Modèles et algorithmes des réseaux

Schémas de Matthes et simulation à événements discrets

Ana Busic

Inria Paris - DI ENS

http://www.di.ens.fr/~busic/
ana.busic@inria.fr

Paris, Octobre 2018

Plan

Variables aléatoires continues

Simulation de réseaux et schémas de Mattes

Processus de Poisson

Variables aléatoires continues

Définition. Une variable aléatoire continue X est définie par sa fonction de densité $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :

- $f_X(u) \geq 0, \ \forall u \in \mathbb{R}$,
- $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(u) du = 1$

Interpretation :

$$"\mathbf{P}[u \leq X \leq u + du] \approx f_X(u) du"$$

Variables aléatoires continues

Définition. Une variable aléatoire continue X est définie par sa fonction de densité $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :

- $f_X(u) \geq 0, \ \forall u \in \mathbb{R}$,
- $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(u) du = 1$

Interpretation :

$$"\mathbf{P}[u \leq X \leq u + du] \approx f_X(u)du"$$

Définition. Soit X une v.a. continue et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\mathbf{E}[h(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(u) f_X(u) du.$$

Variables aléatoires continues

Définition. Une variable aléatoire continue X est définie par sa fonction de densité $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :

- $f_X(u) \geq 0, \ \forall u \in \mathbb{R}$,
- $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(u) du = 1$

Interpretation :

$$"\mathbf{P}[u \leq X \leq u + du] \approx f_X(u)du"$$

Définition. Soit X une v.a. continue et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\mathbf{E}[h(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(u) f_X(u) du.$$

Soit A un événement (de la tribu borélienne, engendre par des intervalles fermés). En prenant $h(x) = \mathbf{1}_A$,

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(X \in A) = \int_A f_X(u) du.$$

Variables aléatoires continues

Remarque. Pour une v. a. continue, $\mathbf{P}(X = t) = 0$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Variables aléatoires continues

Remarque. Pour une v. a. continue, $\mathbf{P}(X = t) = 0$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Définition. La fonction de repartition de X est

$$F_X(t) = \mathbf{P}(X \leq t), \forall t.$$

Sa dérivée est la fonction de densité

$$\frac{d}{dt} F_X(t) = f_X(t).$$

Propriété : $F_X(t)$ croit de 0 à 1 quand t va de $-\infty$ à $+\infty$.

Exemples

$X \sim Unif[a,b]$

$$
\begin{aligned}
f_X(u) &= \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{si } a \leq u \leq b, \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \\
F_X(t) &= \begin{cases} 0, & t < a \\ \frac{t-a}{b-a}, & \text{si } a \leq t \leq b, \\ 1, & t > b \end{cases} \\
\mathbf{E}[X] &= \frac{a+b}{2} \\
\mathbf{E}[X^2] &= \frac{a^2+ab+b^2}{3} \\
\mathrm{Var}[X] &= \mathbf{E}[X^2] - (\mathbf{E}[X])^2 = \frac{(b-a)^2}{12}
\end{aligned}
$$

Exemples

$X \sim Exp(\lambda)$, $\lambda > 0$

$$\begin{aligned}
f_X(u) &= \begin{cases} \lambda e^{-\lambda u}, & \text{si } u \geq 0, \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \\
F_X(t) &= \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1 - e^{-\lambda t}, & t \geq 0. \end{cases} \\
\mathbf{E}[X] &= \int_0^\infty \lambda t e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} \\
\mathbf{E}[X^2] &= \int_0^\infty \lambda t^2 e^{-\lambda t} dt = \frac{2}{\lambda^2} \\
\mathrm{Var}[X] &= \mathbf{E}[X^2] - (\mathbf{E}[X])^2 = \frac{1}{\lambda^2}
\end{aligned}$$

Propriétés

Proposition. Pour tout $t, s \geq 0$,

$$\mathbf{P}(X > s + t \mid X > s) = \mathbf{P}(X > t).$$

Preuve.

$$F_X(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1 - e^{-\lambda t}, & t \geq 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X > s + t \mid X > s) &= \frac{\mathbf{P}(X > s + t)}{\mathbf{P}(X > s)} = \frac{1 - \mathbf{P}(X \leq s + t)}{1 - \mathbf{P}(X \leq s)} \\ &= \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = \mathbf{P}(X > t). \end{aligned}$$

Propriétés

Proposition. Soient $X_i \sim Exp(\lambda_i),\ i = 1, \dots, n$, variables indépendantes. On pose $Y = \min_{i=1}^n X_i$. Alors,

1. $$Y \sim Exp(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i)$$

2. $$\mathbf{P}(Y = X_i) = \frac{\lambda_i}{\sum_{j=1}^n \lambda_j}$$

Preuve : pour $n = 2$, le cas général par récurrence.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\min(X_1, X_2) > x) &= \mathbf{P}((X_1 > x) \cap (X_2 > x)) \\ &= \mathbf{P}(X_1 > x)\mathbf{P}(X_2 > x) \\ &= e^{-\lambda_1 x} e^{-\lambda_2 x} = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)x} \end{aligned}$$

Propriétés

Soit $f(x_1, x_2)$ la loi jointe de (X_1, X_2) (indépendantes)

$$f(x_1, x_2) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 x_1} \lambda_2 e^{-\lambda_2 x_2}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X_1 < X_2) &= \int_{x_2=0}^{\infty} \int_{x_1=0}^{x_2} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\
&= \int_{x_2=0}^{\infty} \lambda_2 e^{-\lambda_2 x_2} \left(\int_{x_1=0}^{x_2} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x_1} dx_1 \right) dx_2 \\
&= \int_{x_2=0}^{\infty} \lambda_2 e^{-\lambda_2 x_2} \left(1 - e^{-\lambda_1 x_2}\right) dx_2 \\
&= \int_{x_2=0}^{\infty} \left(\lambda_2 e^{-\lambda_2 x_2} - \lambda_2 e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) x_2} \right) dx_2 \\
&= 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}.
\end{aligned}$$

Simulation de réseaux

Schémas de Mattes jouent pour les réseaux un rôle similaire à celui des équations différentielles en physique - décrire, classer et simuler numériquement un très grand nombre de systèmes.

Probabilistes

- mécanismes aléatoires utilisés par des algorithmes
- certaines caractéristiques du traffic sont aléatoires (dates des accès au réseau, durées des communications ou volume d'information ...)

Tirage de variables aléatoires

Hypothèse : on suppose qu'on dispose d'un générateur de nombres aléatoires $\{U_n\}_{n\geq 1}$ indépendants et uniformément distribués sur $[0, 1]$.

Question : Construction des variables aléatoires i.i.d. $\{X_n\}_{n\geq 1}$ de loi P_X sur $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$.

Tirage de variables aléatoires

Hypothèse : on suppose qu'on dispose d'un générateur de nombres aléatoires $\{U_n\}_{n\geq 1}$ indépendants et uniformément distribués sur $[0,1]$.

Question : Construction des variables aléatoires i.i.d. $\{X_n\}_{n\geq 1}$ de loi P_X sur $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$.

Fonction de répartition d'une v.a. X à valeurs dans $\mathbb{R}$

$$F(x) = P(X \leq x),\ x \in \mathbb{R}$$

Propriétés

- croissante
- càdlàg - continue à droite et limite à gauche
- $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$

Méthode de l'inverse

Pseudo-inverse : $F^{-1} : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$F^{-1}(u) = \inf\{y \ : \ F(y) \geq u\}, \quad u \in [0,1]$$

Prop. Pour tout u, x, $F^{-1}(u) \leq x \Leftrightarrow u \leq F(x)$.

Méthode de l'inverse

Pseudo-inverse : $F^{-1} : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$F^{-1}(u) = \inf\{y \ : \ F(y) \geq u\}, \quad u \in [0,1]$$

Prop. Pour tout u, x, $F^{-1}(u) \leq x \Leftrightarrow u \leq F(x)$.

Preuve.

$\Leftarrow$ Si $u \leq F(x)$, alors $F^{-1}(u) = \inf\{y \ : \ F(y) \geq u\} \leq x$.

Méthode de l'inverse

Pseudo-inverse : $F^{-1} : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$F^{-1}(u) = \inf\{y \;:\; F(y) \geq u\}, \quad u \in [0,1]$$

Prop. Pour tout u, x, $F^{-1}(u) \leq x \Leftrightarrow u \leq F(x)$.

Preuve.

$\Leftarrow$ Si $u \leq F(x)$, alors $F^{-1}(u) = \inf\{y \;:\; F(y) \geq u\} \leq x$.

$\Rightarrow$ Si $F^{-1}(u) \leq x$, alors pour tout $y > x$, $F(y) \geq u$. Comme F est continue à droite, $F(x) \geq u$.

Méthode de l'inverse

Pseudo-inverse : $F^{-1} : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$F^{-1}(u) = \inf\{y \;:\; F(y) \geq u\}, \quad u \in [0,1]$$

Prop. Pour tout u, x, $F^{-1}(u) \leq x \Leftrightarrow u \leq F(x)$.

Preuve.

- $\Leftarrow$ Si $u \leq F(x)$, alors $F^{-1}(u) = \inf\{y \;:\; F(y) \geq u\} \leq x$.
- $\Rightarrow$ Si $F^{-1}(u) \leq x$, alors pour tout $y > x$, $F(y) \geq u$. Comme F est continue à droite, $F(x) \geq u$.

Soit $U \sim Unif([0,1])$. On a

$$P(F^{-1}(U) \leq x) = P(U \leq F(x)) = \int_{[0,F(x)]} du = F(x), \; x \in \mathbb{R}.$$

Méthode de l'inverse : La suite $\{X_n\}$ avec $X_n = F^{-1}(U_n)$ est une suite i.i.d. $\sim P_X$ sur $\mathbb{R}$.

Méthode de l'inverse : exemples

Loi exponentielle

- $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \ x \geq 0$ bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $[0, 1)$.
- $F^{-1}(u) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - u)$

Méthode de l'inverse : exemples

Loi exponentielle

- $F(x) = 1 - e^{-\lambda x},\ x \geq 0$ bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $[0,1)$.
- $F^{-1}(u) = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-u)$
- Pour $U \sim \mathit{Unif}([0,1])$, $1 - U \sim \mathit{Unif}([0,1])$, donc $\{-\frac{1}{\lambda}\ln(U_n)\}_{n\geq 1}$ est une suite de v.a. i.i.d. exponentielles de paramètre λ.

Méthode de l'inverse : exemples

Loi exponentielle

- $F(x) = 1 - e^{-\lambda x},\ x \geq 0$ bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $[0, 1)$.
- $F^{-1}(u) = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-u)$
- Pour $U \sim Unif([0,1])$, $1 - U \sim Unif([0,1])$, donc $\{-\frac{1}{\lambda}\ln(U_n)\}_{n\geq 1}$ est une suite de v.a. i.i.d. exponentielles de paramètre λ.

Variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, de loi $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- $F(x) = P(N \leq x) = \sum_{i=0}^{\lfloor x \rfloor} p_i,\ x \in \mathbb{R}$

Méthode de l'inverse : exemples

Loi exponentielle

- $F(x) = 1 - e^{-\lambda x},\ x \geq 0$ bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $[0, 1)$.
- $F^{-1}(u) = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-u)$
- Pour $U \sim Unif([0,1])$, $1 - U \sim Unif([0,1])$, donc $\{-\frac{1}{\lambda}\ln(U_n)\}_{n\geq 1}$ est une suite de v.a. i.i.d. exponentielles de paramètre λ.

Variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, de loi $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- $F(x) = P(N \leq x) = \sum_{i=0}^{\lfloor x \rfloor} p_i,\ x \in \mathbb{R}$
- $F^{-1}(u) = \inf\{y\ :\ F(y) \geq u\} = \inf\{n \geq 0\ :\ \sum_{i=0}^{n} p_i \geq u\}$

Méthode de l'inverse : exemples

Loi exponentielle

- $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$ bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $[0,1)$.
- $F^{-1}(u) = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-u)$
- Pour $U \sim Unif([0,1])$, $1 - U \sim Unif([0,1])$, donc $\{-\frac{1}{\lambda}\ln(U_n)\}_{n\geq 1}$ est une suite de v.a. i.i.d. exponentielles de paramètre λ.

Variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, de loi $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- $F(x) = P(N \leq x) = \sum_{i=0}^{\lfloor x \rfloor} p_i$, $x \in \mathbb{R}$
- $F^{-1}(u) = \inf\{y \;:\; F(y) \geq u\} = \inf\{n \geq 0 \;:\; \sum_{i=0}^{n} p_i \geq u\}$
- Si $U \sim Unif([0,1])$, alors

$$I = \inf\{n \geq 0 \;:\; \sum_{i=0}^{n} p_i \geq U\}$$

est telle que $P(I = k) = p_k$, $k \in \mathbb{N}$.

Preuve. On a $\{I = k\} \Leftrightarrow \left\{\sum_{i=0}^{k-1} p_i < U \leq \sum_{i=0}^{k} p_i\right\}$.

Schémas de Mattes

Exemple : Des paquets sont soumis pour transmission à un canal de communication muni d'une mémoire de taille infinie.

- Les dates d'arrivées $\{T_n\}_{n\geq 0}$ t.q.

$$T_0 = 0, \quad S_n = T_n - T_{n-1}, \quad \{S_n\}_{n\geq 1} \text{ i.i.d. } \sim F.$$

- Les tailles de paquets i.i.d. de fonction de répartition G sur $\mathbb{R}_+$, $G(0) = 0$; et indépendantes des arrivées.
- Discipline de service FIFO

Schémas de Mattes

État du système : $X(t) \in \mathbb{N}$ paquets en attente ou en cours de transmission.

Schémas de Mattes

État du système : $X(t) \in \mathbb{N}$ paquets en attente ou en cours de transmission.

Transitions

- Sources
  - α arrivées : $+1$
  - β départs : -1
- Notation : $A(i)$ sources actives dans l'état i

L'état	0	$i > 0$
Sources actives	α	α, β

- Durées résidentielles au temps t : $Y_\alpha(t)$, $Y_\beta(t)$ (variables à valeurs dans $\mathbb{R}_+$)

Hypothèse : on dispose d'une fonction `generer(F)` qui renvoie une v.a. $\sim F$ (indépendante du reste).

Algorithme

1. Initialisation : $t := 0$; $X(t) := 0$; $Y_\alpha := \texttt{generer}(F)$;
2. $V := \min_{\gamma \in A(X(t))} Y_\gamma(t)$;
3. $\hat{\gamma} := \arg\min_{\gamma \in A(X(t))} Y_\gamma(t)$;
4. Si $\hat{\gamma} = \alpha$:
   - $X(t+V) := X(t) + 1$;
   - $Y_\alpha(t+V) := \texttt{generer}(F)$;
   - Si $X(t+V) > 1$:

     $Y_\beta(t+V) := Y_\beta(t) - V$;

     sinon :

     $Y_\beta(t+V) := \texttt{generer}(G)$;

   Si $\hat{\gamma} = \beta$:
   - $X(t+V) := X(t) - 1$;
   - $Y_\alpha(t+V) := Y_\alpha(t) - V$;
   - Si $X(t+V) > 0$:

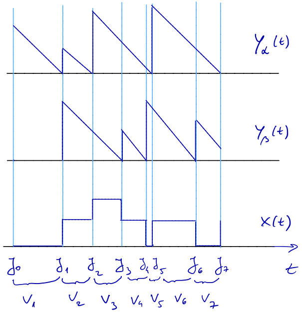
     $Y_\beta(t+V) := \texttt{generer}(G)$;
5. $t := t + V$;
6. Retourner en 2.

Remarques

- On a supposé que $\arg\min$ de l'étape 3 est toujours réduite à un singleton. Toujours vrai ?

Remarques

- On a supposé que arg min de l'étape 3 est toujours réduite à un singleton. Toujours vrai ?
- Une trajectoire avec $A(0) = \{\alpha\}$:



Possible de calculer les variables d'état et des durées résiduelles en tout temps $t \in \mathbb{R}_+$ en rajoutant après 3 :

- $X(s) := X(t), \ \forall t \leq s < t + V$;
- $Y_\gamma(s) := Y_\gamma(t) - s + t, \ \forall t \leq s < t + V$;

Schémas de Mattes

L'espace d'états : $\mathcal{E}$ un ensemble dénombrable

L'espace de sources : $\mathcal{S}$ un ensemble dénombrable

Notation :

- états : $i, j, k, \ldots$
- sources : $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$

Schémas de Mattes

L'espace d'états : $\mathcal{E}$ un ensemble dénombrable

L'espace de sources : $\mathcal{S}$ un ensemble dénombrable

Notation :

- états : $i, j, k, \ldots$
- sources : $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$

Pour chaque source $\alpha \in \mathcal{S}$: une loi sur $\mathbb{R}_+$ de fonction de répartition F_α t.q. $F_\alpha(0) = 0$.

Schémas de Mattes

L'espace d'états : $\mathcal{E}$ un ensemble dénombrable

L'espace de sources : $\mathcal{S}$ un ensemble dénombrable

Notation :

- états : $i, j, k, \ldots$
- sources : $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$

Pour chaque source $\alpha \in \mathcal{S}$: une loi sur $\mathbb{R}_+$ de fonction de répartition F_α t.q. $F_\alpha(0) = 0$.

Pour chaque état $i \in \mathcal{E}$:

- $A(i) \subset \mathcal{S}$ l'ensemble des sources actives dans l'état i

Schémas de Mattes

L'espace d'états : $\mathcal{E}$ un ensemble dénombrable

L'espace de sources : $\mathcal{S}$ un ensemble dénombrable

Notation :

- états : $i, j, k, \ldots$
- sources : $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$

Pour chaque source $\alpha \in \mathcal{S}$: une loi sur $\mathbb{R}_+$ de fonction de répartition F_α t.q. $F_\alpha(0) = 0$.

Pour chaque état $i \in \mathcal{E}$:

- $A(i) \subset \mathcal{S}$ l'ensemble des sources actives dans l'état i
- Pour chaque source $\alpha \in A(i)$:
  - vitesse $c(\alpha, i) > 0$
  - $p(\alpha, i, \cdot) = (p(\alpha, i, j)_{j \in \mathcal{E}})$ une distribution de probabilité sur $\mathcal{E}$.

Schémas de Mattes

Evolution : au moyen des durées résiduelles $Y_\alpha(t)$:

- Lorsque le système est au temps t dans l'état $i \in \mathcal{E}$

$$\{Y_\alpha, \alpha \in A(i)\}$$

durées résiduelles "en cours", v.a. non-négatives qui décroissent avec les vitesses

$$\{c(\alpha, i),\ \alpha \in A(i)\}$$

Au temps $t + h$, h suffisamment petit,

$$Y_\alpha(t + h) = Y_\alpha(t) - c(\alpha, i)h,\ \alpha \in A(i).$$

Schémas de Mattes

Evolution : au moyen des durées résiduelles $Y_\alpha(t)$:

- Lorsque le système est au temps t dans l'état $i \in \mathcal{E}$

  $$\{Y_\alpha, \alpha \in A(i)\}$$

  durées résiduelles "en cours", v.a. non-négatives qui décroissent avec les vitesses

  $$\{c(\alpha, i),\ \alpha \in A(i)\}$$

  Au temps $t + h$, h suffisamment petit,

  $$Y_\alpha(t+h) = Y_\alpha(t) - c(\alpha, i)h,\ \alpha \in A(i).$$

- Dès que une durée résiduelle, $\hat{\gamma}$ atteint 0, le système subit une transition $i \to j$ indépendamment du reste et avec la probabilité $p(\hat{\gamma}, i, j)$. Notons par τ la data de cette transition.

Schémas de Mattes

Les durées résiduelles au temps τ

$$\{Y_\alpha(\tau),\ \alpha \in A(j)\}.$$

- Pour $\alpha \in A(i) \cap A(j),\ \alpha \neq \hat{\gamma}$:

$$Y_\alpha(\tau) = Y_\alpha(\tau-);$$

- Pour $\alpha \in A(i)^c \cap A(j)$, on tire une v.a. de loi F_α, indép. du passé ;
- Si $\hat{\gamma} \in A(j)$, on tire aussi une v.a. de loi $F_{\hat{\gamma}}$ indép. du passé.

Algorithme

1. Initialisation : $t := 0$; $X(t) := X_0$; $Y_\alpha := Y_\alpha^0$, $\alpha \in A(X_0)$;
2. $V := \min_{\alpha \in A(X(t))} \frac{Y_\alpha(t)}{c(\alpha, X(t))}$;
3. $\hat{\gamma} := \arg\min_{\alpha \in A(X(t))} \frac{Y_\alpha(t)}{c(\alpha, X(t))}$;
4. Tirer j selon $p(\hat{\gamma}, X(t), \cdot)$;
   - $X(t+V) := j$;
   - Pour $\alpha \in A(i) \cap A(j)$, $\alpha \neq \hat{\gamma}$
   $$Y_\alpha(t+V) = Y_\alpha(t) - Vc(\alpha, X(t));$$
   - Pour $\alpha \in A(X(t))^c \cap A(j)$,
   $$Y_\alpha(t+V) := \mathtt{generer}(F_\alpha);$$
   on tire une v.a. de loi F_α, indép. du passé ;
   - Si $\hat{\gamma} \in A(j)$,
   $$Y_{\hat{\gamma}}(t+V) := \mathtt{generer}(F_{\hat{\gamma}});$$
5. $t := t + V$;
6. Retourner en 2.

Remarques

- Hypothèse : $\arg\min$ est unique
- Les conditions initiales X_0 et $Y_\alpha^0,\ \alpha \in A(X_0)$ peuvent être aléatoires.

Remarques

- Hypothèse : $\arg\min$ est unique
- Les conditions initiales X_0 et $Y^0_\alpha, \ \alpha \in A(X_0)$ peuvent être aléatoires.
- Soit $V_1, V_2, \ldots$ la suite des variables V construites par l'algorithme - durées de visite dans les états.

Remarques

- Hypothèse : $\arg\min$ est unique
- Les conditions initiales X_0 et $Y_\alpha^0,\ \alpha \in A(X_0)$ peuvent être aléatoires.
- Soit $V_1, V_2, \ldots$ la suite des variables V construites par l'algorithme - durées de visite dans les états.
  Dates de saut :

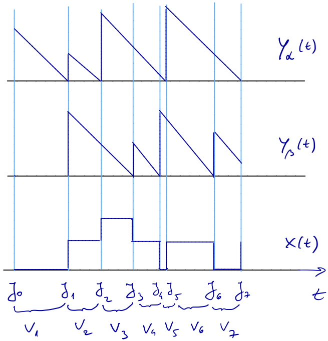
$$J_0 = 0, \quad J_n = \sum_{i=1}^{n} V_i,\ n \geq 1$$

  L'algorithme calcule les variables $(X, Y_\alpha, \alpha \in A(X))$ aux dates de saut seulement $\to$ simulation à événements discrets.

  Algorithme s'appelle aussi algorithme de la table d'événements.

Remarques

- Pour connaître le processus pour tout t (au moins jusqu'au $\sup_n J_n$), après 3 :
  - $X(s) := X(t)$, $\forall t \leq s < t + V$;
  - Pour $\alpha \in A(X(t))$,
    $Y_\alpha(s) := Y_\alpha(t) - (s-t)c(\alpha, X(t))$, $\forall t \leq s < t + V$;



Problèmes étudiés

- Stabilité
  Sous quelles conditions $X(t)$ converge-t-il en loi (ou dans un autre sens) vers une v.a. limite p.s. finie X ?

Problèmes étudiés

- Stabilité
  Sous quelles conditions $X(t)$ converge-t-il en loi (ou dans un autre sens) vers une v.a. limite p.s. finie X ?
- Caractérisation des processus
  Sous quelles conditions $X(t)$ vérifie la propriété de Markov ?

Problèmes étudiés

- Stabilité
  Sous quelles conditions $X(t)$ converge-t-il en loi (ou dans un autre sens) vers une v.a. limite p.s. finie X ?
- Caractérisation des processus
  Sous quelles conditions $X(t)$ vérifie la propriété de Markov ?
- Caractérisation des lois
  Transitoire : loi de $X(t)$
  Stationnaire : X

Problèmes étudiés

- Stabilité
  Sous quelles conditions $X(t)$ converge-t-il en loi (ou dans un autre sens) vers une v.a. limite p.s. finie X ?
- Caractérisation des processus
  Sous quelles conditions $X(t)$ vérifie la propriété de Markov ?
- Caractérisation des lois
  Transitoire : loi de $X(t)$
  Stationnaire : X
- Performances, comparaison des systèmes, dimensionnement
  En étudiant $X(t)$ ou des processus dérivés.

Problèmes étudiés

- Stabilité
  Sous quelles conditions $X(t)$ converge-t-il en loi (ou dans un autre sens) vers une v.a. limite p.s. finie X ?
- Caractérisation des processus
  Sous quelles conditions $X(t)$ vérifie la propriété de Markov ?
- Caractérisation des lois
  Transitoire : loi de $X(t)$
  Stationnaire : X
- Performances, comparaison des systèmes, dimensionnement
  En étudiant $X(t)$ ou des processus dérivés.
- Problèmes statistiques
  Chercher à utiliser le simulateur pour générer des v.a. ayant les lois qui nous intéressent. Peut-on construire les estimateurs efficaces ?

Processus de Poisson

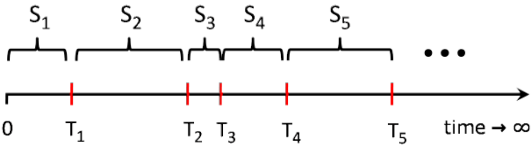
Point de vue des inter-arrivées

Définition. Un processus de Poisson avec taux (intensité ou paramètre) $\lambda > 0$ est défini par une suite des variables aléatoires *i.i.d.* des temps inter-arrivées, $S_1, S_2, \ldots$, telles que $S_i \sim Exp(\lambda)$.

Temps d'arrivées : $T_0, T_1, \ldots$, où $T_0 = 0$ et $T_k = \sum_{i=1}^{k} S_i$.
Soit

$$N(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{1}_{T_i \leq t}.$$

Alors $(N(t))_{t \geq 0}$ est appelé un processus de Poisson de taux λ.



Processus de Poisson

Proposition. Soit $(N(t))_{t \geq 0}$ un processus de Poisson de taux λ. Pour tout $t, s \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbf{P}_n(t) = \mathbf{P}(N(t+s) - N(s) = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

Démonstration. Exercice (TD).

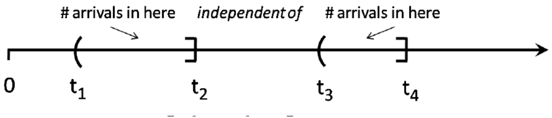
Corollaire. $\mathbf{E}[N(t)] = \lambda t$
(le nombre moyen des arrivées dans l'intervalle $[0, t]$ est égal à λt).

Remarque. On appelle souvent λ le taux d'arrivées.

Proprétés

Proposition. Soient $s, t \geq 0$. Le nombre des arrivées dans l'intervalle $(s, s+t]$, égal à $N(s+t) - N(s)$ a aussi la distribution $Poiss(\lambda t)$.

Proposition. Soit $(N(t))_{t \geq 0}$ un processus de Poisson de taux λ, et $(t_1, t_2]$, $(t_3, t_4]$ deux intervalles disjoints. Alors $N(t_2) - N(t_1)$ est indépendant de $N(t_4) - N(t_3)$.



Définition alternative

Point de vue des arrivées Poissoniennes

Définition. Un processus stochastique $\{X(t),\ t \geq 0\}$ est un processus de comptage si :

- $X(t) \in \mathbb{N},\ \forall t$;
- $s \leq t$ implique $X(s) \leq X(t)$.

Définition alternative

Point de vue des arrivées Poissoniennes

Définition. Un processus stochastique $\{X(t),\ t \geq 0\}$ est un processus de comptage si :

- $X(t) \in \mathbb{N},\ \forall t$;
- $s \leq t$ implique $X(s) \leq X(t)$.

Définition. Un processus de Poisson de taux $\lambda > 0$ est un processus de comptage $(N(t))_{t \geq 0}$ tel que :

- $N(0) = 0$;
- Si $(t_1, t_2]$, $(t_3, t_4]$ sont deux intervalles disjoints, lors $N(t_2) - N(t_1)$ est indépendant de $N(t_4) - N(t_3)$ (les increments indépendants) ;
- $N(s+t) - N(s) \sim Poiss(\lambda t),\ s, t \geq 0$.

Définition alternative

Point de vue des arrivées Poissoniennes

Définition. Un processus stochastique $\{X(t),\ t \geq 0\}$ est un processus de comptage si :

- $X(t) \in \mathbb{N},\ \forall t$;
- $s \leq t$ implique $X(s) \leq X(t)$.

Définition. Un processus de Poisson de taux $\lambda > 0$ est un processus de comptage $(N(t))_{t \geq 0}$ tel que :

- $N(0) = 0$;
- Si $(t_1, t_2]$, $(t_3, t_4]$ sont deux intervalles disjoints, lors $N(t_2) - N(t_1)$ est indépendant de $N(t_4) - N(t_3)$ (les increments indépendants) ;
- $N(s+t) - N(s) \sim Poiss(\lambda t),\ s, t \geq 0$.

Proposition. Les deux définitions sont équivalentes.

Une autre définition

Définition. Un processus de Poisson de taux $\lambda > 0$ est un processus de comptage $(N(t))_{t\geq 0}$ tel que :

- $N(0) = 0$;
- Si $(t_1, t_2]$, $(t_3, t_4]$ sont deux intervalles disjoints, lors $N(t_2) - N(t_1)$ est indépendant de $N(t_4) - N(t_3)$ (les increments indépendants) ;
- Pour tout $t \geq 0$,

$$\mathbf{P}(N(t+\delta) - N(t) = 1) = \lambda\delta + o(\delta).$$

- "Une seule arrivée à la fois" :

$$\mathbf{P}(N(t+\delta) - N(t) \geq 2) = o(\delta).$$

Une autre définition

Définition. Un processus de Poisson de taux $\lambda > 0$ est un processus de comptage $(N(t))_{t \geq 0}$ tel que :

- $N(0) = 0$;
- Si $(t_1, t_2]$, $(t_3, t_4]$ sont deux intervalles disjoints, lors $N(t_2) - N(t_1)$ est indépendant de $N(t_4) - N(t_3)$ (les increments indépendants) ;
- Pour tout $t \geq 0$,

$$\mathbf{P}(N(t+\delta) - N(t) = 1) = \lambda\delta + o(\delta).$$

- "Une seule arrivée à la fois" :

$$\mathbf{P}(N(t+\delta) - N(t) \geq 2) = o(\delta).$$

Proposition. Cette définition est équivalente aux deux premières.

Propriétés

Définition. Deux processus de Poisson $(N_A(t))_{t\geq 0}$ et $(N_B(t))_{t\geq 0}$ sont indépendants si leur temps d'inter-arrivées sont indépendants.

Proposition. (Superposition). La superposition de processus de Poisson indépendants de taux $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ est un processus de Poisson de taux $\sum_{i=1}^n \lambda_i$.
Chaque arrivée dans le processus $(N(t))_{t\geq 0} = \sum_{i=1}^n (N_i(t))_{t\geq 0}$ provient du processus $(N_i(t))_{t\geq 0}$ avec probabilité $\frac{\lambda_i}{\sum_{j=1}^n \lambda_j}$.

Proposition. (Splitting). Dans un processus de Poisson, on marque chaque arrivée par un entier dans $\{1, \ldots, n\}$ *i.i.d.* selon une loi discrete $p = (p_1, \ldots, p_n)$. Alors les points marqués par l'entier i suivent un processus de Poisson de taux $p_i\lambda$, et ces processus de Poisson forment une famille de processus indépendants.

Propriétés

Proposition. Pour $s \leq t$, $P(T_1 < s \mid N(t) = 1) = \frac{s}{t}$.

Propriétés

Proposition. Pour $s \leq t$, $P(T_1 < s \mid N(t) = 1) = \frac{s}{t}$.

Preuve.

$$P(T_1 < s \mid N(t) = 1) = \frac{P(T_1 < s,\ N(t) = 1)}{P(N(t) = 1)}$$

Propriétés

Proposition. Pour $s \leq t$, $P(T_1 < s \mid N(t) = 1) = \frac{s}{t}$.

Preuve.

$$
\begin{aligned}
P(T_1 < s \mid N(t) = 1) &= \frac{P(T_1 < s,\ N(t) = 1)}{P(N(t) = 1)} \\
&= \frac{P(N(s) = 1,\ N(t) - N(s) = 0)}{P(N(t) = 1)}
\end{aligned}
$$

Propriétés

Proposition. Pour $s \leq t$, $P(T_1 < s \mid N(t) = 1) = \frac{s}{t}$.

Preuve.

$$
\begin{aligned}
P(T_1 < s \mid N(t) = 1) &= \frac{P(T_1 < s,\ N(t) = 1)}{P(N(t) = 1)} \\
&= \frac{P(N(s) = 1,\ N(t) - N(s) = 0)}{P(N(t) = 1)} \\
&= \frac{\lambda s e^{-\lambda s} e^{-\lambda(t-s)}}{\lambda t e^{-\lambda t}} = \frac{s}{t}.
\end{aligned}
$$

On a utilisé : $N(s)$ indépendant de $N(t) - N(s)$.