Modèles et algorithmes de réseaux

Chaînes de Markov – reversibilité

Ana Busic

Inria Paris - DI ENS

http://www.di.ens.fr/~busic/

Paris, Octobre 2018

Chaînes de Markov reversibles

Soit $\{X_t\}_{t\geq 0}$ une chaîne de Markov avec l'espace d'états $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ et la matrice de transition P. Une distribution de probabilités π sur S est dite reversible si pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\pi_i P_{i,j} = \pi_j P_{j,i}.$$

Chaînes de Markov reversibles

Soit $\{X_t\}_{t\geq 0}$ une chaîne de Markov avec l'espace d'états $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ et la matrice de transition P. Une distribution de probabilités π sur S est dite reversible si pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\pi_i P_{i,j} = \pi_j P_{j,i}.$$

Theorem

Si π est une distribution reversible, alors elle est aussi une distribution stationnaire.

Chaînes de Markov reversibles

Soit $\{X_t\}_{t\geq 0}$ une chaîne de Markov avec l'espace d'états $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ et la matrice de transition P. Une distribution de probabilités π sur S est dite reversible si pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\pi_i P_{i,j} = \pi_j P_{j,i}.$$

Theorem

Si π est une distribution reversible, alors elle est aussi une distribution stationnaire.

Démonstration.

Pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, on a

$$\pi_j = \pi_j \sum_{i=1}^{n} P_{j,i} = \sum_{i=1}^{n} \pi_j P_{j,i} = \sum_{i=1}^{n} \pi_i P_{i,j}.$$

$\square$

Temps inverse

Theorem

Soit $\{X_t\}_{t\geq 0}$ *une chaîne de Markov avec l'espace d'états* S *et la matrice de transition* P *et la distribution stationnaire* π *reversible.*

Si $X_0 \sim \pi$*, alors pour tout* $k \in \mathbb{N}$ *et tous* $s_{i_0}, s_{i_1}, \ldots, s_{i_k} \in S$*,*

$$P(X_0 = s_{i_0}, X_1 = \ldots, X_k = s_{i_k}) = P(X_0 = s_{i_k}, X_1 = s_{i_{k-1}}, \ldots, X_k = s_{i_0}).$$

La probabilité d'un chemin dans un sens est égale à la probabilité du même chemin dans le sens inverse.

Exemple : processus de naissance et de mort

Matrice de transition P telle que :

- $P_{i,j} > 0$ si $|i-j| = 1$,
- $P_{i,j} = 0$ si $|i-j| \geq 2$.

Notons par

$$\pi_i^* = \frac{\prod_{k=1}^{i-1} P_{k,k+1}}{\prod_{k=1}^{i-1} P_{k+1,k}}.$$

Alors,

$$\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n) = (\pi_1^*, \ldots, \pi_n^*)/(\sum_{i=1}^{n} \pi_i^*)$$

est une distribution de probabilités reversible.

Exemple : marche aléatoire sur un graphe

Un graphe $G = (V, E)$ avec les sommets $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ et les arêtes $E = \{e_1, \dots, e_m\}$. Soit d_i le degré du sommet v_i.

Exemple : marche aléatoire sur un graphe

Un graphe $G = (V, E)$ avec les sommets $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ et les arêtes $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$. Soit d_i le degré du sommet v_i.

Un marcheur qui est au sommet v_i à l'instant t change sa position pour un sommet voisin de v_i avec la même probabilité pour tous les voisins.

Exemple : marche aléatoire sur un graphe

Un graphe $G = (V, E)$ avec les sommets $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ et les arêtes $E = \{e_1, \dots, e_m\}$. Soit d_i le degré du sommet v_i.

Un marcheur qui est au sommet v_i à l'instant t change sa position pour un sommet voisin de v_i avec la même probabilité pour tous les voisins.

Matrice de transition P :

$$P_{i,j} = 1/d_i, \text{ si } (v_i, v_j) \in E$$

et sinon $P_{i,j} = 0$.

Exemple : marche aléatoire sur un graphe

Un graphe $G = (V, E)$ avec les sommets $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ et les arêtes $E = \{e_1, \dots, e_m\}$. Soit d_i le degré du sommet v_i.

Un marcheur qui est au sommet v_i à l'instant t change sa position pour un sommet voisin de v_i avec la même probabilité pour tous les voisins.

Matrice de transition P :

$$P_{i,j} = 1/d_i, \text{ si } (v_i, v_j) \in E$$

et sinon $P_{i,j} = 0$.

Alors,

$$\pi = (d_1, \dots, d_n)/(\sum_{i=1}^{n} d_i)$$

est une distribution de probabilités reversible.

Processus en temps retourné

Processus en temps retourné

Soit $\{X_t\}$ un processus stationnaire et irréductible. On construit $\{X_t^*\}$ en inversant le temps :

$$\boxed{X_t^* = X_{\tau - t}}$$

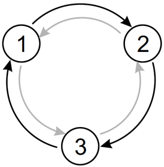
Remarque : τ n'est pas important, il determine uniquement l'origine pour le processus retourné.

Applications

- Permet de mieux comprendre les propriétés d'un processus.
- Le processus de départs des files plus facile à analyser. Les preuves plus élégantes.
- Parfois plus facile de "deviner" la forme de la loi stationnaire.

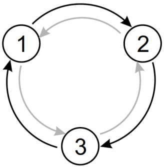
Processus en temps retourné

En général, $\{X_t^*\}$ est différent de $\{X_t\}$.
Exemple : processus cyclique.



Processus en temps retourné

En général, $\{X_t^*\}$ est différent de $\{X_t\}$.
Exemple : processus cyclique.

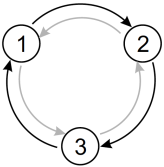


Loi stationnaire
Thm. Suppose que $\{X_t\}$ a la distribution stationnaire π, $\pi_i = \mathbf{P}(X_t = i)$.
Alors $\{X_t^*\}$ a aussi une loi stationnaire π^* et

$$\boxed{\pi^* = \pi}$$

Processus en temps retourné

En général, $\{X_t^*\}$ est différent de $\{X_t\}$.
Exemple : processus cyclique.



Loi stationnaire

Thm. Suppose que $\{X_t\}$ a la distribution stationnaire π, $\pi_i = \mathbf{P}(X_t = i)$. Alors $\{X_t^*\}$ a aussi une loi stationnaire π^* et

$$\boxed{\pi^* = \pi}$$

Preuve. π_i et π_i^* représentent les proportions de temps que $\{X_t\}$ et $\{X_t^*\}$ passent en état i. Cette proportion ne dépend pas de la direction du temps.

Temps discret

Prop. Le processus retourné $\ldots, X_{n+1}, X_n, X_{n-1}, \ldots$ d'une chaîne de Markov stationnaire en temps discret $\ldots, X_{n-1}, X_n, X_{n+1}, \ldots$ est aussi une chaîne de Markov stationnaire.

Les probabilités de transitions sont

$$P^*_{i,j} = \mathbf{P}(X_n = j | X_{n+1} = i) = \frac{\pi_j P_{j,i}}{\pi_i}.$$

Processus réversible

Déf. Si les processus $\{X_n\}$ et $\{X_n^*\}$ sont statistiquement non-distinguables, on dit que $\{X_n\}$ est réversible (en temps).

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}) \sim (X^*_{\tau-t_1}, X^*_{\tau-t_2}, \dots, X^*_{\tau-t_n})$$

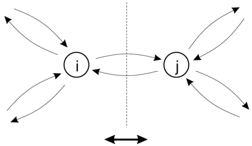
pour tout n, τ et $t_1, \dots, t_n$.

Intuitivement : un spectateur ne peut pas dire si le "film" est projeté en avant ou en arrière.

CMH réversible

$p^*_{i,j} = p_{i,j}, \forall i, j$, i.e. $\boxed{\pi_i p_{i,j} = \pi_j p_{j,i}, \forall i, j}$

Équations de balance détaillée : les flots de probabilité entre deux états sont en équilibre.



- Balance détaillée $\Rightarrow$ balance globale
- Si les conditions de balance détaillée sont vérifiées pour un vecteur π positif et tel que $\sum_i \pi_i < \infty$, alors π normalisé tel que $\sum_i \pi_i = 1$ est la loi stationnaire.
- Mais balance globale $\not\Rightarrow$ balance détaillée (tous les processus de Markov ne sont pas réversibles).

Exemple : les arbres sont réversibles

Prop. Si une CMH est reversible, alors son graphe de transition est symétrique.

Exemple : les arbres sont réversibles

Prop. Si une CMH est reversible, alors son graphe de transition est symétrique.

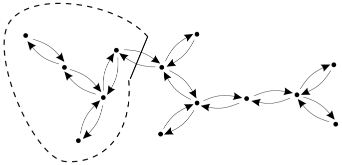
Prop. Si le graphe de transition non-orienté d'une CMH est un arbre, alors le processus réversible.

Exemple : les arbres sont réversibles

Prop. Si une CMH est reversible, alors son graphe de transition est symétrique.

Prop. Si le graphe de transition non-orienté d'une CMH est un arbre, alors le processus réversible.

Preuve. En utilisant la propriété suivante (en exercice)
Pour une CMH avec espace d'états S, les équations d'équilibre global ($\pi P = \pi$) sont équivalentes à :
$\forall I \subset S, \quad \sum_{i \in I} \sum_{j \notin I} \pi_i P_{i,j} = \sum_{i \in I} \sum_{j \notin I} \pi_j P_{j,i}.$

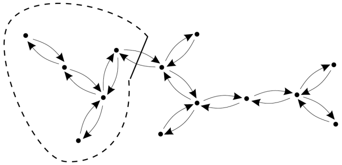


Exemple : les arbres sont réversibles

Prop. Si une CMH est reversible, alors son graphe de transition est symétrique.

Prop. Si le graphe de transition non-orienté d'une CMH est un arbre, alors le processus réversible.

Preuve. En utilisant la propriété suivante (en exercice)
Pour une CMH avec espace d'états S, les équations d'équilibre global ($\pi P = \pi$) sont équivalentes à :
$\forall I \subset S, \quad \sum_{i \in I} \sum_{j \notin I} \pi_i P_{i,j} = \sum_{i \in I} \sum_{j \notin I} \pi_j P_{j,i}$.

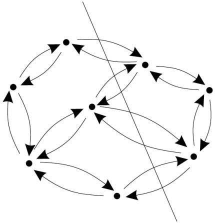


Cor. Tous les CMH de naissance et de mort sont réversibles.

Troncation d'un processus réversible

Soit $\{X_n\}$ une CMH avec l'espace d'états S et la loi stationnaire π. Soit $S' \subset S$. CMH tronqué $\{X_n'\}$ défini par :

$$p'_{i,j} = p_{i,j}, \quad i,j \in \mathcal{E}'; \quad p'_{i,i} = 1 - \sum_{j \neq i} p_{ij}$$



Prop. Si $\{X_n'\}$ est irréductible, alors $\{X_n'\}$ est réversible et sa distribution stationnaire est

$$\boxed{\pi'_i = \frac{\pi_i}{\sum_{j \in \mathcal{E}'} \pi_j}}$$