Modèles et algorithmes des réseaux

Processus de Markov et les files d'attente

Ana Busic

Inria Paris - DI ENS

http://www.di.ens.fr/~busic/
ana.busic@inria.fr

Paris, Novembre 2018

Plan

Files d'attente

Histoire :

- Début en 1909 : Agner Erlang (ingénieur néerlandais)
- Jusqu'à 1960s : réseaux téléphoniques - phénomène d'aggregation justifie l'hypothèse des arrivées selon un processus de Poisson
  Question : combien e lignes (serveurs) on a besoin pour ne pas rejeter des appels ?
- 1960s Leonel Kleinrock - les réseaux de files d'attente
  fondation théorique pour les réseaux à commutation des paquets
- Applications aujourd'hui : réseaux de communication, centres de calcul, traffic routier, hôpitaux, centres d'appel, réseaux biologiques, smart-grids . . .

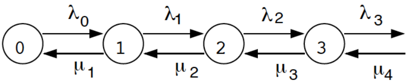
Notation de Kendall (1953)

M/M/1, M/M/K, M/M/∞, M/G/K/m/SRPT, . . .

- Première lettre : arrivées (M - markovien, G - général ou D - deterministe)
- Deuxième : service (M, G ou D)
- Troisième : nombre de serveurs
- Quatrième : taille de la file (∞ par défaut)
- Cinquième : politique de service (FIFO par défaut)

File M/M/1

Processus de naissance et de mort

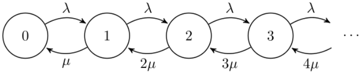


Loi invariante : $\pi^*(i) = \prod_{k=0}^{i-1} \frac{\lambda_k}{\mu_{k+1}}, i \geq 0$.
Distribution stationnaire existe si $\sum_k \pi^*(k) < \infty$ et $\pi(i) = \frac{\pi^*(i)}{\sum_k \pi^*(k)}$.

File M/M/1

- $\lambda_i = \lambda, \mu_i = \mu, \ \forall i$
- Notation : $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ (intensité de traffic)
- $\pi^*(i) = (\frac{\lambda}{\mu})^i = \rho^i, \ \forall i$
- Distribution stationnaire existe si $\rho < 1$, et alors $\pi(i) = (1 - \rho)\rho^i, \ \forall i$

File M/M/∞



Générateur :

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & & & \\ \mu & -(\mu+\lambda) & \lambda & & \\ & 2\mu & -(2\mu+\lambda) & \lambda & \\ & & 3\mu & -(3\mu+\lambda) & \lambda \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Loi invariante : $\pi^*(i) = \prod_{k=0}^{i-1} \frac{\lambda}{(k+1)\mu} = \frac{1}{i!}(\frac{\lambda}{\mu})^i, i \geq 0.$

$$\sum_i \pi^*(i) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i = e^{\frac{\lambda}{\mu}}.$$

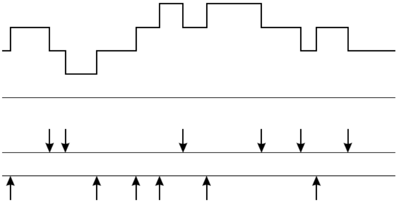
Distribution stationnaire existe toujours !

$$\pi(i) = \frac{e^{-\frac{\lambda}{\mu}}}{i!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i, i \geq 0$$

Théorème de Burke

Dans une file d'attente M/M/1, avec les arrivées $Poiss(\lambda)$

- Les départs forment un processus de Poisson de paramètre λ.
- Pour tout t, X_t (nb. de paquets dans la file à la date t) est indépendant des départs avant la date t.



Aussi vrai pour M/M/m et M/M/∞.

Théorème de Burke

Remarques :

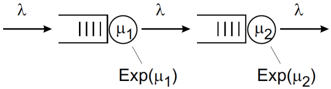
- On observant beaucoup de départs, on a une indication que la file a probablement eu plus de paquets que habituellement, mais on ne sait rien sur le nombre actuel de paquets !
- En observant les départs, on n'a pas le moyen d'estimer le temps moyen de service $1/\mu$.
- Généralisation à des réseaux acycliques.

Théorème de Burke

Remarques :

- On observant beaucoup de départs, on a une indication que la file a probablement eu plus de paquets que habituellement, mais on ne sait rien sur le nombre actuel de paquets !
- En observant les départs, on n'a pas le moyen d'estimer le temps moyen de service $1/\mu$.
- Généralisation à des réseaux acycliques.

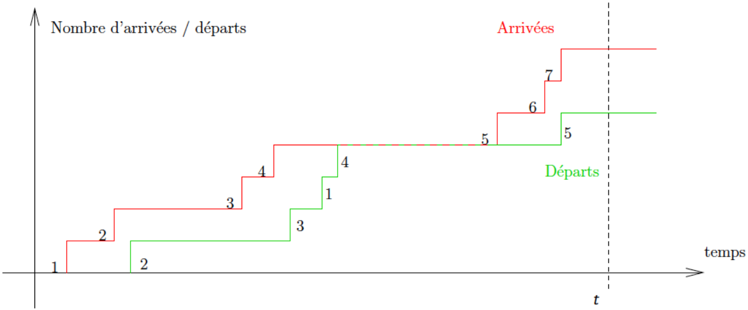
Exemple : files en tandem.



Distribution stationnaire : $\rho_i = \lambda_i/\mu_i, i = 1, 2,$

$$\boxed{\pi_{i,j} = \mathbf{P}(X_1 = i, X_2 = j) = (1-\rho_1)(1-\rho_2)\rho_1^i \rho_2^j}$$

Formule de Little

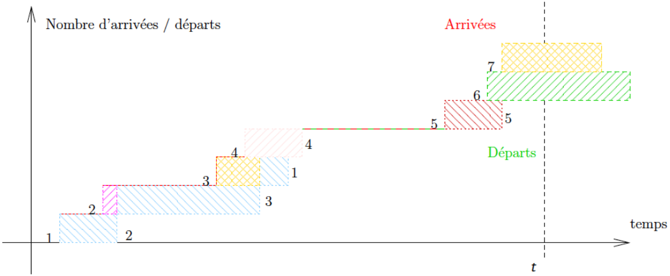


Notation :

- $\mathcal{A}(t)$ les arrivées pendant $[0, t]$, $A(t) = |\mathcal{A}(t)|$
- $\mathcal{D}(t)$ les départs pendant $[0, t]$, $D(t) = |\mathcal{D}(t)|$
- $N(t) = A(t) - D(t)$ nombre de paquets au temps t

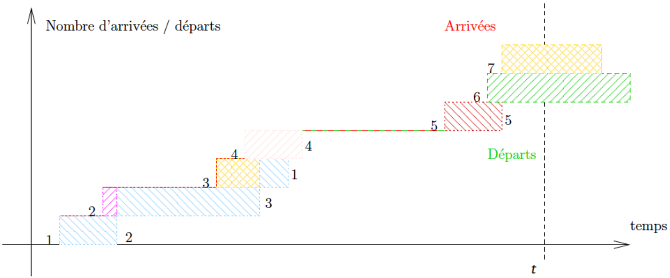
Formule de Little

- $\mathcal{A}(t)$ les arrivées pendant $[0, t]$, $A(t) = |\mathcal{A}(t)|$
- $\mathcal{D}(t)$ les départs pendant $[0, t]$, $D(t) = |\mathcal{D}(t)|$
- $N(t) = A(t) - D(t)$ nombre de paquets au temps t
- T_i le temps du séjour du paquet i



Formule de Little

- $\mathcal{A}(t)$ les arrivées pendant $[0,t]$, $A(t) = |\mathcal{A}(t)|$
- $\mathcal{D}(t)$ les départs pendant $[0,t]$, $D(t) = |\mathcal{D}(t)|$
- $N(t) = A(t) - D(t)$ nombre de paquets au temps t
- T_i le temps du séjour du paquet i



Pout tout t,

$$\sum_{i \in \mathcal{D}(t)} T_i \leq \int_0^t N(s)ds \leq \sum_{i \in \mathcal{A}(t)} T_i.$$

Formule de Little

Hypothèses :

- $\lim_{t\to\infty} \frac{A(t)}{t} = \lambda$ taux d'arrivées
- $\lim_{t\to\infty} \frac{D(t)}{t} = \chi$ débit du système
- Un système ouvert stable : $\lambda = \chi$
- $\mathbf{E}[N] = \lim_{t\to\infty} \mathbf{E}[N(t)] < \infty$ le nombre moyen de paquets dans régime stationnaire

Nous avons

$$\mathbf{E}[N] = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t N(s)ds.$$

Formule de Little

Pout tout t,

$$\sum_{i \in \mathcal{D}(t)} T_i \quad \leq \quad \int_0^t N(s) ds \quad \leq \quad \sum_{i \in \mathcal{A}(t)} T_i$$

Formule de Little

Pout tout t,

$$\sum_{i\in\mathcal{D}(t)} T_i \leq \int_0^t N(s)ds \leq \sum_{i\in\mathcal{A}(t)} T_i$$

$$\frac{\sum_{i\in\mathcal{D}(t)} T_i}{t} \leq \frac{\int_0^t N(s)ds}{t} \leq \frac{\sum_{i\in\mathcal{A}(t)} T_i}{t}$$

Formule de Little

Pout tout t,

$$\begin{array}{ccccc}
\displaystyle\sum_{i\in\mathcal{D}(t)} T_i & \leq & \int_0^t N(s)ds & \leq & \displaystyle\sum_{i\in\mathcal{A}(t)} T_i \\
\dfrac{\sum_{i\in\mathcal{D}(t)} T_i}{t} & \leq & \frac{\int_0^t N(s)ds}{t} & \leq & \dfrac{\sum_{i\in\mathcal{A}(t)} T_i}{t} \\
\dfrac{D(t)}{t}\dfrac{\sum_{i\in\mathcal{D}(t)} T_i}{D(t)} & \leq & \frac{\int_0^t N(s)ds}{t} & \leq & \dfrac{A(t)}{t}\dfrac{\sum_{i\in\mathcal{A}(t)} T_i}{A(t)}
\end{array}$$

Formule de Little

Pout tout t,

$$\begin{array}{ccccc}
\displaystyle\sum_{i\in\mathcal{D}(t)} T_i & \leq & \int_0^t N(s)ds & \leq & \displaystyle\sum_{i\in\mathcal{A}(t)} T_i \\
\dfrac{\sum_{i\in\mathcal{D}(t)} T_i}{t} & \leq & \frac{\int_0^t N(s)ds}{t} & \leq & \dfrac{\sum_{i\in\mathcal{A}(t)} T_i}{t} \\
\dfrac{D(t)}{t}\dfrac{\sum_{i\in\mathcal{D}(t)} T_i}{D(t)} & \leq & \frac{\int_0^t N(s)ds}{t} & \leq & \dfrac{A(t)}{t}\dfrac{\sum_{i\in\mathcal{A}(t)} T_i}{A(t)}
\end{array}$$

Quand $t \to \infty$,

$$\chi\mathbf{E}[T] \quad \leq \quad \mathbf{E}[N] \quad \leq \quad \lambda\mathbf{E}[T]$$

Formule de Little

Pout tout t,

$$\begin{array}{ccccc}
\sum_{i\in\mathcal{D}(t)} T_i & \leq & \int_0^t N(s)ds & \leq & \sum_{i\in\mathcal{A}(t)} T_i \\
\frac{\sum_{i\in\mathcal{D}(t)} T_i}{t} & \leq & \frac{\int_0^t N(s)ds}{t} & \leq & \frac{\sum_{i\in\mathcal{A}(t)} T_i}{t} \\
\frac{D(t)}{t}\frac{\sum_{i\in\mathcal{D}(t)} T_i}{D(t)} & \leq & \frac{\int_0^t N(s)ds}{t} & \leq & \frac{A(t)}{t}\frac{\sum_{i\in\mathcal{A}(t)} T_i}{A(t)}
\end{array}$$

Quand $t \to \infty$,

$$\begin{array}{ccccc}
\chi\mathbf{E}[T] & \leq & \mathbf{E}[N] & \leq & \lambda\mathbf{E}[T] \\
\lambda\mathbf{E}[T] & \leq & \mathbf{E}[N] & \leq & \lambda\mathbf{E}[T]
\end{array}$$

Formule de Little

Pout tout t,

$$\begin{array}{ccccc}
\sum_{i \in \mathcal{D}(t)} T_i & \leq & \int_0^t N(s)ds & \leq & \sum_{i \in \mathcal{A}(t)} T_i \\
\frac{\sum_{i \in \mathcal{D}(t)} T_i}{t} & \leq & \frac{\int_0^t N(s)ds}{t} & \leq & \frac{\sum_{i \in \mathcal{A}(t)} T_i}{t} \\
\frac{D(t)}{t} \frac{\sum_{i \in \mathcal{D}(t)} T_i}{D(t)} & \leq & \frac{\int_0^t N(s)ds}{t} & \leq & \frac{A(t)}{t} \frac{\sum_{i \in \mathcal{A}(t)} T_i}{A(t)}
\end{array}$$

Quand $t \to \infty$,

$$\begin{array}{ccccc}
\chi \mathbf{E}[T] & \leq & \mathbf{E}[N] & \leq & \lambda \mathbf{E}[T] \\
\lambda \mathbf{E}[T] & \leq & \mathbf{E}[N] & \leq & \lambda \mathbf{E}[T]
\end{array}$$

Formule de Little :

$$\boxed{\mathbf{E}[N] = \lambda \mathbf{E}[T]}$$

Remarque : pas d'hypothèse d'un seul serveur, pas d'hypothèse FIFO.
Très général !

Example : M/M/1

Rappels : $\rho := \frac{\lambda}{\mu}$, stabilité si $\rho < 1$, et

$$\pi(i) = \rho^i(1-\rho), \ \forall i.$$

- Utilisation - la fraction de temps le serveur est occupé : $1 - \mu_0 = \rho$

Example : M/M/1

Rappels : $\rho := \frac{\lambda}{\mu}$, stabilité si $\rho < 1$, et

$$\pi(i) = \rho^i(1-\rho), \ \forall i.$$

- Utilisation - la fraction de temps le serveur est occupé : $1 - \mu_0 = \rho$
- $E[N] = \sum_i \rho^i(1-\rho) = \rho E[\mathrm{Geo}(1-\rho)] = \frac{\rho}{1-\rho}$

Example : M/M/1

Rappels : $\rho := \frac{\lambda}{\mu}$, stabilité si $\rho < 1$, et

$$\pi(i) = \rho^i (1-\rho), \ \forall i.$$

- Utilisation - la fraction de temps le serveur est occupé : $1 - \mu_0 = \rho$
- $E[N] = \sum_i \rho^i (1-\rho) = \rho E[\mathrm{Geo}(1-\rho)] = \frac{\rho}{1-\rho}$
- $Var(N) = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$

Example : M/M/1

Rappels : $\rho := \frac{\lambda}{\mu}$, stabilité si $\rho < 1$, et

$$\pi(i) = \rho^i(1-\rho), \ \forall i.$$

- Utilisation - la fraction de temps le serveur est occupé : $1 - \mu_0 = \rho$
- $E[N] = \sum_i \rho^i(1-\rho) = \rho E[\mathrm{Geo}(1-\rho)] = \frac{\rho}{1-\rho}$
- $Var(N) = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$
- $E[T] = \frac{E[N]}{\lambda} = \frac{\rho}{(1-\rho)\lambda} = \frac{1}{\mu(1-\rho)} = \frac{1}{\mu-\lambda}$

Example : M/M/1

Rappels : $\rho := \frac{\lambda}{\mu}$, stabilité si $\rho < 1$, et

$$\pi(i) = \rho^i(1-\rho), \ \forall i.$$

- Utilisation - la fraction de temps le serveur est occupé : $1 - \mu_0 = \rho$
- $E[N] = \sum_i \rho^i(1-\rho) = \rho E[\mathrm{Geo}(1-\rho)] = \frac{\rho}{1-\rho}$
- $Var(N) = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$
- $E[T] = \frac{E[N]}{\lambda} = \frac{\rho}{(1-\rho)\lambda} = \frac{1}{\mu(1-\rho)} = \frac{1}{\mu-\lambda}$
- Débit (le taux des départs - fraction de temps serveur occupé · taux de service) : $\chi = \frac{\lambda}{\mu}\mu = \lambda$.
  Ne dépend pas de μ !

Example : M/M/1

Rappels : $\rho := \frac{\lambda}{\mu}$, stabilité si $\rho < 1$, et

$$\pi(i) = \rho^i (1-\rho), \ \forall i.$$

- Utilisation - la fraction de temps le serveur est occupé : $1 - \mu_0 = \rho$
- $E[N] = \sum_i \rho^i (1-\rho) = \rho E[\mathrm{Geo}(1-\rho)] = \frac{\rho}{1-\rho}$
- $Var(N) = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$
- $E[T] = \frac{E[N]}{\lambda} = \frac{\rho}{(1-\rho)\lambda} = \frac{1}{\mu(1-\rho)} = \frac{1}{\mu-\lambda}$
- Débit (le taux des départs - fraction de temps serveur occupé $\cdot$ taux de service) : $\chi = \frac{\lambda}{\mu}\mu = \lambda$.
  Ne dépend pas de μ !
- Temps d'attente : $E[W] = E[T] - \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\lambda-\mu} - \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{\rho}{\mu-\lambda}$.

Example : M/M/1

Rappels : $\rho := \frac{\lambda}{\mu}$, stabilité si $\rho < 1$, et

$$\pi(i) = \rho^i(1-\rho), \ \forall i.$$

- Utilisation - la fraction de temps le serveur est occupé : $1 - \mu_0 = \rho$
- $E[N] = \sum_i \rho^i(1-\rho) = \rho E[\mathrm{Geo}(1-\rho)] = \frac{\rho}{1-\rho}$
- $Var(N) = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$
- $E[T] = \frac{E[N]}{\lambda} = \frac{\rho}{(1-\rho)\lambda} = \frac{1}{\mu(1-\rho)} = \frac{1}{\mu-\lambda}$
- Débit (le taux des départs - fraction de temps serveur occupé $\cdot$ taux de service) : $\chi = \frac{\lambda}{\mu}\mu = \lambda$.
  Ne dépend pas de μ !
- Temps d'attente : $E[W] = E[T] - \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\lambda-\mu} - \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{\rho}{\mu-\lambda}$.
- Si λ augmente, toutes ces métriques augmentent !

PASTA

Question : comment lier les valeurs stationnaires avec ce qui voit un paquet à son arrivée ?

Notation :

- a_n fraction des arrivées qui voient n paquets dans le système
- p_n fraction de temps avec n paquets dans le système
- d_n fraction de paquets qui laissent n paquets dans le système à leur départ

Question : $a_n = p_n$ toujours ?

PASTA

Question : comment lier les valeurs stationnaires avec ce qui voit un paquet à son arrivée ?

Notation :

- a_n fraction des arrivées qui voient n paquets dans le système
- p_n fraction de temps avec n paquets dans le système
- d_n fraction de paquets qui laissent n paquets dans le système à leur départ

Question : $a_n = p_n$ toujours ? no

PASTA

Question : comment lier les valeurs stationnaires avec ce qui voit un paquet à son arrivée ?

Notation :

- a_n fraction des arrivées qui voient n paquets dans le système
- p_n fraction de temps avec n paquets dans le système
- d_n fraction de paquets qui laissent n paquets dans le système à leur départ

Question : $a_n = p_n$ toujours ? no

Question : $a_n = d_n$?

PASTA

Question : comment lier les valeurs stationnaires avec ce qui voit un paquet à son arrivée ?

Notation :

- a_n fraction des arrivées qui voient n paquets dans le système
- p_n fraction de temps avec n paquets dans le système
- d_n fraction de paquets qui laissent n paquets dans le système à leur départ

Question : $a_n = p_n$ toujours ? no

Question : $a_n = d_n$? oui si les paquets arrivent et partent 1 à la fois.

PASTA

Théorème PASTA (Poisson Arrivals See Time Averages)
Si le processus des arrivées est Poisson et les arrivées après t sont indépendantes de $N(t)$ (pas d'anticipation), alors $a_n = p_n$.

PASTA

Théorème PASTA (Poisson Arrivals See Time Averages)
Si le processus des arrivées est Poisson et les arrivées après t sont indépendantes de $N(t)$ (pas d'anticipation), alors $a_n = p_n$.

Démonstration.

$$
\begin{aligned}
p_n &= \lim_{t\to\infty} \mathbf{P}(N(t) = n) \\
a_n &= \lim_{t\to\infty} \lim_{\delta\to 0} \mathbf{P}(N(t) = n) \mid A(t, t+\delta) = 1)
\end{aligned}
$$

PASTA

Théorème PASTA (Poisson Arrivals See Time Averages)
Si le processus des arrivées est Poisson et les arrivées après t sont indépendantes de $N(t)$ (pas d'anticipation), alors $a_n = p_n$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
p_n &= \lim_{t\to\infty} \mathbf{P}(N(t) = n) \\
a_n &= \lim_{t\to\infty} \lim_{\delta\to 0} \mathbf{P}(N(t) = n) \mid A(t, t+\delta) = 1) \\
&= \lim_{t\to\infty} \lim_{\delta\to 0} \frac{\mathbf{P}(N(t) = n), A(t, t+\delta) = 1)}{\mathbf{P}(A(t, t+\delta) = 1)}
\end{aligned}$$

PASTA

Théorème PASTA (Poisson Arrivals See Time Averages)
Si le processus des arrivées est Poisson et les arrivées après t sont indépendantes de $N(t)$ (pas d'anticipation), alors $a_n = p_n$.

Démonstration.

$$
\begin{aligned}
p_n &= \lim_{t\to\infty} \mathbf{P}(N(t) = n) \\
a_n &= \lim_{t\to\infty} \lim_{\delta\to 0} \mathbf{P}(N(t) = n) \mid A(t, t+\delta) = 1) \\
&= \lim_{t\to\infty} \lim_{\delta\to 0} \frac{\mathbf{P}(N(t) = n), A(t, t+\delta) = 1)}{\mathbf{P}(A(t, t+\delta) = 1)} \\
&= \lim_{t\to\infty} \lim_{\delta\to 0} \frac{\mathbf{P}(N(t) = n))A(t, t+\delta) = 1)}{\mathbf{P}(A(t, t+\delta) = 1)}
\end{aligned}
$$

PASTA

Théorème PASTA (Poisson Arrivals See Time Averages)
Si le processus des arrivées est Poisson et les arrivées après t sont indépendantes de $N(t)$ (pas d'anticipation), alors $a_n = p_n$.

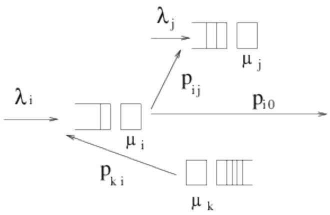
Démonstration.

$$\begin{aligned}
p_n &= \lim_{t\to\infty} \mathbf{P}(N(t) = n) \\
a_n &= \lim_{t\to\infty} \lim_{\delta\to 0} \mathbf{P}(N(t) = n) \mid A(t, t+\delta) = 1) \\
&= \lim_{t\to\infty} \lim_{\delta\to 0} \frac{\mathbf{P}(N(t) = n), A(t, t+\delta) = 1)}{\mathbf{P}(A(t, t+\delta) = 1)} \\
&= \lim_{t\to\infty} \lim_{\delta\to 0} \frac{\mathbf{P}(N(t) = n))A(t, t+\delta) = 1)}{\mathbf{P}(A(t, t+\delta) = 1)} \\
&= \lim_{t\to\infty} \mathbf{P}(N(t) = n) \\
&= p_n
\end{aligned}$$

Remarques

- Simulation : on peut suivre juste l'état du système au moments des arrivées (ou départs) !
- Plus général : réseaux, plusieurs serveurs...

Réseaux de Jackson



- K files
- Arrivées depuis l'extérieur dans la file i : Poiss(λ_i)
- File i a un serveur $\sim Exp(\mu_i)$
- $p_{i,j}$ probabilité de routage de la file i vers la file j après service en i
- $p_{i,0} = 1 - \sum_{j=1}^{K} p_{i,j}$ la probabilité de départ vers l'extérieur après service en i

L'état du système : $n = (n_1, \dots, n_K)$.

Réseaux de Jackson

Hypothèse : graphe de routage fortement connexe et $\sum_i p_{i,0} > 0$.

Taux d'arrivées dans une file i :

$$\alpha_i = \lambda_i + \sum_j \alpha_j P_{ji}$$

Version matricielle : $\alpha = \lambda + \alpha P$ (α et λ vecteurs lignes)
Donc, $\alpha = (I - P)^{-1}\lambda$

Réseaux de Jackson

Hypothèse : graphe de routage fortement connexe et $\sum_i p_{i,0} > 0$.

Taux d'arrivées dans une file i :

$$\alpha_i = \lambda_i + \sum_j \alpha_j P_{ji}$$

Version matricielle : $\alpha = \lambda + \alpha P$ (α et λ vecteurs lignes)
Donc, $\alpha = (I - P)^{-1}\lambda$

Thm. Si $\alpha_i < \mu_i, \forall i$ alors $(N(t))_t$ est stable et la probabilité stationnaire

$$\pi(n) = \prod_{i=1}^{K} (1 - \rho_i)\rho_i^{n_i}$$

où $\rho_i = \frac{\alpha_i}{\mu_i}$. Par ailleurs,

- les processus de départs de la file i vers l'extérieur sont des processus indépendants de Poiss($\alpha_i p_{i,0}$)
- $(N(t))_t$ est indép. du processus de départs vers l'extérieur jusqu'à la date t.

Réseaux de Jackson

Taux sortant de l'état n, $n_i > 0, \forall i$

$$\pi(n)\left(\sum_{i=1}^{K}\lambda_i + \sum_{i=1}^{K}\mu_i\right)$$

Réseaux de Jackson

Taux sortant de l'état n, $n_i > 0, \forall i$

$$\pi(n)\left(\sum_{i=1}^{K}\lambda_i + \sum_{i=1}^{K}\mu_i\right)$$

Taux entrant dans l'état n :

- arrivées externes
- départs vers l'extérieur
- routage entre les files

Réseaux de Jackson

Taux sortant de l'état n, $n_i > 0, \forall i$

$$\pi(n)\left(\sum_{i=1}^{K}\lambda_i + \sum_{i=1}^{K}\mu_i\right)$$

Taux entrant dans l'état n :

- arrivées externes
- départs vers l'extérieur
- routage entre les files

$$\sum_{i=1}^{K}\pi(n-e_i)\lambda_i + \sum_{i=1}^{K}\pi(n+e_i)\mu_i p_{i,0} + \sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{K}\pi(n+e_i-e_j)\mu_i p_{i,j}$$

Equation de balance globale...

Réseaux de Jackson

Une autre approche - balance par station

Pour chaque station i : si $n_i > 0$

$$\pi(n)\mu_i = \pi(n - e_i)\lambda_i + \sum_j \pi(n + e_j - e_i)\mu_j p_{j,i}$$

Balance avec l'extérieur

$$\sum_i \pi(n)\lambda_i = \sum_i \pi(n + e_i)\mu_i p_{i,0}$$

Réseaux de Jackson

Une autre approche - balance par station

Pour chaque station i : si $n_i > 0$

$$\pi(n)\mu_i = \pi(n - e_i)\lambda_i + \sum_j \pi(n + e_j - e_i)\mu_j p_{j,i}$$

Balance avec l'extérieur

$$\sum_i \pi(n)\lambda_i = \sum_i \pi(n + e_i)\mu_i p_{i,0}$$

On "devine" que $\mu(n)C_i = \mu(n + e_i)$, alors

$$\sum_i \lambda_i = \sum_i C_i \mu_i p_{i,0}$$

Equilibre des taux avec l'extérieur : $\sum_i \lambda_i = \sum_i \alpha_i p_{i,0}$, donc

$$C_i = \rho_i = \frac{\alpha_i}{\mu_i}.$$

Réseaux de Jackson

Donc candidat pour la distribution stationnaire : $\pi(n)\rho_i = \mu(n + e_i)$, i.e.

$$\pi(n) = C \prod_{i=1}^{K} \rho_i^{n_i},$$

Réseaux de Jackson

Donc candidat pour la distribution stationnaire : $\pi(n)\rho_i = \mu(n + e_i)$, i.e.

$$\pi(n) = C \prod_{i=1}^{K} \rho_i^{n_i},$$

On a utilisé : taux sortant suite à une arrivée externe = taux entrant suite à un départ vers l'extérieur

Réseaux de Jackson

Donc candidat pour la distribution stationnaire : $\pi(n)\rho_i = \mu(n+e_i)$, i.e.

$$\pi(n) = C\prod_{i=1}^{K}\rho_i^{n_i},$$

On a utilisé : taux sortant suite à une arrivée externe = taux entrant suite à un départ vers l'extérieur

Il reste à vérifier que :
taux sortant suite à une fin de service dans station i = taux entrant dans la station i

$$\mu(n)\mu_i = \sum_j \pi(n+e_j-e_i)\mu_j p_{ji} + \mu(n-e_i)\lambda_i$$

$$C\prod_{i=1}^{K}\rho_i^{n_i}\mu_i = \sum_j C\prod_{i=1}^{K}\rho_i^{n_i}(\frac{\rho_j}{\rho_i})\mu_j p_{ji} + C\prod_{i=1}^{K}\rho_i^{n_i}(\frac{1}{\rho_i})\lambda_i$$

Réseaux de Jackson

Donc :

$$\mu_i = \sum_j (\frac{\rho_j}{\rho_i}) \mu_j p_{ji} + (\frac{1}{\rho_i}) \lambda_i$$

Réseaux de Jackson

Donc :

$$\mu_i = \sum_j (\frac{\rho_j}{\rho_i})\mu_j p_{ji} + (\frac{1}{\rho_i})\lambda_i$$

ce qui est équivalent à

$$\alpha_i = \sum_j \alpha_j p_{ji} + \lambda_i$$

et c'est la définition des α_i.

Réseaux de Jackson

Donc :

$$\mu_i = \sum_j (\frac{\rho_j}{\rho_i})\mu_j p_{ji} + (\frac{1}{\rho_i})\lambda_i$$

ce qui est équivalent à

$$\alpha_i = \sum_j \alpha_j p_{ji} + \lambda_i$$

et c'est la définition des α_i.

Pour trouver C, $\sum_n \pi(n) = 1$ donne $C = \prod_{i=1}^K (1-\rho_i)$, donc

$$\pi(n) = \prod_{i=1}^K \rho^{n_i}(1-\rho_i).$$

Stabilité : $\rho_i < 1, \ \forall i$.