Modèles et algorithmes des réseaux

Processus de Markov et les files d'attente

Ana Busic

Inria Paris - DI ENS

http://www.di.ens.fr/~busic/
ana.busic@inria.fr

Paris, Novembre 2018

Plan

Processus de Markov

Processus en temps retourné et la réversibilité

File M/M/1 et le théorème de Burke

Processus de Markov

Soit $T \subset \mathbb{R}$ et $\mathcal{S}$ un espace dénombrable.

Une collection de variables aléatoires à valeur dans $\mathcal{S}$, $\{X(t) \ : \ t \in T\}$ est un processus de Markov avec un espace $\mathcal{S}$ si

$$\mathbf{P}(X(t_{n+1}) = i_{n+1} | X(t_n) = i_n, \dots, X(t_1) = i_1) = \mathbf{P}(X(t_{n+1}) = i_{n+1} | X(t_n) = i_n)$$

pour tout $t_1, \dots, t_{n+1} \in T$ tels que $t_1 < t_2 < \cdots < t_{n+1}$, $i_1, \dots, i_{n+1} \in \mathcal{S}$ et $\mathbf{P}(X(t_n) = i_n, \dots, X(t_1) = i_1) > 0$.

Notation :

- $\pi_i(t) = \mathbf{P}(X(t) = i)$. On va écrire $\pi(t)$ comme un vecteur ligne (en utilisant un ordre des états dans $\mathcal{S}$) ;
- $p_{ij}(s,t) = \mathbf{P}(X(t) = j | X(s) = i)$;
- $H(s,t) := (p_{ij}(s,t) : i, j \in \mathcal{S})$ est une matrice stochastique.

Processus de Markov

Les $\pi(t)$ et $p_{ij}(t)$ déterminent toutes les marginales finies :

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{P}(X(t_1) = i_1, \ldots, X(t_n) = i_n) \\
&\quad = \mathbf{P}(X(t_1) = i_1, \ldots, X(t_{n-1}) = i_{n-1})\mathbf{P}(X(t_n) = i_n | X(t_1) = i_1, \ldots, X(t_{n-1}) = i_{n-1}) \\
&\quad = \mathbf{P}(X(t_1) = i_1, \ldots, X(t_{n-1}) = i_{n-1}) p_{i_{n-1} i_n}(t_{n-1}, t_n) \\
&\quad \ldots \\
&\quad = \pi_{i_1}(t_1) p_{i_1 i_2}(t_1, t_2) \cdots p_{i_{n-1} i_n}(t_{n-1}, t_n)
\end{aligned}
$$

Un processus de Markov est dit homogène si $p_{ij}(s, t)$ dépendent de s et t uniquement en $t - s$. On écrit alors $p_{ij}(t - s)$ au lieu de $p_{ij}(s, t)$, et $H_{ij}(t - s)$ au lieu de $H_{ij}(s, t)$.

Un processus de Markov homogène est dit stationnaire si $\pi(t)$ ne dépend pas de t.

Equations de Chapman-Kolmogorov

Pour $s, t \in T$, $s \leq t$,

$$\pi_j(t) = \sum_{i \in S} \mathbf{P}(X(s) = i, X(t) = j) = \sum_{i \in S} \pi_i(s) p_{ij}(s, t),$$

où sous forme matricielle

$$\pi(t) = \pi(s) H(s, t).$$

Pour $s, \tau, t \in T$, $s < \tau < t$, en conditionnant sur la valeur de $X(\tau)$, on obtient

$$H(s, t) = H(s, \tau) H(\tau, s)$$

Pour un processus de Markov homogène, pour $s, s + \tau \in T$, $\tau \geq 0$,

$$\pi(s + \tau) = \pi(s) H(\tau),$$

π est une distribution invariante si $\pi H(\tau) = \pi$.

Fonctions de sauts

$\mathcal{S}$ un ensemble dénombrable et $\Delta \notin \mathcal{S}$. Une fonction de sauts est une fonction $x : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{S} \cup \{\Delta\}$ telle qu'il existe une suite de temps, $0 = \tau_0 < \tau_1 < \cdots$ et une suite d'états $s_0, s_1, \cdots$ avec $s_i \in \mathcal{S}$ et $s_i \neq s_{i+1},\ i \geq 0$, telles que

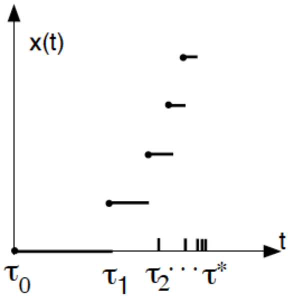
$$x(t) = \begin{cases} s_i, & \tau_i \leq t < \tau_{i+1},\ i \geq 0 \\ \Delta, & t \geq \tau^* \end{cases}$$

avec $\tau^* = \lim_{i\to\infty} \tau_i$.

Si τ^* est fini, on dit que c'est le temps d'explosion de la fonction x.

Temps d'explosion

Exemple : $\mathcal{S} = \mathbb{N}$, $\tau_i = i/(i+1)$, $s_i = i$. On a $\tau^* = 1$.



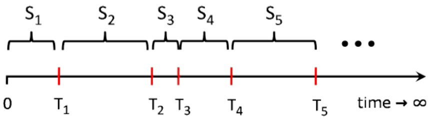
Processus de sauts

Un processus markovien de sauts $\{X(t) : t \geq 0\}$ est un processus de Markov tel que, avec probabilité 1, toutes les trajectoires sont des fonctions de sauts.

Instants de sauts

$$\begin{aligned} T_0 &= 0 \\ T_k &= \min\{t \geq 0 : X(T_{k-1} + t) \neq X(T_{k-1})\} \end{aligned}$$

Temps de séjour : $S_i = T_i - T_{i-1}, \ i \geq 1$.



La chaîne incluse aux instants de sauts $X^J = \{X^J(k) : k \geq 0\}$

$$X^J(k) = X(T_k)$$

Exemple : chaînes de Markov en temps discret

Soit $X = \{X(k) : k \in \mathbb{N}\}$ une chaîne de Markov avec l'espace d'états dénombrable $\mathcal{S}$ et matrice de transition P. Alors,

- La chaîne incluse aux instants des sauts est aussi une chaîne de Markov et $p_{ij}^{J} = p_{ij}/(1 - p_{ii})$ pour $i \neq j$ et $p_{ii}^{J} = 0$, $i, j \in \mathcal{S}$.

Exemple : chaînes de Markov en temps discret

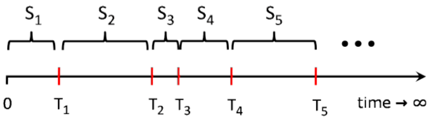
Soit $X = \{X(k) : k \in \mathbb{N}\}$ une chaîne de Markov avec l'espace d'états dénombrable $\mathcal{S}$ et matrice de transition P. Alors,

- La chaîne incluse aux instants des sauts est aussi une chaîne de Markov et $p_{ij}^J = p_{ij}/(1 - p_{ii})$ pour $i \neq j$ et $p_{ii}^J = 0$, $i, j \in \mathcal{S}$.
- Sachant $X(0)$, $X^J(1)$ est conditionnellement indépendant de S_1.

Exemple : chaînes de Markov en temps discret

Soit $X = \{X(k) : k \in \mathbb{N}\}$ une chaîne de Markov avec l'espace d'états dénombrable $\mathcal{S}$ et matrice de transition P. Alors,

- La chaîne incluse aux instants des sauts est aussi une chaîne de Markov et $p^J_{ij} = p_{ij}/(1 - p_{ii})$ pour $i \neq j$ et $p^J_{ii} = 0$, $i, j \in \mathcal{S}$.
- Sachant $X(0)$, $X^J(1)$ est conditionnellement indépendant de S_1.
- Sachant $(X^J(0), \dots, X^J(n)) = (j_0, \dots, j_n)$, les variables $S_1, \dots, S_n$ sont conditionnellement indépendantes et la distribution conditionnelle de S_{k+1} est $Geo(1 - p_{j_k j_k})$.



Temps continu

Soit $\{X(t)\}$ un processus (de sauts) de Markov en temps continu homogène.

- Soit τ_i le temps jusqu'à ce que le processus quitte l'état i, sachant qu'il est dans i.
- Propriété de homogénéité implique :

$$\mathbf{P}(\tau_i > t + s | \tau_i > s) = \mathbf{P}(\tau_i > t)$$

$\Rightarrow \tau_i$ est sans mémoire $\Rightarrow \tau_i \sim Exp$ (l'unique v.a. continue sans mémoire)

Temps continu

Soit $\{X(t)\}$ un processus (de sauts) de Markov en temps continu homogène.

- Soit τ_i le temps jusqu'à ce que le processus quitte l'état i, sachant qu'il est dans i.
- Propriété de homogénéité implique :

$$\mathbf{P}(\tau_i > t + s | \tau_i > s) = \mathbf{P}(\tau_i > t)$$

$\Rightarrow \tau_i$ est sans mémoire $\Rightarrow \tau_i \sim Exp$ (l'unique v.a. continue sans mémoire)
Preuve : Notons $S(t) = P(X > t)$. Alors on a

$$S(s + t) = S(s)S(t), \ \forall s, t \geq 0.$$

Les fonctions exponentielles sont les seules solutions à ce type d'équations. On a $S(0) = 1$ et S décroissante, donc il existe $\lambda > 0$ t.q. $S(t) = e^{-\lambda t}, \ t \geq 0$.

Remarque : si τ_i n'est pas exponentielle, alors on parle d'un processus semi-markovien (transitions sont markoviennes, mais pas le temps passé dans un état).

Deux interpretations

Vision 1 : Un processus de Markov en temps continu est un processus stochastique tel que chaque fois qu'il entre dans l'état i

- Il passe $Exp(\nu_i)$ temps en i avant de faire une transition ;
- Quand il quitte l'état i, la transition vers l'état j avec probabilité P^J_{ij}.

P^J est la chaîne incluse au moments de sauts.

Deux interpretations

Vision 1 : Un processus de Markov en temps continu est un processus stochastique tel que chaque fois qu'il entre dans l'état i

- Il passe $Exp(\nu_i)$ temps en i avant de faire une transition ;
- Quand il quitte l'état i, la transition vers l'état j avec probabilité P^J_{ij}.

P^J est la chaîne incluse au moments de sauts.

Vision 2 : Un processus de Markov en temps continu est un processus stochastique tel que chaque fois qu'il entre dans l'état i ayant comme voisins $j_1, \dots, j_k, \dots$:

- $\tau_i = \min_k Y_{j_k}$ où $Y_{j_k} \sim Exp(q_{ij_k})$;
- On suppose que $\sum_k q_{ij_k} < \infty$, $\forall i$.
- Le nouvel état est : $\arg\min_k Y_{j_k}$.

La chaîne incluse au moments de sauts : $P^J_{i,j_k} = \frac{q_{ij_k}}{\sum_l q_{ij_l}}$.

Le lien : $q_{i,j} = \nu_i P^J_{i,j}$.

Générateur infinitésimal

Soit $Q = (q_{ij} : i, j \in \mathcal{S})$ tel que

$$q_{i,j} \geq 0, \quad i, j \in \mathcal{S}, i \neq j$$

et

$$q_{ii} = -\sum_{j \in \mathcal{S}, j \neq i} q_{ij}, i \in \mathcal{S}.$$

[Remarque : $\nu_i = -q_{ii}$.]

Un processus de saut X a le générateur infinitésimal Q si

$$\lim_{h \to 0} \frac{p_{ij}(h) - \mathbf{1}_{\{i=j\}}}{h} = q_{ij}, \quad i, j \in \mathcal{S}$$

ou de manière équivalente,

$$p_{ij}(h) = \mathbf{1}_{\{i=j\}} + hq_{ij} + o(h), \quad i, j \in \mathcal{S}$$

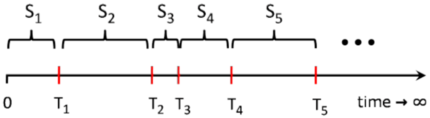
Temps continu

Soit $X = \{X(k) : k \in \mathbb{R}_+\}$ un processus Markovien des sauts avec générateur Q. Alors,

- La chaîne incluse aux instants des sauts est une chaîne de Markov en temps discret avec la matrice de transition P^J

$$p_{ij}^J = \begin{cases} -q_{ij}/q_{ii}, & i \neq j \\ 0, & i = j \end{cases}$$

- Sachant $X(0)$, $X^J(1)$ est conditionnellement indépendant de S_1. Sachant $(X^J(0), \ldots, X^J(n)) = (j_0, \ldots, j_n)$, les variables $S_1, \ldots, S_n$ sont conditionnellement indépendantes et la distribution conditionnelle de S_{k+1} est $Exp(-q_{j_k j_k})$.



Equations de Kolmogorov et les équations de balance

Pour un $t > 0$, en utilisant les équations de Chapman-Kolmogorov,

$$\frac{\pi_j(t+h) - \pi_j(t)}{h} = \sum_{i \in S} \pi_i(t) \left(\frac{p_{ij}(h) - \mathbf{1}_{\{i=j\}}}{h} \right).$$

Quand $h \to 0$, sous conditions d'interchangeabilité de la limite et la somme (Details : Ch. 8 du P. Bremaud. Markov Chains Gibbs Fields, Monte Carlo Simulation, and Queues. Springer. 1999.),

$$\frac{d\pi_j(t)}{dt} = \sum_{i \in S} \pi_i(t) q_{ij},$$

ou $\frac{d\pi(t)}{dt} = \pi(t)Q$.

Equations de Kolmogorov et les équations de balance

Pour un $t > 0$, en utilisant les équations de Chapman-Kolmogorov,

$$\frac{\pi_j(t+h) - \pi_j(t)}{h} = \sum_{i \in S} \pi_i(t) \left(\frac{p_{ij}(h) - \mathbf{1}_{\{i=j\}}}{h} \right).$$

Quand $h \to 0$, sous conditions d'interchangeabilité de la limite et la somme (Details : Ch. 8 du P. Bremaud. Markov Chains Gibbs Fields, Monte Carlo Simulation, and Queues. Springer. 1999.),

$$\frac{d\pi_j(t)}{dt} = \sum_{i \in S} \pi_i(t) q_{ij},$$

ou $\frac{d\pi(t)}{dt} = \pi(t)Q$.

Equations de balance : $\pi Q = 0$ i.e.

$$\sum_{i \in S, i \neq j} \pi_i(t) q_{ij} = \sum_{i \in S, i \neq j} \pi_j(t) q_{ji}$$

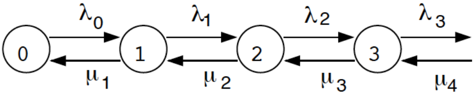
A l'équilibre, flot entrant dans i doit être égal au flot sortant de i.

Distribution stationnaire

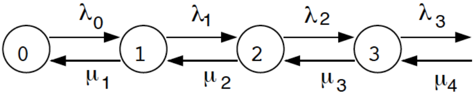
Soit X irréductible et non-explosif (condition suffisante : $\sup_j -q_{jj} < \infty$)

- Une distribution de probabilité π est une distribution stationnaire ssi $\pi Q = 0$
- Une distribution de probabilité stationnaire existe ssi tous les états sont recurrents positifs.
- Quand elle existe, la distribution stationnaire est unique.

Processus de naissance et de mort



Processus de naissance et de mort



Loi invariante :

$$\pi^*(i) = \prod_{k=0}^{i} \frac{\lambda_k}{\mu_{k+1}}, i \geq 0.$$

Distribution stationnaire existe si $\sum_k \pi^*(k) < \infty$ et

$$\pi(i) = \frac{\pi^*(i)}{\sum_k \pi^*(k)}.$$

Processus en temps retourné

Processus en temps retourné

Soit $\{X_t\}$ un processus stationnaire et irréductible. On construit $\{X_t^*\}$ en inversant le temps :

$$\boxed{X_t^* = X_{\tau - t}}$$

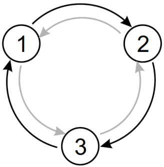
Remarque : τ n'est pas important, il determine uniquement l'origine pour le processus retourné.

Applications

- Permet de mieux comprendre les propriétés d'un processus.
- Le processus de départs des files plus facile à analyser. Les preuves plus élégantes (e.g. thm de Burke).
- Parfois plus facile de "deviner" la forme de la loi stationnaire.

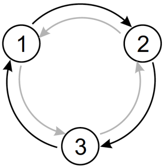
Processus en temps retourné

En général, $\{X_t^*\}$ est différent de $\{X_t\}$.
Exemple : processus cyclique.



Processus en temps retourné

En général, $\{X_t^*\}$ est différent de $\{X_t\}$.
Exemple : processus cyclique.



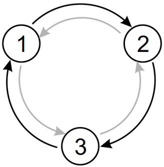
Loi stationnaire

Thm. Suppose que $\{X_t\}$ a la distribution stationnaire π, $\pi_i = \mathbf{P}(X_t = i)$.
Alors $\{X_t^*\}$ a aussi une loi stationnaire π^* et

$$\boxed{\pi^* = \pi}$$

Processus en temps retourné

En général, $\{X_t^*\}$ est différent de $\{X_t\}$.
Exemple : processus cyclique.



Loi stationnaire
Thm. Suppose que $\{X_t\}$ a la distribution stationnaire π, $\pi_i = \mathbf{P}(X_t = i)$.
Alors $\{X_t^*\}$ a aussi une loi stationnaire π^* et

$$\boxed{\pi^* = \pi}$$

Preuve. π_i et π_i^* représentent les proportions de temps que $\{X_t\}$ et $\{X_t^*\}$ passent en état i. Cette proportion ne dépend pas de la direction du temps.

Temps discret

Prop. Le processus retourné $\ldots, X_{n+1}, X_n, X_{n-1}, \ldots$ d'une chaîne de Markov stationnaire en temps discret $\ldots, X_{n-1}, X_n, X_{n+1}, \ldots$ est aussi une chaîne de Markov stationnaire.

Les probabilités de transitions sont

$$P^*_{i,j} = \mathbf{P}(X_n = j | X_{n+1} = i) = \frac{\pi_j P_{j,i}}{\pi_i}.$$

Temps continu

Prop. Le processus retourné $\{X_t^*\}$ d'un processus de Markov stationnaire (en temps continu) $\{X_t\}$ est aussi un processus de Markov stationnaire.

Ces taux de transitions sont

$$q_{i,j}^* = \frac{\pi_j q_{j,i}}{\pi_i}.$$

Preuve. En passant par la chaîne incluse au moments des sauts.

Loi stationnaire

Prop. Soit $\{X_t\}$ un processus de Markov avec les taux de transition $q_{i,j}$. S'il existent $q^*_{i,j}$ et π^* tels que

$$\sum_{j\neq i} q_{i,j} = \sum_{j\neq i} q^*_{i,j}, \forall i \quad \text{et} \quad \pi_i q^*_{i,j} = \pi_j q_{j,i}, \forall i,j \quad \text{et} \quad \sum_i \pi_i = 1$$

alors π est la distribution stationnaire des processus $\{X_t\}$ et $\{X^*_t\}$ et $q^*_{i,j}$ sont des taux de transition du processus $\{X^*_t\}$.

Preuve.

$$\sum_{j\neq i} \pi_j q_{j,i} = \sum_{j\neq i} \pi_i q^*_{i,j} = \pi_i \sum_{j\neq i} q^*_{i,j} = \pi_i \sum_{j\neq i} q_{i,j} = \sum_{j\neq i} \pi_i q_{i,j}, \forall i$$

Donc, π vérifient les équations de balance globale pour $\{X_t\}$.
De plus, on a $q^*_{i,j} = \frac{\pi_j q_{j,i}}{\pi_i}$. donc $q^*_{i,j}$ sont bien des taux de transition pour le processus $\{X^*_t\}$.

Processus réversible

Déf. Si les processus $\{X_t\}$ et $\{X_t^*\}$ sont statistiquement non-distinguables, on dit que $\{X_t\}$ est réversible (en temps).

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}) \sim (X^*_{\tau - t_1}, X^*_{\tau - t_2}, \ldots, X^*_{\tau - t_n})$$

pour tout n, τ et $t_1, \ldots, t_n$.

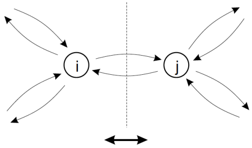
Intuitivement : un spectateur ne peut pas dire si le "film" est projeté en avant ou en arrière.

Processus réversible

Temps discret : $P^*_{i,j} = P_{i,j}, \forall i,j$, i.e. $\boxed{\pi_i P_{i,j} = \pi_j P_{j,i}, \forall i,j}$

Temps continu : $q^*_{i,j} = q_{i,j}, \forall i,j$, i.e. $\boxed{\pi_i q_{i,j} = \pi_j q_{j,i}, \forall i,j}$

Équations de balance détaillée : les flots de probabilité entre deux états sont en équilibre.



- Balance détaillée $\Rightarrow$ balance globale
- Si les conditions de balance détaillée sont vérifiées pour un vecteur π positif et tel que $\sum_i \pi_i < \infty$, alors π normalisé tel que $\sum_i \pi = 1$ est la loi stationnaire.
- Mais balance globale $\not\Rightarrow$ balance détaillée (tous les processus de Markov ne sont pas réversibles).

Exemple : les arbres sont réversibles

Prop. Si un processus de Markov est reversible, alors son graphe de transition est symétrique.

Exemple : les arbres sont réversibles

Prop. Si un processus de Markov est reversible, alors son graphe de transition est symétrique.

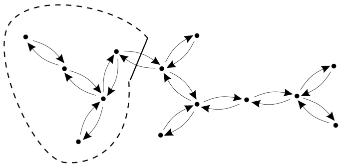
Prop. Si le graphe de transition non-orienté d'un processus de Markov est un arbre, alors le processus réversible.

Exemple : les arbres sont réversibles

Prop. Si un processus de Markov est reversible, alors son graphe de transition est symétrique.

Prop. Si le graphe de transition non-orienté d'un processus de Markov est un arbre, alors le processus réversible.

Preuve. En utilisant la balance détaillée.

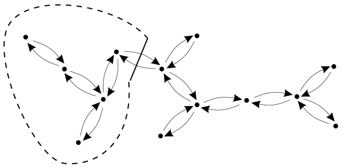


Exemple : les arbres sont réversibles

Prop. Si un processus de Markov est reversible, alors son graphe de transition est symétrique.

Prop. Si le graphe de transition non-orienté d'un processus de Markov est un arbre, alors le processus réversible.

Preuve. En utilisant la balance détaillée.



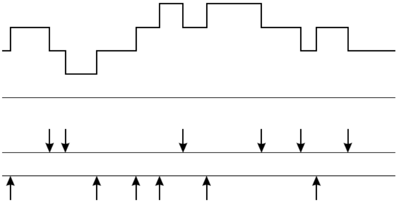
Cor. Tous les processus markoviens de naissance et de mort sont réversibles.

Exemples : M/M/1, M/M/n, M/M/∞, M/M/n/m, ...

Théorème de Burke

Dans une file d'attente M/M/1, avec les arrivées $Poiss(\lambda)$

- Les départs forment un processus de Poisson de paramètre λ.
- Pour tout t, X_t (nb. de paquets dans la file à la date t) est indépendant des départs avant la date t.



Aussi vrai pour M/M/m et M/M/∞.

Théorème de Burke

Remarques :

- On observant beaucoup de départs, on a une indication que la file a probablement eu plus de paquets que habituellement, mais on ne sait rien sur le nombre actuel de paquets !

Théorème de Burke

Remarques :

- On observant beaucoup de départs, on a une indication que la file a probablement eu plus de paquets que habituellement, mais on ne sait rien sur le nombre actuel de paquets !
- En observant les départs, on n'a pas le moyen d'estimer le temps moyen de service $1/\mu$.

Théorème de Burke

Remarques :

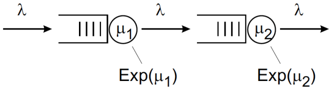
- On observant beaucoup de départs, on a une indication que la file a probablement eu plus de paquets que habituellement, mais on ne sait rien sur le nombre actuel de paquets !
- En observant les départs, on n'a pas le moyen d'estimer le temps moyen de service $1/\mu$.
- Généralisation à des réseaux acycliques.

Théorème de Burke

Remarques :

- On observant beaucoup de départs, on a une indication que la file a probablement eu plus de paquets que habituellement, mais on ne sait rien sur le nombre actuel de paquets !
- En observant les départs, on n'a pas le moyen d'estimer le temps moyen de service $1/\mu$.
- Généralisation à des réseaux acycliques.

Exemple : files en tandem.

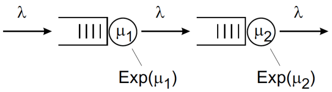


Théorème de Burke

Remarques :

- On observant beaucoup de départs, on a une indication que la file a probablement eu plus de paquets que habituellement, mais on ne sait rien sur le nombre actuel de paquets !
- En observant les départs, on n'a pas le moyen d'estimer le temps moyen de service $1/\mu$.
- Généralisation à des réseaux acycliques.

Exemple : files en tandem.



Distribution stationnaire : $\rho_i = \lambda_i/\mu_i, i = 1, 2,$

$$\boxed{\pi_{i,j} = \mathbf{P}(X_1 = i, X_2 = j) = (1-\rho_1)(1-\rho_2)\rho_1^i\rho_2^j}$$