Modèles et algorithmes des réseaux

HITS, Gossip
et le théorème de Perron-Frobenius

Ana Busic

Inria Paris - DI ENS

http://www.di.ens.fr/~busic/
ana.busic@inria.fr

Paris, Octobre 2018

Plan

Algorithme HITS (Hyperlinked-Induced Topic Search)

Calcul distribué : protocole Gossip

Preuve du théorème de Perron-Frobenius

Algorithme HITS

Algorithme HITS (Hyperlinked-Induced Topic Search)
Aussi connu comme : Hubs & Autorités

Algorithme HITS

Algorithme HITS (Hyperlinked-Induced Topic Search)
Aussi connu comme : Hubs & Autorités

Deux étapes :

- Identifier un sous-graphe G
- Trouver dans G les pages les plus pertinentes en tant que
  - autorités
  - hubs

Algorithme HITS

Algorithme HITS (Hyperlinked-Induced Topic Search)
Aussi connu comme : Hubs & Autorités

Deux étapes :

- Identifier un sous-graphe G
- Trouver dans G les pages les plus pertinentes en tant que
  - autorités
  - hubs

Deux poids par nœud :

- x_v poids autorité
- y_v poids hub

Algorithme HITS

Itération de l'algorithme :

$$
\begin{aligned}
x_v(t+1) &= \sum_{u \to v} y_u(t), \forall v \\
y_v(t+1) &= \sum_{v \to u} x_u(t+1), \forall v
\end{aligned}
$$

Algorithme HITS

Itération de l'algorithme :

$$\begin{aligned} x_v(t+1) &= \sum_{u \to v} y_u(t), \forall v \\ y_v(t+1) &= \sum_{v \to u} x_u(t+1), \forall v \end{aligned}$$

Notation matricielle

Matrice d'incidence A, $A_{uv} = \begin{cases} 1, & u \to v \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$

Algorithme HITS

Itération de l'algorithme :

$$\begin{aligned} x_v(t+1) &= \sum_{u \to v} y_u(t), \forall v \\ y_v(t+1) &= \sum_{v \to u} x_u(t+1), \forall v \end{aligned}$$

Notation matricielle

Matrice d'incidence A, $A_{uv} = \begin{cases} 1, & u \to v \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$

$$\begin{aligned} x(t+1) &= A^t y(t), \\ y(t+1) &= A x(t+1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(t+1) &= A^t A x(t), \\ y(t+1) &= A A^t y(t). \end{aligned}$$

Matrice de co-citation : $A^t A$

Algorithme HITS

Initialisation : $x(0) = y(0) = \mathbf{1}$.

A chaque étape : renormaliser x et y : Notation : pour $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq \mathbf{0}$,

$$s(x) = \frac{x}{||x||},$$

où $||x||$ est une norme, par exemple norme-2, $||x||^2 = \sum_v x_v^2$.

Algorithme HITS

Initialisation : $x(0) = y(0) = \mathbf{1}$.

A chaque étape : renormaliser x et y : Notation : pour $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq \mathbf{0}$,

$$s(x) = \frac{x}{||x||},$$

où $||x||$ est une norme, par exemple norme-2, $||x||^2 = \sum_v x_v^2$.

Thm. Si l'algorithme converge (avec la normalisation), alors pour $x^* := \lim_{t\to\infty} x(t)$, $||x^*|| = 1$ et

$$x^* = s(A^t A x^*),$$

i.e. x^* doit être un vecteur propre de la matrice de co-citation $A^t A$.

Théorème de Perron-Frobenius

Matrice $T = (T_{ij})$ est

- positive si $T_{ij} \geq 0, \ \forall i, j$. Notation : $T \geq 0$.
- strictement positive si $T_{ij} > 0, \ \forall i, j$. Notation : $T > 0$.

Def. Une matrice carrée $T \geq 0$ est dite primitive si $\exists k > 0$ tq. $T^k > 0$.

Thm. (Perron-Frobenius) Soit T une matrice positive et primitive. Alors il existe une valeur propre r tq.

1. $r \in \mathbb{R}_+^*$, *i.e.* $r > 0$;
2. à r sont associés des vecteurs propres à gauche et à droite strictement positifs ;
3. $r > |\lambda|$ pour toute valeur propre $\lambda \neq r$;
4. les vecteurs propres associés à r sont uniques à une constante multiplicative près.

Algorithme HITS

Matrice $A^t A$ est symétrique et semi-définie positive

Algorithme HITS

Matrice $A^t A$ est symétrique et semi-définie positive

$\Rightarrow$ valeurs propres réelles positives $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$, et on peut choisir une base orthonormée des vecteurs propres $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n$.

Algorithme HITS

Matrice $A^t A$ est symétrique et semi-définie positive

$\Rightarrow$ valeurs propres réelles positives $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$, et on peut choisir une base orthonormée des vecteurs propres $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n$.

On suppose que $A^t A$ est aussi primitive, alors $\lambda_1 > \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$ (par thm. Perron-Frobenius) et $\mathbf{z}_1 > \mathbf{0}$.

Algorithme HITS

Matrice $A^t A$ est symétrique et semi-définie positive

$\Rightarrow$ valeurs propres réelles positives $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$, et on peut choisir une base orthonormée des vecteurs propres $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n$.

On suppose que $A^t A$ est aussi primitive, alors $\lambda_1 > \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$ (par thm. Perron-Frobenius) et $\mathbf{z}_1 > \mathbf{0}$.

Pour un $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \sum_{i=1}^{n} p_i \mathbf{z}_i \quad \text{avec} \quad p_i = < \mathbf{x}, \mathbf{z}_i > \\ A^t A \mathbf{x} &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i \mathbf{z}_i \\ (A^t A)^k \mathbf{x} &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k p_i \mathbf{z}_i \end{aligned}$$

Donc, $\frac{\mathbf{x}(k)}{\lambda_1^k} \rightarrow p_1 \mathbf{z}_1$ si $\lambda_1 > \lambda_2$.

Algorithme HITS

Nous avons :

- un vecteur strictement positif ne peut être orthogonal à $\mathbf{z}_1$ (aussi strictement positif)
- $\Rightarrow$ Convergence dans la direction de $\mathbf{z}_1$ peut importe la condition initiale $\mathbf{x}(0) > \mathbf{0}$
- $\Rightarrow$ limite ne dépend pas de $x(0)$.

Calcul distribué : protocole Gossip

Modèle :

- $G = (V, A)$ graphe fortement connexe, $|V| = n$
- $x(0) = (x_1(0), \ldots, x_n(0))^t$ valeurs initiales des nœuds (vecteur colonne)

Objectif : Calculer $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i(0)$ de manière distribuée

Calcul distribué : protocole Gossip

Algorithme :

- temps discret
- matrice stochastique P, $P_{ij} > 0$, ssi $(i,j) \in A$
- à la date $k \geq 1$:
  - un nœud i est choisi de manière uniforme
  - nœud i contacte un voisin selon $P(i,\cdot)$: notons le voisin choisi par j
  - les nœuds i et j mettent à jour leurs estimateurs de $\bar{x}$:

$$x_i(k) = x_j(k) = \frac{x_i(k-1) + x_j(k-1)}{2}$$

  et $x_l(k) = x_l(k-1),\ l \notin \{i,j\}$

Calcul distribué : protocole Gossip

Notation matricielle :

- $W_{ij} = I - \frac{(e_i - e_j)(e_i - e_j)^t}{2}$, où e_i est le vecteur colonne avec i-ème comp. 1 et 0 ailleurs
- Itération :
$$x(k) = W(k)x(k-1),$$
où $W(k) = W_{ij}$ avec probabilité $\frac{1}{n} P_{ij}$

Calcul distribué : protocole Gossip

Notation matricielle :

- $W_{ij} = I - \frac{(e_i - e_j)(e_i - e_j)^t}{2}$, où e_i est le vecteur colonne avec i-ème comp. 1 et 0 ailleurs
- Itération :
$$x(k) = W(k)x(k-1),$$
où $W(k) = W_{ij}$ avec probabilité $\frac{1}{n}P_{ij}$

Remarques :

- Matrice aléatoire $W(k)$ est doublement stochastique

Calcul distribué : protocole Gossip

Notation matricielle :

- $W_{ij} = I - \frac{(e_i - e_j)(e_i - e_j)^t}{2}$, où e_i est le vecteur colonne avec i-ème comp. 1 et 0 ailleurs
- Itération :
$$x(k) = W(k)x(k-1),$$
où $W(k) = W_{ij}$ avec probabilité $\frac{1}{n}P_{ij}$

Remarques :

- Matrice aléatoire $W(k)$ est doublement stochastique
- $x(k)^t\mathbf{1} = x(k-1)^t W(k)^t\mathbf{1} = x(k-1)^t\mathbf{1} = \cdots = x(0)^t\mathbf{1} = \bar{x}$

Calcul distribué : protocole Gossip

Notation matricielle :

- $W_{ij} = I - \frac{(e_i - e_j)(e_i - e_j)^t}{2}$, où e_i est le vecteur colonne avec i-ème comp. 1 et 0 ailleurs
- Itération :
$$x(k) = W(k)x(k-1),$$
où $W(k) = W_{ij}$ avec probabilité $\frac{1}{n}P_{ij}$

Remarques :

- Matrice aléatoire $W(k)$ est doublement stochastique
- $x(k)^t\mathbf{1} = x(k-1)^t W(k)^t \mathbf{1} = x(k-1)^t\mathbf{1} = \cdots = x(0)^t\mathbf{1} = \bar{x}$
- Sous condition que P est irréductible (*i.e.* G fortement connexe), $X(k) \to \bar{x}\mathbf{1}$

Calcul distribué : protocole Gossip

Notation matricielle :

- $W_{ij} = I - \frac{(e_i - e_j)(e_i - e_j)^t}{2}$, où e_i est le vecteur colonne avec i-ème comp. 1 et 0 ailleurs
- Itération :
$$x(k) = W(k)x(k-1),$$
où $W(k) = W_{ij}$ avec probabilité $\frac{1}{n}P_{ij}$

Remarques :

- Matrice aléatoire $W(k)$ est doublement stochastique
- $x(k)^t\mathbf{1} = x(k-1)^t W(k)^t \mathbf{1} = x(k-1)^t\mathbf{1} = \cdots = x(0)^t\mathbf{1} = \bar{x}$
- Sous condition que P est irréductible (*i.e.* G fortement connexe), $X(k) \to \bar{x}\mathbf{1}$
- A quelle vitesse ?

Calcul distribué : protocole Gossip

Déf. Pour $0 < \epsilon < 1$,

$$T_{\mathrm{m}}(\epsilon, P) = \sup_{x(0)} \inf \left\{ k \ : \ P\left(\frac{||x(k) - \bar{x}\mathbf{1}||}{||x(0)||} \geq \epsilon \right) \leq \epsilon \right\}$$

où $||v||$ est la norme l_2 de v.

Calcul distribué : protocole Gossip

Déf. Pour $0 < \epsilon < 1$,

$$T_{\mathrm{m}}(\epsilon, P) = \sup_{x(0)} \inf \left\{ k \ : \ P\left(\frac{||x(k) - \bar{x}\mathbf{1}||}{||x(0)||} \geq \epsilon \right) \leq \epsilon \right\}$$

où $||v||$ est la norme l_2 de v.

Borne supérieure : $T_{\mathrm{m}}(\epsilon, P) \leq \frac{3\log(\epsilon)}{\log(\lambda_2(W))}$, où

$$W = I - \frac{1}{2n} D + \frac{P + P^t}{2n}$$

et D est la matrice diagonale avec $D_i = \sum_{j=1}^{n} (P_{ij} + P_{ji})$.

Calcul distribué : protocole Gossip

Déf. Pour $0 < \epsilon < 1$,

$$T_{\mathrm{m}}(\epsilon, P) = \sup_{x(0)} \inf \left\{ k \ : \ P\left(\frac{||x(k) - \bar{x}\mathbf{1}||}{||x(0)||} \geq \epsilon \right) \leq \epsilon \right\}$$

où $||v||$ est la norme l_2 de v.

Borne supérieure : $T_{\mathrm{m}}(\epsilon, P) \leq \frac{3\log(\epsilon)}{\log(\lambda_2(W))}$, où

$$W = I - \frac{1}{2n} D + \frac{P + P^t}{2n}$$

et D est la matrice diagonale avec $D_i = \sum_{j=1}^{n} (P_{ij} + P_{ji})$.

Remarque : Si $P = P^t$, alors P est doublement stochastique, $D_i = 2$, $\forall i$ et

$$W = (1 - \frac{1}{n}) I + \frac{1}{n} P.$$

Théorème de Perron-Frobenius

Matrice $T = (T_{ij})$ est

- positive si $T_{ij} \geq 0, \ \forall i, j$. Notation : $T \geq 0$.
- strictement positive si $T_{ij} > 0, \ \forall i, j$. Notation : $T > 0$.

Def. Une matrice carrée $T \geq 0$ est dite primitive si $\exists k > 0$ tq. $T^k > 0$.

Thm. (Perron-Frobenius) Soit T une matrice positive et primitive. Alors il existe une valeur propre r tq.

1. $r \in \mathbb{R}_+^*$, *i.e.* $r > 0$;
2. à r sont associés des vecteurs propres à gauche et à droite strictement positifs ;
3. $r > |\lambda|$ pour toute valeur propre $\lambda \neq r$;
4. les vecteurs propres associés à r sont uniques à une constante multiplicative près.

Pour $\mathbf{x} \geq 0$ avec $\mathbf{x} \neq 0$, on définit

$$r(\mathbf{x}) = \min_j \frac{\sum_i x_i T_{ij}}{x_j},$$

avec $\frac{\sum_i x_i T_{ij}}{x_j} := \infty$ si $x_j = 0$.

Théorème de Perron-Frobenius

Démonstration

Pour $\mathbf{x} \geq 0$ avec $\mathbf{x} \neq 0$, on définit

$$r(\mathbf{x}) = \min_j \frac{\sum_i x_i T_{ij}}{x_j},$$

avec $\frac{\sum_i x_i T_{ij}}{x_j} := \infty$ si $x_j = 0$.

Lemme 1. $0 \leq r(\mathbf{x}) < \infty$

Théorème de Perron-Frobenius

Démonstration

Pour $\mathbf{x} \geq 0$ avec $\mathbf{x} \neq 0$, on définit

$$r(\mathbf{x}) = \min_j \frac{\sum_i x_i T_{ij}}{x_j},$$

avec $\frac{\sum_i x_i T_{ij}}{x_j} := \infty$ si $x_j = 0$.

Lemme 1. $0 \leq r(\mathbf{x}) < \infty$

Preuve. Consequence directe de l'hypothèse que $\mathbf{x} \geq 0$ et $\mathbf{x} \neq 0$. $\square$

Lemme 2. $r(\mathbf{x})$ est uniformément borné en $\mathbf{x}$, *i.e.* $\exists K \geq 0$ tq. $r(\mathbf{x}) \leq K, \forall x$.

Lemme 2. $r(\mathbf{x})$ est uniformément borné en $\mathbf{x}$, *i.e.* $\exists K \geq 0$ tq. $r(\mathbf{x}) \leq K, \forall x$.

Preuve.

$$\begin{aligned} r(\mathbf{x})x_j &\leq \sum_i x_i T_{ij} \ \text{pour tout } j \\ r(\mathbf{x})\mathbf{x}^t &\leq \mathbf{x}^t T \\ r(\mathbf{x})\mathbf{x}^t\mathbf{1} &\leq \mathbf{x}^t T\mathbf{1} \end{aligned}$$

Théorème de Perron-Frobenius

Démonstration

Lemme 2. $r(\mathbf{x})$ est uniformément borné en $\mathbf{x}$, *i.e.* $\exists K \geq 0$ tq. $r(\mathbf{x}) \leq K, \forall x$.

Preuve.

$$\begin{aligned} r(\mathbf{x})x_j &\leq \sum_i x_i T_{ij} \text{ pour tout } j \\ r(\mathbf{x})\mathbf{x}^t &\leq \mathbf{x}^t T \\ r(\mathbf{x})\mathbf{x}^t\mathbf{1} &\leq \mathbf{x}^t T\mathbf{1} \end{aligned}$$

Pour $K = \max_i \sum_j T_{ij}$, on a $T\mathbf{1} \leq K\mathbf{1}$ et

$$r(\mathbf{x}) \leq \frac{\mathbf{x}^t K\mathbf{1}}{\mathbf{x}^t\mathbf{1}} = K.$$

□

Théorème de Perron-Frobenius

Démonstration

Soit

$$r := \sup_{\mathbf{x} \geq 0,\ \mathbf{x} \neq 0} r(\mathbf{x}) = \sup_{\mathbf{x} \geq 0,\ \mathbf{x} \neq 0} \min_j \frac{\sum_i x_i T_{ij}}{x_j}.$$

Théorème de Perron-Frobenius

Démonstration

Soit

$$r := \sup_{\mathbf{x}\geq 0,\ \mathbf{x}\neq 0} r(\mathbf{x}) = \sup_{\mathbf{x}\geq 0,\ \mathbf{x}\neq 0} \min_j \frac{\sum_i x_i T_{ij}}{x_j}.$$

Lemme 3. $0 < r \leq K$.

Soit

$$r := \sup_{\mathbf{x}\geq 0,\ \mathbf{x}\neq 0} r(\mathbf{x}) = \sup_{\mathbf{x}\geq 0,\ \mathbf{x}\neq 0} \min_j \frac{\sum_i x_i T_{ij}}{x_j}.$$

Lemme 3. $0 < r \leq K$.

Preuve. T est primitive $\Rightarrow$ T ne contient pas de colonne nulle $\Rightarrow r(\mathbf{1}) > 0$. Donc,

$$0 < r(\mathbf{1}) \leq r \leq K.$$

□

Soit

$$r := \sup_{\mathbf{x}\geq 0,\ \mathbf{x}\neq 0} r(\mathbf{x}) = \sup_{\mathbf{x}\geq 0,\ \mathbf{x}\neq 0} \min_j \frac{\sum_i x_i T_{ij}}{x_j}.$$

Lemme 3. $0 < r \leq K$.

Preuve. T est primitive $\Rightarrow$ T ne contient pas de colonne nulle $\Rightarrow r(\mathbf{1}) > 0$. Donc,

$$0 < r(\mathbf{1}) \leq r \leq K.$$

□

On peut normaliser $\mathbf{x}$ sans affecter r, donc

$$0 < r = \sup_{\mathbf{x}\geq 0,\ \mathbf{x}^t\mathbf{x}=\mathbf{1}} r(\mathbf{x}) = \sup_{\mathbf{x}\geq 0,\ \mathbf{x}^t\mathbf{x}=\mathbf{1}} \min_j \frac{\sum_i x_i T_{ij}}{x_j} \leq K.$$

Théorème de Perron-Frobenius

Démonstration

L'ensemble $\{\mathbf{x} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{x}^t\mathbf{x} = 1\}$ est un compact de $\mathbb{R}^n$.

Théorème de Perron-Frobenius

L'ensemble $\{\mathbf{x} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{x}^t\mathbf{x} = 1\}$ est un compact de $\mathbb{R}^n$.

La fonction r est semi-continue supérieurement (*i.e.* $\limsup_{x \to x_0} r(x) \leq r(x_0)$).

Théorème de Perron-Frobenius

Démonstration

L'ensemble $\{\mathbf{x} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{x}^t\mathbf{x} = 1\}$ est un compact de $\mathbb{R}^n$.

La fonction r est semi-continue supérieurement (*i.e.* $\limsup_{x \to x_0} r(x) \leq r(x_0)$).

$\Rightarrow$ r atteint sa borne supérieure.

L'ensemble $\{\mathbf{x} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{x}^t\mathbf{x} = 1\}$ est un compact de $\mathbb{R}^n$.

La fonction r est semi-continue supérieurement (*i.e.* $\limsup_{x \to x_0} r(x) \leq r(x_0)$).

$\Rightarrow$ r atteint sa borne supérieure.

$\Rightarrow \exists\, \hat{\mathbf{x}} \geq \mathbf{0}, \neq \mathbf{0}$ tq.

$$\sum_i \hat{x}_i T_{ij} \geq r\hat{x}_j, \quad \text{pour tout } j, \tag{1}$$

et avec égalité pour au moins un j.

Théorème de Perron-Frobenius

Démonstration

Lemme 4. $\hat{\mathbf{x}}$ est un vecteur propre à gauche pour T associé à la valeur propre r.

Théorème de Perron-Frobenius

Lemme 4. $\hat{\mathbf{x}}$ est un vecteur propre à gauche pour T associé à la valeur propre r.

Preuve. Soit $\mathbf{z}^t := \hat{\mathbf{x}}^t T - r\hat{\mathbf{x}}^t \geq \mathbf{0}^t$. Supposons par absurde que $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$. Par hypothèse, T est primitive, et donc $\exists k$ tq. $T^k > 0$. Donc

$$\mathbf{z}^t T^k = \hat{\mathbf{x}}^t T T^k - r\hat{\mathbf{x}}^t T^k = \hat{\mathbf{x}}^t T^k T - r\hat{\mathbf{x}}^t T^k > \mathbf{0}^t.$$

Posons $\mathbf{y}^t = \hat{\mathbf{x}}^t T^k$. Alors

$$\sum_i y_i T_{ij} > r y_j \quad \text{pour tout } j,$$

ce qui est une contradiction avec la définition de r. Donc, $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ et $\hat{\mathbf{x}}^t T = r\hat{\mathbf{x}}^t$ $\square$

Lemme 4. $\hat{\mathbf{x}}$ est un vecteur propre à gauche pour T associé à la valeur propre r.

Preuve. Soit $\mathbf{z}^t := \hat{\mathbf{x}}^t T - r\hat{\mathbf{x}}^t \geq \mathbf{0}^t$. Supposons par absurde que $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$. Par hypothèse, T est primitive, et donc $\exists k$ tq. $T^k > 0$. Donc

$$\mathbf{z}^t T^k = \hat{\mathbf{x}}^t T T^k - r\hat{\mathbf{x}}^t T^k = \hat{\mathbf{x}}^t T^k T - r\hat{\mathbf{x}}^t T^k > \mathbf{0}^t.$$

Posons $\mathbf{y}^t = \hat{\mathbf{x}}^t T^k$. Alors

$$\sum_i y_i T_{ij} > r y_j \quad \text{pour tout } j,$$

ce qui est une contradiction avec la définition de r. Donc, $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ et $\hat{\mathbf{x}}^t T = r\hat{\mathbf{x}}^t$ □

En itérant $\hat{\mathbf{x}}^t T = r\hat{\mathbf{x}}^t$, on a $\hat{\mathbf{x}}^t T^k = r^k \hat{\mathbf{x}}^t$
En choisissant $T^k > 0$, et comme $\hat{\mathbf{x}} \geq \mathbf{0}, \neq \mathbf{0}$, on a $\hat{\mathbf{x}}^t T^k > \mathbf{0}^t$ et donc $\hat{\mathbf{x}} > \mathbf{0}$.

Théorème de Perron-Frobenius

Démonstration

$r > |\lambda|$ pour toute valeur propre $\lambda \neq r$:

Soit λ une valeur propre de T, c.à.d. pour un $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ (ayant des valeurs possiblement complexes), $\mathbf{x}^t T = \lambda \mathbf{x}^t$. En prenant le module on a pour $|\mathbf{x}| := (|x_i|)_i$,

$$\sum_i |x_i| T_{ij} \geq |\lambda| |x_j|,$$

donc $|\lambda| \leq r$ (par définition de r).

Théorème de Perron-Frobenius

Démonstration

$r > |\lambda|$ pour toute valeur propre $\lambda \neq r$:

Soit λ une valeur propre de T, c.à.d. pour un $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ (ayant des valeurs possiblement complexes), $\mathbf{x}^t T = \lambda \mathbf{x}^t$. En prenant le module on a pour $|\mathbf{x}| := (|x_i|)_i$,

$$\sum_i |x_i| T_{ij} \geq |\lambda||x_j|,$$

donc $|\lambda| \leq r$ (par définition de r).

Supposons par l'absurde que $|\lambda| = r$, on a alors $|\mathbf{x}|^t T \geq r|\mathbf{x}|^t$. Par le raisonnement similaire que pour (1), $|\mathbf{x}|^t T = r|\mathbf{x}|^t > \mathbf{0}$.
On a

$$|\sum_i x_i T_{ij}^k| = |\lambda^k||x_j| = \sum_i |x_i| T_{ij}^k$$

et $|x_j| > 0, \ \forall j$.

Théorème de Perron-Frobenius

Démonstration

$r > |\lambda|$ pour toute valeur propre $\lambda \neq r$:

Soit λ une valeur propre de T, c.à.d. pour un $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ (ayant des valeurs possiblement complexes), $\mathbf{x}^t T = \lambda \mathbf{x}^t$. En prenant le module on a pour $|\mathbf{x}| := (|x_i|)_i$,

$$\sum_i |x_i| T_{ij} \geq |\lambda||x_j|,$$

donc $|\lambda| \leq r$ (par définition de r).

Supposons par l'absurde que $|\lambda| = r$, on a alors $|\mathbf{x}|^t T \geq r|\mathbf{x}|^t$. Par le raisonnement similaire que pour (1), $|\mathbf{x}|^t T = r|\mathbf{x}|^t > \mathbf{0}$.
On a

$$|\sum_i x_i T_{ij}^k| = |\lambda^k||x_j| = \sum_i |x_i| T_{ij}^k$$

et $|x_j| > 0, \ \forall j$.
Pour deux complexes $\mathbf{z}, \mathbf{z}' \neq 0$, si $|\mathbf{z} + \mathbf{z}'| = |\mathbf{z}| + |\mathbf{z}'|$ alors $\mathbf{z}$ et $\mathbf{z}'$ sont colinéaires. Donc tous les x_j sont colinéaires et

$$\sum_i |x_i| T_{ij} = \lambda |x_j|.$$

Comme $|x_j| > 0$ pour tout j, λ est réel positif et donc $\lambda = r$.

Les vect. propres associés à r sont uniques à une constante multip. près.

Soit $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ un vecteur propre à gauche associé à r. Pour tout c, le vecteur $\eta = \hat{\mathbf{x}} - c\mathbf{y}$ (si pas nul) est un vect. propre à gauche associé à r

Les vect. propres associés à r sont uniques à une constante multip. près.

Soit $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ un vecteur propre à gauche associé à r. Pour tout c, le vecteur $\eta = \hat{\mathbf{x}} - c\mathbf{y}$ (si pas nul) est un vect. propre à gauche associé à r

$\Rightarrow$ Si $\mathbf{y}$ n'est pas un multiple de $\hat{\mathbf{x}}$, on peut choisir c tq. $\eta \neq \mathbf{0}$ mais que certaines composantes de η soient nulles.

Théorème de Perron-Frobenius

Démonstration

Les vect. propres associés à r sont uniques à une constante multip. près.

Soit $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ un vecteur propre à gauche associé à r. Pour tout c, le vecteur $\eta = \hat{\mathbf{x}} - c\mathbf{y}$ (si pas nul) est un vect. propre à gauche associé à r

$\Rightarrow$ Si $\mathbf{y}$ n'est pas un multiple de $\hat{\mathbf{x}}$, on peut choisir c tq. $\eta \neq \mathbf{0}$ mais que certaines composantes de η soient nulles.

Or par argument précédent, $|\eta|$ est un vecteur propre associé à r et $|\eta| > 0$.

En contradiction avec le fait que $\mathbf{y}$ et $\hat{\mathbf{x}}$ ne soient pas multiples.

Les vect. propres associés à r sont uniques à une constante multip. près.

Soit $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ un vecteur propre à gauche associé à r. Pour tout c, le vecteur $\eta = \hat{\mathbf{x}} - c\mathbf{y}$ (si pas nul) est un vect. propre à gauche associé à r

$\Rightarrow$ Si $\mathbf{y}$ n'est pas un multiple de $\hat{\mathbf{x}}$, on peut choisir c tq. $\eta \neq \mathbf{0}$ mais que certaines composantes de η soient nulles.

Or par argument précédent, $|\eta|$ est un vecteur propre associé à r et $|\eta| > 0$.

En contradiction avec le fait que $\mathbf{y}$ et $\hat{\mathbf{x}}$ ne soient pas multiples.

Vecteurs propres à droite

Tous les arguments peuvent être répétés pour les vecteurs propres à droite, pour une valeur propre r'. Le point 3 montre que $r' = r$, en observant que le spectre d'une matrice et sa transposé sont égaux.