Modèles et algorithmes des réseaux

Propriétés de stabilité et politique MaxWeight

Applications : commutateurs (switches) et réseaux P2P sans fil

Ana Busic

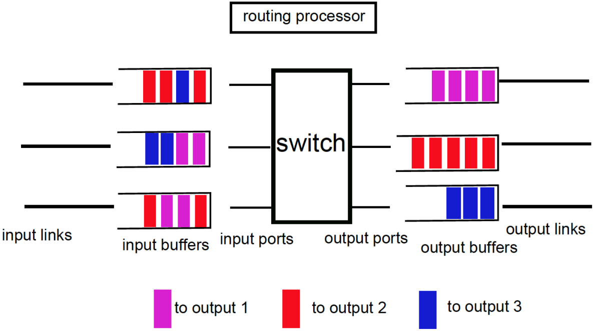
Inria Paris - DI ENS

http://www.di.ens.fr/~busic/
ana.busic@inria.fr

Paris, Octobre 2018

Plan

Ordonnancement dans un routeur



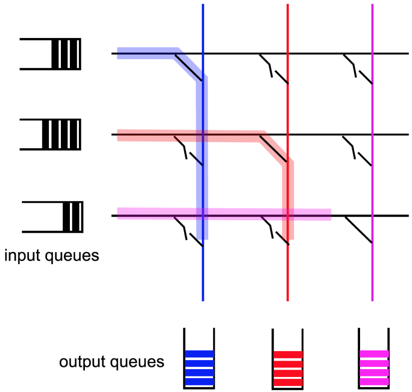
Hypothèse : tous les paquets ont la même taille.

Internet : paquets de taille variable. Dans les commutateurs (switch en anglais), divisés en sous-paquets de même taille et rassemblés à la sortie.

Architecture en grille (crossbar switch)

$N \times N$ crossbar switch :

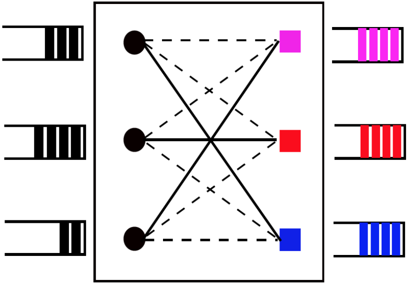
- N ports d'entrée et N ports de sortie.
- Au plus une connection par ligne et par colonne.



Modèle : graphe biparti complet $N \times N$

Graphe biparti : un graphe (non-dirigé) est dit biparti s'il existe une partition de son ensemble de sommets en deux sous-ensembles U et V t.q. chaque arête ait une extrémité dans U et l'autre dans V.
Crossbar switch : U ports d'entrée et V ports de sortie.

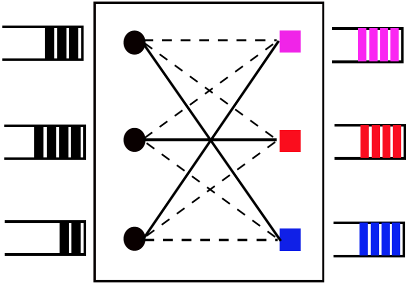
Graphe biparti complet : chaque sommet de U est relié à chaque sommet de V.



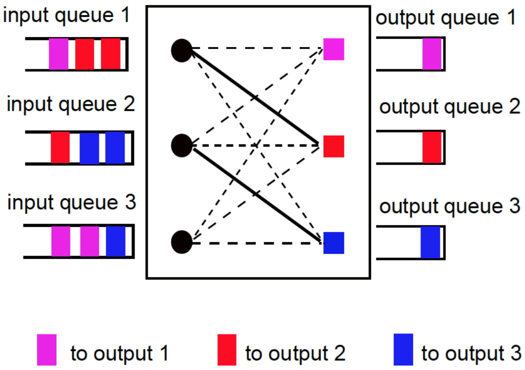
Ordonnancement - couplage dans un graphe biparti

Couplage (anglais : matching) : ensemble d'arêtes sans sommet commun.

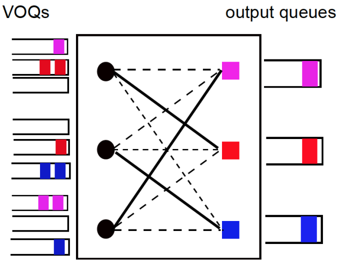
Ordonnancement : un ensemble de connections entrée/sortie t.q. au plus une connection ouverte par port d'entrée et par port de sortie.



Problème : blocage HOL



Files de sortie virtuelles



Modèle :

- $q_{ij}(t)$ taille de file VOQ pour le port d'entrée i et sortie j
- $a_{ij}(t)$ nombre de paquets arrivant à la date t sur le port d'entrée i et qui demandent le port j
  Hypothèse : i.i.d. Ber(λ_{ij}) et indep. des autres files.
- $M_{ij}(t)$ couplage au temps t ; $M_{ij}(t) \in \{0, 1\}$ (1 ssi connection).
- Evolution : $q_{ij}(t+1) = (q_{ij}(t) - M_{ij}(t))^+ + a_{ij}(t)$.

Region de capacité

Ordonnancement markovien : $M(t)$ fonction de $q(t)$ uniquement (idépendance du passé).

Stabilité : ordonnancement stable si la chaîne de Markov $\{q(t)\}_{t\geq 0}$ est récurrente positive.

Question : sur quelles conditions sur λ existe-t-il un ordonnancement (markovien) stable ?

Region de capacité

Ordonnancement markovien : $M(t)$ fonction de $q(t)$ uniquement (idépendance du passé).

Stabilité : ordonnancement stable si la chaîne de Markov $\{q(t)\}_{t\geq 0}$ est récurrente positive.

Question : sur quelles conditions sur λ existe-t-il un ordonnancement (markovien) stable ?

Soit

$$\mathcal{C} = \left\{ \lambda \ : \ \lambda \geq 0, \sum_{i=1}^{N} \lambda_{ij} \leq 1, \ \forall j \text{ and } \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij} \leq 1, \ \forall i \right\}.$$

Thm (conditions nécessaires) : Si $\lambda \notin \mathcal{C}$ alors aucun ordonnancement n'est stable.

Preuve

Selon définition de $\mathcal{C}$, $\lambda \notin \mathcal{C}$ implique que $\sum_i \lambda_{ij} > 1$ pour un j ou $\sum_j \lambda_{ij} > 1$ pour un i.

On suppose qu'il existe un j^* et $\epsilon > 0$ t.q. $\sum_i \lambda_{ij^*} \geq 1 + \epsilon$.
(Preuve symétrique pour l'autre cas).

Preuve

Selon définition de $\mathcal{C}$, $\lambda \notin \mathcal{C}$ implique que $\sum_i \lambda_{ij} > 1$ pour un j ou $\sum_j \lambda_{ij} > 1$ pour un i.

On suppose qu'il existe un j^* et $\epsilon > 0$ t.q. $\sum_i \lambda_{ij^*} \geq 1 + \epsilon$.
(Preuve symétrique pour l'autre cas).

Pour tout i, j,

$$q_{ij}(t+1) = (q_{ij}(t) - M_{ij}(t))^+ + a_{ij}(t) \geq q_{ij}(t) + a_{ij}(t) - M_{ij}(t),$$

donc

$$\sum_i q_{ij^*}(t+1) \geq \sum_{s=1}^{t} \left(\sum_i a_{ij^*}(s) - \sum_i M_{ij^*}(s) \right).$$

Preuve

Selon définition de $\mathcal{C}$, $\lambda \notin \mathcal{C}$ implique que $\sum_i \lambda_{ij} > 1$ pour un j ou $\sum_j \lambda_{ij} > 1$ pour un i.

On suppose qu'il existe un j^* et $\epsilon > 0$ t.q. $\sum_i \lambda_{ij^*} \geq 1 + \epsilon$.
(Preuve symétrique pour l'autre cas).

Pour tout i, j,

$$q_{ij}(t+1) = (q_{ij}(t) - M_{ij}(t))^+ + a_{ij}(t) \geq q_{ij}(t) + a_{ij}(t) - M_{ij}(t),$$

donc

$$\sum_i q_{ij^*}(t+1) \geq \sum_{s=1}^{t} \left(\sum_i a_{ij^*}(s) - \sum_i M_{ij^*}(s) \right).$$

Loi forte des grands nombres $\Rightarrow$ avec probabilité 1,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \sum_{s=1}^{t} \sum_i a_{ij^*}(s) = \sum_i \lambda_{ij^*} \geq 1 + \epsilon.$$

Preuve

Selon définition de $\mathcal{C}$, $\lambda \notin \mathcal{C}$ implique que $\sum_i \lambda_{ij} > 1$ pour un j ou $\sum_j \lambda_{ij} > 1$ pour un i.

On suppose qu'il existe un j^* et $\epsilon > 0$ t.q. $\sum_i \lambda_{ij^*} \geq 1 + \epsilon$.
(Preuve symétrique pour l'autre cas).

Pour tout i, j,

$$q_{ij}(t+1) = (q_{ij}(t) - M_{ij}(t))^+ + a_{ij}(t) \geq q_{ij}(t) + a_{ij}(t) - M_{ij}(t),$$

donc

$$\sum_i q_{ij^*}(t+1) \geq \sum_{s=1}^{t} \left(\sum_i a_{ij^*}(s) - \sum_i M_{ij^*}(s) \right).$$

Loi forte des grands nombres $\Rightarrow$ avec probabilité 1,

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \sum_{s=1}^{t} \sum_i a_{ij^*}(s) = \sum_i \lambda_{ij^*} \geq 1 + \epsilon.$$

$M(t)$ est un couplage, donc $\sum_i M_{ij^*}(s) \leq 1$ pour tout t.

Preuve

Selon définition de $\mathcal{C}$, $\lambda \notin \mathcal{C}$ implique que $\sum_i \lambda_{ij} > 1$ pour un j ou $\sum_j \lambda_{ij} > 1$ pour un i.

On suppose qu'il existe un j^* et $\epsilon > 0$ t.q. $\sum_i \lambda_{ij^*} \geq 1 + \epsilon$.
(Preuve symétrique pour l'autre cas).

Pour tout i, j,

$$q_{ij}(t+1) = (q_{ij}(t) - M_{ij}(t))^+ + a_{ij}(t) \geq q_{ij}(t) + a_{ij}(t) - M_{ij}(t),$$

donc

$$\sum_i q_{ij^*}(t+1) \geq \sum_{s=1}^{t} \left(\sum_i a_{ij^*}(s) - \sum_i M_{ij^*}(s) \right).$$

Loi forte des grands nombres $\Rightarrow$ avec probabilité 1,

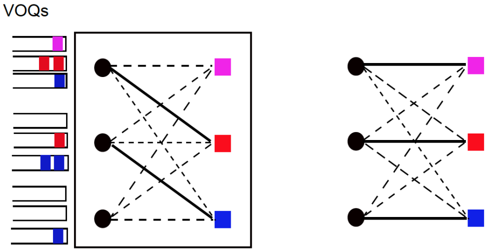
$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \sum_{s=1}^{t} \sum_i a_{ij^*}(s) = \sum_i \lambda_{ij^*} \geq 1 + \epsilon.$$

$M(t)$ est un couplage, donc $\sum_i M_{ij^*}(s) \leq 1$ pour tout t.
Donc avec probabilité 1, $\sum_i q_{ij^*}(t) \to \infty$ as $t \to \infty$.

Ordonnancement MaxWeight

MaxWeight : $M(t) \in \arg\max_{M'} \sum_{ij} q_{ij} M'_{ij}$.

Un paquet est transféré de la file VOQ(i,j) si $M_{ij}(t) = 1$ et $q_{ij}(t) > 0$.



MaxWeight Matching

MaxWeight a la region de stabilité maximale

Thm : Ordonnancement MaxWeight est stable pour tout λ t.q. $(1+\epsilon)\lambda \in \mathcal{C}$ pour un $\epsilon > 0$.

MaxWeight a la region de stabilité maximale

Thm : Ordonnancement MaxWeight est stable pour tout λ t.q. $(1+\epsilon)\lambda \in \mathcal{C}$ pour un $\epsilon > 0$.

Preuve en utilisant le théorème de Birkhoff-von Neumann et le critère de stabilité de Foster-Lyapunov.

Thm (Birkhoff-von Neumann). Une matrice carrée λ est doublement stochastique ssi elle est une combinaison convexe de matrices de permutation matrices, i.e., il existe un $\beta \geq 0$ t.q. $\sum_h \beta_h = 1$ et $\lambda = \sum_h \beta_h U^{(h)}$, où $U^{(h)}$ sont des matrices de permutation.

Critère de Foster-Lyapunov

Thm (Foster). Soit $\{X_t\}_{t\geq 0}$ une chaîne de Markov avec un espace d'états denombrable $\mathcal{X}$ et une matrice de transition P. S'il existe un $\epsilon > 0$, un ensemble fini $F \subset \mathcal{X}$ et une fonction $V : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^+$ t.q.

$$\sum_{j\in\mathcal{X}} p_{i,j} V(j) < \infty, \forall i \in F,$$

et

$$\sum_{j\in\mathcal{X}} p_{i,j} V(j) \leq V(i) - \epsilon, \forall i \notin F,$$

alos $\{X_t\}_{t\geq 0}$ est récurrente positive.

Preuve : Chap. 5 de Pierre Brémaud. Markov Chains : Gibbs Fiels, Monte Carlo Simulation, and Queues, Springer, 2008.

MaxWeight a la region de stabilité maximale

Thm : Ordonnancement MaxWeight est stable pour tout λ t.q. $(1+\epsilon)\lambda \in \mathcal{C}$ pour un $\epsilon > 0$.

Preuve :

Fonction de Lyapunov : $V(q(t)) = \sum_{ij} q_{ij}^2(t)$.

MaxWeight a la region de stabilité maximale

Thm : Ordonnancement MaxWeight est stable pour tout λ t.q. $(1+\epsilon)\lambda \in \mathcal{C}$ pour un $\epsilon > 0$.

Preuve :

Fonction de Lyapunov : $V(q(t)) = \sum_{ij} q_{ij}^2(t)$.

$$V(q(t+1)) - V(q(t)) = \sum_{ij}((q_{ij}(t) - M_{ij}(t))^+ + a_{ij}(t))^2 - \sum_{ij} q_{ij}^2(t)$$

MaxWeight a la region de stabilité maximale

Thm : Ordonnancement MaxWeight est stable pour tout λ t.q. $(1+\epsilon)\lambda \in \mathcal{C}$ pour un $\epsilon > 0$.

Preuve :

Fonction de Lyapunov : $V(q(t)) = \sum_{ij} q_{ij}^2(t)$.

$$\begin{aligned} V(q(t+1)) - V(q(t)) &= \sum_{ij} \left((q_{ij}(t) - M_{ij}(t))^+ + a_{ij}(t) \right)^2 - \sum_{ij} q_{ij}^2(t) \\ &= \sum_{ij} \left(q_{ij}(t) - \hat{M}_{ij}(t) + a_{ij}(t) \right)^2 - \sum_{ij} q_{ij}^2(t) \\ & \quad (\text{avec } \hat{M}_{ij}(t) = M_{ij}(t) \mathbf{1}_{q_{ij}(t)>0}) \end{aligned}$$

MaxWeight a la region de stabilité maximale

Thm : Ordonnancement MaxWeight est stable pour tout λ t.q. $(1+\epsilon)\lambda \in \mathcal{C}$ pour un $\epsilon > 0$.

Preuve :

Fonction de Lyapunov : $V(q(t)) = \sum_{ij} q_{ij}^2(t)$.

$$
\begin{aligned}
V(q(t+1)) - V(q(t)) &= \sum_{ij} ((q_{ij}(t) - M_{ij}(t))^+ + a_{ij}(t))^2 - \sum_{ij} q_{ij}^2(t) \\
&= \sum_{ij} (q_{ij}(t) - \hat{M}_{ij}(t) + a_{ij}(t))^2 - \sum_{ij} q_{ij}^2(t) \\
&\quad (\text{avec } \hat{M}_{ij}(t) = M_{ij}(t)\mathbf{1}_{q_{ij}(t)>0}) \\
&= \sum_{ij} 2q_{ij}(t)(a_{ij}(t) - \hat{M}_{ij}(t)) + \sum_{ij} (\hat{M}_{ij}(t) - a_{ij}(t))^2
\end{aligned}
$$

MaxWeight a la region de stabilité maximale

$$V(q(t+1)) - V(q(t)) = \sum_{ij} 2q_{ij}(t)(\hat{M}_{ij}(t) - a_{ij}(t)) + \sum_{ij}(\hat{M}_{ij}(t) - a_{ij}(t))^2$$

MaxWeight a la region de stabilité maximale

$$V(q(t+1)) - V(q(t)) = \sum_{ij} 2q_{ij}(t)(\hat{M}_{ij}(t) - a_{ij}(t)) + \sum_{ij} (\hat{M}_{ij}(t) - a_{ij}(t))^2$$

On a

$$\begin{aligned} E[V(q(t+1)) - V(q(t)) \mid q(t) = q] &\leq 2\sum_{ij} q_{ij}(\lambda_{ij} - E[\hat{M}_{ij}(t) \mid q(t) = q]) \\ &\quad + N + \sum_{ij} \lambda_{ij} \end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned} \sum_{ij} E[(\hat{M}_{ij}(t) - a_{ij}(t))^2 \mid q(t) = q] &\leq \sum_{ij} E[\hat{M}_{ij}^2(t) + a_{ij}^2(t) \mid q(t) = q] \\ &\leq N + \sum_{ij} \lambda_{ij} \end{aligned}$$

MaxWeight a la region de stabilité maximale

$$\begin{aligned} E[V(q(t+1)) - V(q(t)) \mid q(t) = q] \quad &\leq \quad 2\sum_{ij} q_{ij}(\lambda_{ij} - E[\hat{M}_{ij}(t) \mid q(t) = q]) \\ &\quad + N + \sum_{ij} \lambda_{ij} \end{aligned}$$

MaxWeight a la region de stabilité maximale

$$\begin{aligned} E[V(q(t+1)) - V(q(t)) \mid q(t) = q] &\leq 2 \sum_{ij} q_{ij}(\lambda_{ij} - E[\hat{M}_{ij}(t) \mid q(t) = q]) \\ &\quad + N + \sum_{ij} \lambda_{ij} \end{aligned}$$

Thm. Birkhoff-von Neumann et $(1+\epsilon)\lambda \in \mathcal{C}$ impliquent qu'il existe un $\beta \geq 0, \sum_h \beta_h = 1$ et

$$(1+\epsilon)\lambda \leq \sum_h \beta_h U_{ij}^{(h)}$$

où $U^{(h)}$ sont des matrices de permutation.

MaxWeight a la region de stabilité maximale

$$
\begin{aligned}
E[V(q(t+1)) - V(q(t)) \mid q(t) = q] \quad &\leq \quad 2\sum_{ij} q_{ij}(\lambda_{ij} - E[\hat{M}_{ij}(t) \mid q(t) = q]) \\
&\quad + N + \sum_{ij} \lambda_{ij}
\end{aligned}
$$

Thm. Birkhoff-von Neumann et $(1+\epsilon)\lambda \in \mathcal{C}$ impliquent qu'il existe un $\beta \geq 0, \sum_h \beta_h = 1$ et

$$
(1+\epsilon)\lambda \leq \sum_h \beta_h U_{ij}^{(h)}
$$

où $U^{(h)}$ sont des matrices de permutation.

$$
\begin{aligned}
(1+\epsilon)\sum_{ij} q_{ij}\lambda_{ij} \quad &\leq \quad \sum_{ij} q_{ij}\left(\sum_h \beta_h U_{ij}^{(h)}\right) = \sum_h \beta_h \left(\sum_{ij} q_{ij} U_{ij}^{(h)}\right) \\
&\leq \quad \left(\sum_h \beta_h\right)\left(\max_h \left(\sum_{ij} q_{ij} U_{ij}^{(h)}\right)\right) = \max_h \left(\sum_{ij} q_{ij} U_{ij}^{(h)}\right) \\
&\leq \quad \max_k \left(\sum_{ij} q_{ij} M_{ij}^{(k)}\right) = \sum_{ij} q_{ij} E[\hat{M}_{ij}(t) \mid q(t) = q]
\end{aligned}
$$

MaxWeight a la region de stabilité maximale

$$
\begin{aligned}
E[V(q(t+1)) - V(q(t)) \mid q(t) = q] \quad &\leq \quad 2\sum_{ij} q_{ij}(\lambda_{ij} - E[\hat{M}_{ij}(t) \mid q(t) = q]) \\
&\quad +N + \sum_{ij} \lambda_{ij}
\end{aligned}
$$

Thm. Birkhoff-von Neumann et $(1+\epsilon)\lambda \in \mathcal{C}$ impliquent qu'il existe un $\beta \geq 0, \sum_h \beta_h = 1$ et

$$
(1+\epsilon)\lambda \leq \sum_h \beta_h U_{ij}^{(h)}
$$

où $U^{(h)}$ sont des matrices de permutation.

$$
\begin{aligned}
(1+\epsilon)\sum_{ij} q_{ij}\lambda_{ij} \quad &\leq \quad \sum_{ij} q_{ij}\left(\sum_h \beta_h U_{ij}^{(h)}\right) = \sum_h \beta_h \left(\sum_{ij} q_{ij} U_{ij}^{(h)}\right) \\
&\leq \quad \left(\sum_h \beta_h\right)\left(\max_h \left(\sum_{ij} q_{ij} U_{ij}^{(h)}\right)\right) = \max_h \left(\sum_{ij} q_{ij} U_{ij}^{(h)}\right) \\
&\leq \quad \max_k \left(\sum_{ij} q_{ij} M_{ij}^{(k)}\right) = \sum_{ij} q_{ij} E[\hat{M}_{ij}(t) \mid q(t) = q]
\end{aligned}
$$

MaxWeight a la region de stabilité maximale

Donc il existe une distribution stationnaire π et

$$\lambda \leq \sum_k \pi_k M^{(k)}$$

Une définition alternative de la region de capacité

$$\mathrm{Co}\left(\left\{M^{(k)}\right\}_k\right)$$

MaxWeight a la region de stabilité maximale

Donc il existe une distribution stationnaire π et

$$\lambda \leq \sum_k \pi_k M^{(k)}$$

Une définition alternative de la region de capacité

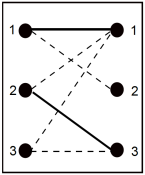
$$\mathrm{Co}\left(\left\{M^{(k)}\right\}_k\right)$$

Exercice : montrer l'équivalence.

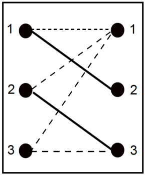
Ordonnancement par le couplage maximal

MaxWeight : region de capacité maximale, mais la complexité $\mathcal{O}(N^3)$.

Ordonnancement par le couplage maximal : Enlever d'abord les files vides ($q_{ij}(t) = 0$) du graphe biparti complet, puis calculer un couplage maximal $M(t)$ dans ce sous-graphe. Un paquet de $VOQ(i,j)$ est transféré vers port de sorti j si $M_{ij}(t) = 1$.



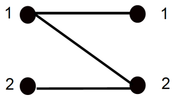
A maximal matching



A matching, but not maximal

Ordonnancement par le couplage maximal

La region de capacité peut être réduite :
Exemple : 2×2 switch. On suppose $\lambda_{21} = 0$, donc $q_{21}(t) = 0$ pour tout $t \geq 0$:



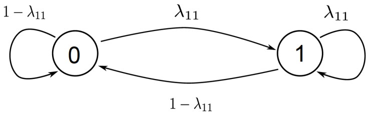
Ordonnancement par le couplage maximal fixé à :

- Si $q_{11}(t) > 0$ et $q_{22}(t) > 0$, alors $(1, 1)$ et $(2, 2)$ sont activés.
- Si $q_{11}(t) > 0$ et $q_{22}(t) = 0$, arrête $(1, 1)$ est activé.
- Si $q_{11}(t) = 0$ et $q_{22}(t) > 0$, arrête $(2, 2)$ est activé.
- Si $q_{11}(t) = q_{22}(t) = 0$ et $q_{12}(t) > 0$, arrête $(1, 2)$ est activé.

Files $VOQ(1, 1)$ et $VOQ(2, 2)$ sont indépendantes de $VOQ(1, 2)$, et entre elles.

Ordonnancement par le couplage maximal

$VOQ(1,1)$ est servi dès que non-vide, donc chaîne de Markov pour $q_{11}(t)$



Soit $\lambda_{11} = \lambda_{22} = 0.5$. Distribution stationnaire de f q_{11} est $(0.5, 0.5)$.

$VOQ(1,2)$ servi uniquement si $q_{11}(t) = q_{22}(t) = 0$ donc

$$\lambda_{12} < 0.25$$

Region de capacité :

$$\lambda_{11} + \lambda_{12} < 1, \quad \lambda_{22} + \lambda_{12} < 1$$

Si $\lambda_{11} = \lambda_{22} = 0.5$, λ_{12} peut être jusqu'à 0.5 si on considère la region de capacité maximale.

Ordonnancement par le couplage maximal

Thm. Ordonnancement par le couplage maximal est stable pour tout λ t.q. $2(1+\epsilon)\lambda \in \mathcal{C}$ pour un $\epsilon > 0$.

Ordonnancement par le couplage maximal

Thm. Ordonnancement par le couplage maximal est stable pour tout λ t.q. $2(1+\epsilon)\lambda \in \mathcal{C}$ pour un $\epsilon > 0$.

Idée de preuve : Fonction de Lyapunov

$$V(q(t)) = \sum_{ij} q_{ij}(t) \left(\sum_k q_{kj}(t) + \sum_h q_{ih}(t) \right).$$

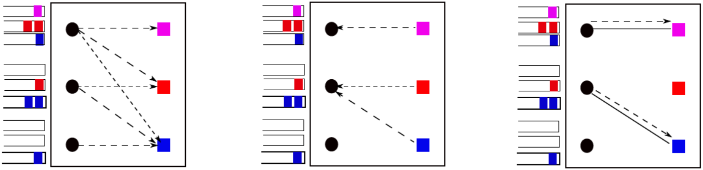
Ordonnancement par le couplage maximal

Algorithme distribué :

Initialisation : $M(t) = 0$

Tant que $M(t)$ n'est pas un matching maximal :

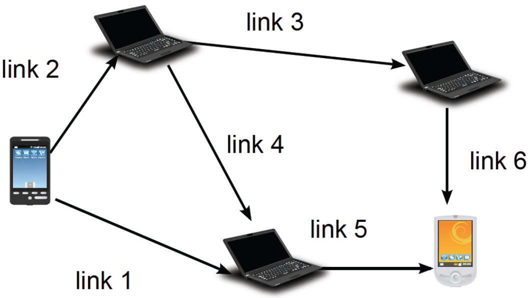
- Chaque port d'entrée i encore libre envoie un message à chaque port de sortie j t.q. $q_{ij}(t) > 0$ (et j encore libre)
- Chaque port de sortie j encore libre choisi uniformément un message reçu et envoie un message ACK
- Port d'entrée i choisi uniformément un ACK reçu et le confirme. On pose $M_{ij}(t) = 1$.



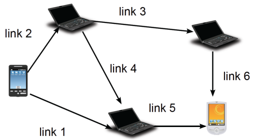
Ordonnancement dans un réseau ad-hoc P2P sans fil

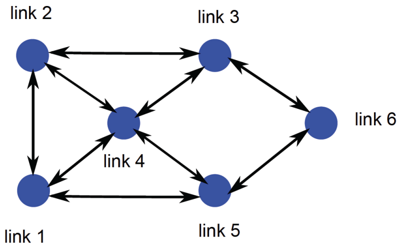
CSMA : carrier sense multiple access

- CD (collision detection)
- CA (collision avoidance)



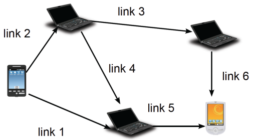
Graphe de conflits

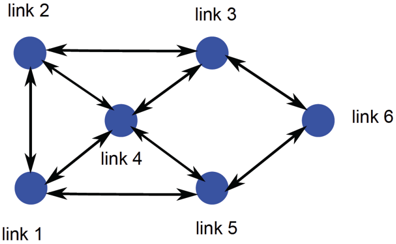




Ordonnancement : un ensemble de liens pouvant être activés au même temps sans interférence

Graphe de conflits



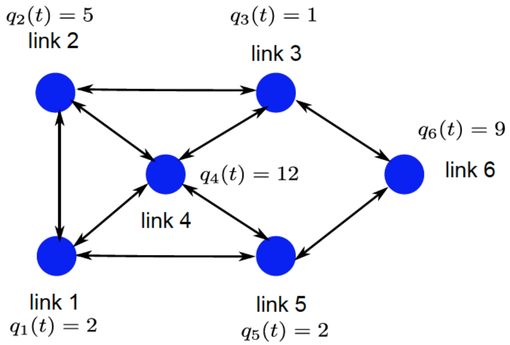


Ordonnancement : un ensemble de liens pouvant être activés au même temps sans interférence

Un ensemble indépendant dans le graphe de conflits.

Ordonnancement MaxWeight

MaxWeight : $S(t) \in \arg\max_{S'} \sum_{ij} q_{ij} S'_{ij}$.



Region de capacité

Soit H le nombre d'ordonnancements possibles et

$$\mathcal{C} = \left\{ \lambda \ : \ \lambda_l \leq \sum_{l=1}^{H} \alpha_h S_l^{(h)}, \ \forall l, \text{ pour un } \alpha \geq 0 \text{ t.q. } \sum_h \alpha_h \leq 1 \right\}.$$

Region de capacité

Soit H le nombre d'ordonnancements possibles et

$$\mathcal{C} = \left\{ \lambda \ : \ \lambda_l \leq \sum_{l=1}^{H} \alpha_h S_l^{(h)}, \ \forall l, \text{ pour un } \alpha \geq 0 \text{ t.q. } \sum_h \alpha_h \leq 1 \right\}.$$

Thm. Si $\lambda \notin \mathcal{C}$, alors le système n'est pas stable.

Region de capacité

Soit H le nombre d'ordonnancements possibles et

$$\mathcal{C} = \left\{ \lambda \;:\; \lambda_l \leq \sum_{l=1}^{H} \alpha_h S_l^{(h)},\ \forall l,\ \text{pour un } \alpha \geq 0 \text{ t.q. } \sum_h \alpha_h \leq 1 \right\}.$$

Thm. Si $\lambda \notin \mathcal{C}$, alors le système n'est pas stable.

Thm. Ordonnancement MaxWeight est stable pour toute matrice λ t.q. $(1+\epsilon)\lambda \in \mathcal{C}$ pour un $\epsilon > 0$.

Region de capacité

Soit H le nombre d'ordonnancements possibles et

$$\mathcal{C} = \left\{ \lambda \ : \ \lambda_l \leq \sum_{l=1}^{H} \alpha_h S_l^{(h)}, \ \forall l, \text{ pour un } \alpha \geq 0 \text{ t.q. } \sum_h \alpha_h \leq 1 \right\}.$$

Thm. Si $\lambda \notin \mathcal{C}$, alors le système n'est pas stable.

Thm. Ordonnancement MaxWeight est stable pour toute matrice λ t.q. $(1+\epsilon)\lambda \in \mathcal{C}$ pour un $\epsilon > 0$.

Idée de preuve : Fonction de Lyapunov

$$V(q(t)) = \sum_i q_i^2(t).$$

Q-CSMA

Dans les réseaux P2P ad-hoc :

- pas de nœud central
- besoin d'un algorithme distribué

Q-CSMA

Dans les réseaux P2P ad-hoc :

- pas de nœud central
- besoin d'un algorithme distribué

Q-CSMA

Idée : choisir un ensemble indépendant $h \in \mathcal{H} = \{1, \ldots, H\}$, selon

$$\pi_h = \frac{1}{Z} \exp\left(\sum_j w_j S_j^{(h)}\right)$$

avec w_j le poids du lien j et $Z = \sum_{h \in \mathcal{H}} \exp\left(\sum_j w_j S_j^{(h)}\right)$.

Q-CSMA

Dans les réseaux P2P ad-hoc :

- pas de nœud central
- besoin d'un algorithme distribué

Q-CSMA

Idée : choisir un ensemble indépendant $h \in \mathcal{H} = \{1, \ldots, H\}$, selon

$$\pi_h = \frac{1}{Z} \exp\left(\sum_j w_j S_j^{(h)}\right)$$

avec w_j le poids du lien j et $Z = \sum_{h \in \mathcal{H}} \exp\left(\sum_j w_j S_j^{(h)}\right)$.

On a

$$E[\sum_j w_j S_j] \geq \max_h \sum_j w_j S_j^{(h)} - H,$$

(proche de max-weight si les w suffisamment grands).

Q-CSMA

Preuve de : $E[\sum_j w_j S_j] \geq \max_h \sum_j w_j S_j^{(h)} - H$.

Q-CSMA

Preuve de : $E[\sum_j w_j S_j] \geq \max_h \sum_j w_j S_j^{(h)} - H$.

Soit $\gamma_h = \sum_j w_j S_j^{(h)}$ et $\mathcal{I}^* = \{k \ : \ \sum_j w_j S_j^{(k)} = \max_h \sum_j w_j S_j^{(h)}\}$.

Q-CSMA

Preuve de : $E[\sum_j w_j S_j] \geq \max_h \sum_j w_j S_j^{(h)} - H$.

Soit $\gamma_h = \sum_j w_j S_j^{(h)}$ et $\mathcal{I}^* = \{k \ : \ \sum_j w_j S_j^{(k)} = \max_h \sum_j w_j S_j^{(h)}\}$.

Soit $k^* \in \mathcal{I}^*$. Si on choisi le S selon π,

$$E[\sum_j w_j S_j] \quad = \quad \sum_h \pi_h \gamma_h = \gamma_{k^*} - \sum_{k \notin \mathcal{I}^*} \frac{e^{\gamma_k}}{Z}(\gamma_{k^*} - \gamma_k)$$

Q-CSMA

Preuve de : $E[\sum_j w_j S_j] \geq \max_h \sum_j w_j S_j^{(h)} - H$.

Soit $\gamma_h = \sum_j w_j S_j^{(h)}$ et $\mathcal{I}^* = \{k \ : \ \sum_j w_j S_j^{(k)} = \max_h \sum_j w_j S_j^{(h)}\}$.

Soit $k^* \in \mathcal{I}^*$. Si on choisi le S selon π,

$$\begin{aligned} E[\sum_j w_j S_j] &= \sum_h \pi_h \gamma_h = \gamma_{k^*} - \sum_{k \notin \mathcal{I}^*} \frac{e^{\gamma_k}}{Z}(\gamma_{k^*} - \gamma_k) \\ &= \gamma_{k^*} - \frac{e^{\gamma_{k^*}}}{Z} \sum_{k \notin \mathcal{I}^*} (e^{\gamma_k - \gamma_{k^*}})(\gamma_{k^*} - \gamma_k) \end{aligned}$$

Q-CSMA

Preuve de : $E[\sum_j w_j S_j] \geq \max_h \sum_j w_j S_j^{(h)} - H$.

Soit $\gamma_h = \sum_j w_j S_j^{(h)}$ et $\mathcal{I}^* = \{k \ : \ \sum_j w_j S_j^{(k)} = \max_h \sum_j w_j S_j^{(h)}\}$.

Soit $k^* \in \mathcal{I}^*$. Si on choisi le S selon π,

$$
\begin{aligned}
E[\sum_j w_j S_j] &= \sum_h \pi_h \gamma_h = \gamma_{k^*} - \sum_{k \notin \mathcal{I}^*} \frac{e^{\gamma_k}}{Z}(\gamma_{k^*} - \gamma_k) \\
&= \gamma_{k^*} - \frac{e^{\gamma_{k^*}}}{Z} \sum_{k \notin \mathcal{I}^*} (e^{\gamma_k - \gamma_{k^*}})(\gamma_{k^*} - \gamma_k) \\
&\geq \gamma_{k^*} - \sum_{k \notin \mathcal{I}^*} 1 = \gamma_{k^*} - (H - |\mathcal{I}^*|)
\end{aligned}
$$

Q-CSMA

Preuve de : $E[\sum_j w_j S_j] \geq \max_h \sum_j w_j S_j^{(h)} - H$.

Soit $\gamma_h = \sum_j w_j S_j^{(h)}$ et $\mathcal{I}^* = \{k \ : \ \sum_j w_j S_j^{(k)} = \max_h \sum_j w_j S_j^{(h)}\}$.

Soit $k^* \in \mathcal{I}^*$. Si on choisi le S selon π,

$$
\begin{aligned}
E[\sum_j w_j S_j] &= \sum_h \pi_h \gamma_h = \gamma_{k^*} - \sum_{k \notin \mathcal{I}^*} \frac{e^{\gamma_k}}{Z}(\gamma_{k^*} - \gamma_k) \\
&= \gamma_{k^*} - \frac{e^{\gamma_{k^*}}}{Z} \sum_{k \notin \mathcal{I}^*} (e^{\gamma_k - \gamma_{k^*}})(\gamma_{k^*} - \gamma_k) \\
&\geq \gamma_{k^*} - \sum_{k \notin \mathcal{I}^*} 1 = \gamma_{k^*} - (H - |\mathcal{I}^*|) \\
&\geq \gamma_{k^*} - H
\end{aligned}
$$

Q-CSMA

- En pratique les w changent.
- Si le changement est lent (i.e. $w_j < \log(1 + q_j)$), possible de montrer que la region de stabilité reste la même.
- Par la suite, on suppose w fixes.

Question : comment choisir les $S(t)$ selon π ?

Q-CSMA

Algorithme Q-CSMA

Initialisation : $S(0) \in \mathcal{H}$

Au temps t :

- Choisir un ensemble de décision $\mathcal{D} \in \mathcal{H}$ (des liens autorisés à changer d'état dans $\{0, 1\}$), indépendamment du passé.
- Pour les liens $j \in \mathcal{D}$:
  - Si j a un voisin qui est dans $S(t-1)$, alors $j \notin S(t)$.
  - Sinon, $j \in S(t)$ avec probabilité α_j.
- Pas de changement pour les autres liens : $S(t)_j = S(t-1)_j, j \notin \mathcal{D}$.

Q-CSMA

Algorithme Q-CSMA

Initialisation : $S(0) \in \mathcal{H}$

Au temps t :

- Choisir un ensemble de décision $\mathcal{D} \in \mathcal{H}$ (des liens autorisés à changer d'état dans $\{0, 1\}$), indépendamment du passé.
- Pour les liens $j \in \mathcal{D}$:
  - Si j a un voisin qui est dans $S(t-1)$, alors $j \notin S(t)$.
  - Sinon, $j \in S(t)$ avec probabilité α_j.
- Pas de changement pour les autres liens : $S(t)_j = S(t-1)_j, j \notin \mathcal{D}$.

Chaîne de Markov : $S(t)$ dépend de $S(t-1)$ et $\mathcal{D}(t)$ (représentation fonctionnelle).

Question : comment choisir les $p(\mathcal{D})$ et les α_j t.q. la chaîne de Markov $\{S(t)\}$ soit

- irréductible et apériodique,
- de distribution stationnaire π ?

Q-CSMA

Choix des $p(\mathcal{D})$:

- Chaque lien envoie un message avec proba q, $0 < q < 1$;
- Le lien est dans $\mathcal{D}$ s'il a envoyé le message et il n'y a pas eu de collision.

Q-CSMA

Choix des $p(\mathcal{D})$:

- Chaque lien envoie un message avec proba q, $0 < q < 1$;
- Le lien est dans $\mathcal{D}$ s'il a envoyé le message et il n'y a pas eu de collision.

Choix des α_j :

- Si $0 < \alpha_j < 1, \forall j$ alors la chaîne est irréductible et apériodique.

Q-CSMA

Choix des $p(\mathcal{D})$:

- Chaque lien envoie un message avec proba q, $0 < q < 1$;
- Le lien est dans $\mathcal{D}$ s'il a envoyé le message et il n'y a pas eu de collision.

Choix des α_j :

- Si $0 < \alpha_j < 1, \forall j$ alors la chaîne est irréductible et apériodique.
- Distribution stationnaire π
  - Reversible si $\pi(x)P(x,y) = \pi(y)P(y,x)$, pour tout $x, y \in \mathcal{H}$ (si reversible alors π est distribution stationnaire)

Q-CSMA

Choix des $p(\mathcal{D})$:

- Chaque lien envoie un message avec proba q, $0 < q < 1$;
- Le lien est dans $\mathcal{D}$ s'il a envoyé le message et il n'y a pas eu de collision.

Choix des α_j :

- Si $0 < \alpha_j < 1, \forall j$ alors la chaîne est irréductible et apériodique.
- Distribution stationnaire π
  - Reversible si $\pi(x)P(x,y) = \pi(y)P(y,x)$, pour tout $x, y \in \mathcal{H}$ (si reversible alors π est distribution stationnaire)
  - Soit $y = x + m_1 - m_2$. Alors on doit avoir $m_1 \cup m_2 \in \mathcal{D}$. On veut

$$\frac{e^{\gamma_x}}{Z} P(x, x + m_1 - m_2) = \frac{e^{\gamma_x + \gamma_{m_1} - \gamma_{m_2}}}{Z} P(x + m_1 - m_2, x)$$

  - Condition suffisante : $\alpha_j = \frac{e^{w_j}}{1+e^{w_j}}, \forall j$.