$ est une feuille, i.e. n'a pas de lien sortant alors la ligne $i$ de la matrice $M$ est nulle. On définit $\overline{M}$ la matrice carrée où chacune de ces lignes nulles est remplacée par une ligne $(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$.

1. Montrer que 1 est valeur propre de $\overline{M}$ et toute valeur propre (complexe) $\lambda$ de $\overline{M}$ vérifie $|\lambda| \leq 1$. On définit alors $\tilde{M} = \alpha\overline{M} + (1-\alpha)\mathbf{1}p^T$ où $p$ est un vecteur de probabilité. Remarquer que le cas $p = \frac{1}{n}\mathbf{1}$ est le cas vu en cours.
2. Montrer qu'il existe une matrice non-singulière $P = (\mathbf{1}\ X)$ telle que :
$$P^{-1}\overline{M}P = \begin{pmatrix} 1 & A \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$
3. En utilisant $P$, montrer que les valeurs propres de $\tilde{M}$ sont $\{1, \alpha\lambda_2, \dots, \alpha\lambda_n\}$ où $\{1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ sont les valeurs propres de $\overline{M}$.
4. Conclure sur la vitesse de convergence de l'algorithme PageRank.
5. On définit le vecteur $\mathbf{a}$ par $a_i = 1$ si la ligne $i$ de $M$ correspond à une feuille, et 0 sinon. Montrer que l'algorithme PageRank calcule $\pi$ qui satisfait $\pi^T(I - \alpha M) = v^T$ avec $v$ un vecteur à déterminer.
6. Montrer que $I - \alpha M$ est inversible pour $\alpha < 1$.
7. En écrivant
$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
montrer que $I - \alpha M_{11}$ est inversible puisque l'algorithme suivant calcule le vecteur $\pi$ :
   (a) résoudre : $\pi_1^T(I - \alpha M_{11}) = v_1^T$.
   (b) calculer : $\pi_2^T = \alpha\pi_1^T M_{12} + v_2^T$.
   (c) normaliser $\pi = \frac{1}{\|\pi_1\|_1 + \|\pi_2\|_1}(\pi_1, \pi_2)$.
   Quel est l'intérêt de cet algorithme ?