Monoïdes, semi-anneaux, dioïdes...

— **Semi-groupe :** un ensemble E muni d'une loi de composition (binaire) interne associative notée $\oplus$:

$$a \oplus b \in E \quad \forall a, b \in E$$
$$(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c) \quad \forall a, b, c \in E.$$

Si l'opération $\oplus$ est commutative, alors le semi-groupe $(E, \oplus)$ est dit **commutatif**. L'**élément neutre** d'un semi-groupe $(E, \oplus)$, noté ϵ, est défini par la propriété :

$$\epsilon \oplus x = x \oplus \epsilon = x \quad \forall x \in E.$$

Si un semi-groupe possède un élément neutre ϵ, alors cet élément neutre est unique. En effet, si ϵ' était un autre élément neutre, on aurait $\epsilon \oplus \epsilon' = \epsilon = \epsilon'$.

— **Monoïde :** un semi-groupe muni d'un élément neutre. Un élément x d'un monoïde $(E, \oplus)$ admet un **inverse** s'il existe un élément x' tel que :

$$x \oplus x' = x' \oplus x = \epsilon.$$

— **Groupe :** un monoïde dans lequel tout élément a un inverse.

— **Semi-anneau :** une structure algébrique $(E, \oplus, \otimes)$ formée d'un ensemble de base E et de deux lois de composition internes avec les propriétés suivantes :

1. $(E, \oplus)$ est un monoïde commutatif (avec l'élément neutre noté ϵ),
2. $(E, \otimes)$ est un monoïde (avec l'élément neutre noté e),
3. l'élément neutre de $(E, \oplus)$ est un élément absorbant pour $\otimes$, c.à.d. :

$$\forall a \in E : a \otimes \epsilon = \epsilon \otimes a = \epsilon,$$

4. $a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$ $\forall a, b, c \in E$ (distributivité à gauche),
   $(a \oplus b) \otimes c = (a \otimes c) \oplus (b \otimes c)$ $\forall a, b, c \in E$ (distributivité à droite).

— **Anneau :** un semi-anneau $(E, \oplus, \otimes)$ dans lequel $(E, \oplus)$ est un groupe commutatif.

— **Corps :** un anneau $(E, \oplus, \otimes)$ dans lequel $(E, \otimes)$ est un groupe. Lorsque $\otimes$ est commutative, on parle de corps commutatif.

— **Préordre canonique :** dans un monoïde $(E, \oplus)$ on peut toujours définir une relation binaire réflexive et transitive, notée $\preceq$, par :

$$a \preceq b \;\Leftrightarrow\; \exists c \in E \quad \text{tel que } b = a \oplus c.$$

Comme l'antisymétrie de $\preceq$ n'est pas automatiquement vérifiée, $\preceq$ est seulement une relation de préordre, appelée la **relation de préordre canonique** de $(E, \oplus)$. Dans un monoïde commutatif $(E, \oplus)$, la relation de préordre canonique est **compatible avec la loi** $\oplus$, c.à.d. :

$$a \preceq b \;\Rightarrow\; a \oplus c \preceq b \oplus c \quad \forall c \in E.$$

Un monoïde commutatif est **canoniquement ordonné** lorsque la relation de préordre canonique est une relation d'ordre, c.à.d. satisfait en plus la propriété d'antisymétrie :

$$a \preceq b \text{ et } b \preceq a \;\Rightarrow\; a = b.$$

Proposition 1. Si $\oplus$ est commutative et *idempotente* (c.à.d. $\forall a \in E \ a \oplus a = a$), alors la relation de préordre canonique $\preceq$ est une relation d'ordre.

Démonstration. Soit $(E, \oplus)$ un monoïde commutatif idempotent et $a, b \in E$ tel que $a \preceq b$ et $b \preceq a$. Alors,

$$a \preceq b \;\Rightarrow\; \exists c \;:\; b = a \oplus c,$$
$$b \preceq a \;\Rightarrow\; \exists d \;:\; a = b \oplus d.$$

Ainsi, $a = a \oplus c \oplus d$ and $b = a \oplus c = (a \oplus c \oplus d) \oplus c = a \oplus c \oplus d = a$, ce qui démontre l'antisymétrie.

Proposition 2. Si $\oplus$ est commutative et *sélective* (c.à.d. $a \oplus b \in \{a, b\}$), alors la relation de préordre canonique $\preceq$ est une relation d'ordre total (c.à.d. pour tout $a, b \in E :$ soit $a \preceq b$ soit $b \preceq a$).

Démonstration. Sélectivité implique l'idempotence, donc $\preceq$ est une relation d'ordre. Pour montrer que c'est bien un ordre total, il suffit d'observer que pour tout $a, b \in E$, $a \oplus b \in \{a, b\}$ implique $a \preceq b$ ou $b \preceq a$.

— **Dioïde :** un semi-anneau $(E, \oplus, \otimes)$ dans lequel la relation de préordre canonique relativement à $\oplus$ est une relation d'ordre (c.à.d. vérifie : $a \preceq b$ et $b \preceq a \;\Rightarrow\; a = b$.)

Proposition 3. Un monoïde non-trivial (c.à.d. ayant au moins 2 éléments différents) ne peut être à la fois un groupe et être canoniquement ordonné.

Démonstration. Supposons que $(E, \oplus)$ est un groupe canoniquement ordonné et $a, b \in E$, $a \neq b$. Notons par $c = b^{-1} \oplus a$ et $d = a^{-1} \oplus b$. Alors, $a = b \oplus c$ et $b = a \oplus d$, ce qui implique $b \preceq a$ et $a \succeq b$. Puisque $(E, \oplus)$ est canoniquement ordonné, on obtient $a = b$, ce qui est une contradiction.

Corollaire 1. Un semi-anneau ne peut être à la fois un anneau et un dioïde.

Références

[1] M. Gondran and M. Minoux. *Graphes, dioïdes et semi-anneaux : nouveaux modèles et algorithmes.* Editions Technique et Documentation, Paris, 2001.