Modèles et algorithmes des réseaux

Contrôle de congestion - protocole TCP; les enchères et les jeux

Ana Busic

Inria Paris - DI ENS

http://www.di.ens.fr/~busic/
ana.busic@inria.fr

Paris, Décembre 2018

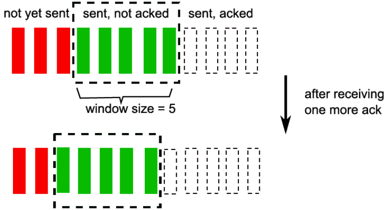
Plan

Protocole TCP

Enchères et les jeux

Protocole TCP

- Versions les plus utilisées dans Internet : Reno et NewReno ; les deux sont des variantes de TCP-Tahoe de 1988.
- L'idée principale : fenêtre dynamique W



  Acquittements des paquets reçus par la destination ; ACK contient le numéro du prochain paquet attendu.
- RTT (round trip time) : le temps nécessaire pour l'aller/retour. Hypothèse (pour simplifier l'analyse) : RTT constant.
- Dans un RTT, si pas de congestion, source reçoit approx. W ACK.

Protocole TCP

Deux manières pour detecter la congestion

- Reception de 3 ACK dupliqués dupacks successifs : la source décroit la taille de la fenêtre et retransmet les paquets en transit.
- Pas de ACK reçu pendant un délai timeout : la source suppose que tous les paquets sont perdus.

Phase slow start :

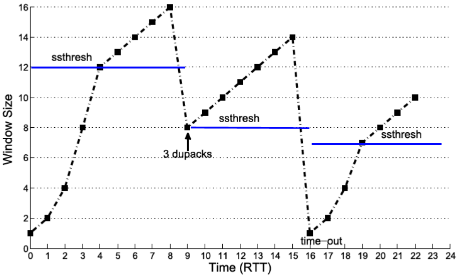
- au début de transmission, fenêtre $W = 1$
- à chaque reception d'un nouveau ACK, $W \leftarrow W + 1$
  Si pas de congestion, W double dans chaque RTT.
- Fin de cette phase : W atteint ssthresh (slow start threshold) ou detection de la congestion.

Protocole TCP

Phase congestion avoidance :

- à chaque reception d'un nouveau ACK, $W \leftarrow W + 1/W$
  Si pas de congestion, W augmente de 1 (croissance linéaire).
- Si reception de 3 dupacks :
  ssthresh $\leftarrow W/2$
  $W \leftarrow W/2$ (décroissance multiplicative)
- Si timeout : $W \leftarrow 1$. Début d'une nouvelle phase slow start.

Mécanisme AIMD (additive increase - multiplicative decrease)



Protocole TCP

Phase slow start est négligeable si des flots de très grande taille.

Analyse de la phase congestion avoidance :

- $W_i(t)$ la taille de la fenêtre à la date t de la source i ;
- T_i le RTT de la source i

  RTT et le temps de propagation et les délais - on ignore la fluctuation des délais et on suppose RTT constant.

Protocole TCP

Phase slow start est négligeable si des flots de très grande taille.

Analyse de la phase congestion avoidance :

- $W_i(t)$ la taille de la fenêtre à la date t de la source i ;
- T_i le RTT de la source i

  RTT et le temps de propagation et les délais - on ignore la fluctuation des délais et on suppose RTT constant.
- q_i prix de la route i

  TCP utilise la probabilité de la perte d'un paquet pour le prix.

Protocole TCP

Phase slow start est négligeable si des flots de très grande taille.

Analyse de la phase congestion avoidance :

- $W_i(t)$ la taille de la fenêtre à la date t de la source i ;
- T_i le RTT de la source i

  RTT et le temps de propagation et les délais - on ignore la fluctuation des délais et on suppose RTT constant.
- q_i prix de la route i

  TCP utilise la probabilité de la perte d'un paquet pour le prix.

$$\dot{W}_i = \frac{x_i(t - T_i)(1 - q_i(t))}{W_i(t)} - \beta x_i(t - T_i) q_i(t) W_i(t).$$

Protocole TCP

Phase slow start est négligeable si des flots de très grande taille.

Analyse de la phase congestion avoidance :

- $W_i(t)$ la taille de la fenêtre à la date t de la source i ;
- T_i le RTT de la source i

  RTT et le temps de propagation et les délais - on ignore la fluctuation des délais et on suppose RTT constant.
- q_i prix de la route i

  TCP utilise la probabilité de la perte d'un paquet pour le prix.

$$\dot{W}_i = \frac{x_i(t - T_i)(1 - q_i(t))}{W_i(t)} - \beta x_i(t - T_i) q_i(t) W_i(t).$$

Remarque : $\beta = 2$ semble un choix naturel ; mais pour l'approximation temps continue $2/3$ est plus proche.

Protocole TCP

En utilisant $W_i(t) = x_i(t)T_i$,

$$\dot{x}_i = \frac{x_i(t - T_i)(1 - q_i(t))}{T_i^2 x_i(t)} - \beta x_i(t - T_i)q_i(t)x_i(t).$$

Protocole TCP

En utilisant $W_i(t) = x_i(t)T_i$,

$$\dot{x}_i = \frac{x_i(t - T_i)(1 - q_i(t))}{T_i^2 x_i(t)} - \beta x_i(t - T_i) q_i(t) x_i(t).$$

L'équilibre (en posant $\dot{x}_i = 0$) :

$$\hat{x}_i = \sqrt{\frac{1 - \hat{q}_i}{\beta \hat{q}_i}} \frac{1}{T_i}.$$

avec $\hat{q}_i$ la probabilité de perte d'un paquet i à l'équilibre.

Protocole TCP

En utilisant $W_i(t) = x_i(t)T_i$,

$$\dot{x}_i = \frac{x_i(t - T_i)(1 - q_i(t))}{T_i^2 x_i(t)} - \beta x_i(t - T_i) q_i(t) x_i(t).$$

L'équilibre (en posant $\dot{x}_i = 0$) :

$$\hat{x}_i = \sqrt{\frac{1 - \hat{q}_i}{\beta \hat{q}_i}} \frac{1}{T_i}.$$

avec $\hat{q}_i$ la probabilité de perte d'un paquet i à l'équilibre.

Pour $\hat{q}_i$ (ce qu'on cherche pour l'Internet)

$$\hat{x}_i \propto \frac{1}{T_i \sqrt{\hat{q}_i}}.$$

Protocole TCP

Dynamique TCP :

$$\dot{x}_i = \frac{x_i(t - T_i)(1 - q_i(t))}{T_i^2 x_i(t)} - \beta x_i(t - T_i) q_i(t) x_i(t).$$

Hypothèses :

- le délais de feedback est négligeable, i.e. $x_i(t - T_i) \approx x_i(t)$
- la probabilité de perte $q_i(t)$ est très petite

Alors on peut l'approximer la dynamique par

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \frac{1}{T_i^2} - \beta x_i^2 q_i(t) \\ &= \beta x_i^2 \left(\frac{1}{\beta T_i^2 x_i^2} - q_i \right). \end{aligned}$$

Protocole TCP

Dynamique $\dot{x}_i = \beta x_i^2 \left(\frac{1}{\beta T_i^2 x_i^2} - q_i \right).$

Protocole TCP

Dynamique $\dot{x}_i = \beta x_i^2 \left(\frac{1}{\beta T_i^2 x_i^2} - q_i \right)$.

Liens avec l'algorithme distribué (montée de gradient) :

$$\dot{x}_i = k_i(x_i) \left(U_i'(x_i) - q_i \right). \forall i.$$

On a

$$U_i'(x_i) = \frac{1}{\beta T_i^2 x_i^2}.$$

Protocole TCP

Dynamique $\dot{x}_i = \beta x_i^2 \left(\frac{1}{\beta T_i^2 x_i^2} - q_i \right)$.

Liens avec l'algorithme distribué (montée de gradient) :

$$\dot{x}_i = k_i(x_i) \left(U_i'(x_i) - q_i \right). \forall i.$$

On a

$$U_i'(x_i) = \frac{1}{\beta T_i^2 x_i^2}.$$

Donc TCP maximise $\sum_i U_i$ avec

$$U_i(x_i) = -\frac{1}{\beta T_i^2 x_i}$$

Equité de délai potentiel pondéré.

Equité de délai potentiel

Fonction d'utilité

$$U_i(x_i) = -\frac{1}{x_i}$$

croissante et strictement concave.

Maximiser $\sum_i U_i(x_i)$ revient à minimiser

$$\sum_i \frac{1}{x_i}.$$

Equité de délai potentiel

Fonction d'utilité

$$U_i(x_i) = -\frac{1}{x_i}$$

croissante et strictement concave.

Maximiser $\sum_i U_i(x_i)$ revient à minimiser

$$\sum_i \frac{1}{x_i}.$$

Interpretation en termes de délai :

Equité de délai potentiel

Fonction d'utilité

$$U_i(x_i) = -\frac{1}{x_i}$$

croissante et strictement concave.

Maximiser $\sum_i U_i(x_i)$ revient à minimiser

$$\sum_i \frac{1}{x_i}.$$

Interpretation en termes de délai :

Suppose l'utilisateur i doit transférer un fichier de taille 1. Alors le temps nécessaire pour faire le transfert est la taille du fichier divisé par le débit, i.e. $\frac{1}{x_i}$.

Protocole TCP

Dynamique TCP :

$$\dot{x}_i = \frac{x_i(t - T_i)(1 - q_i(t))}{T_i^2 x_i(t)} - \beta x_i(t - T_i) q_i(t) x_i(t).$$

Hypothèses :

- le délais de feedback est négligeable, i.e. $x_i(t - T_i) \approx x_i(t)$
- la probabilité de perte $q_i(t)$ n'est pas très petite

Alors on peut l'approximer la dynamique par

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \frac{1 - q_i}{T_i^2} - \beta x_i^2 q_i \\ &= (\beta x_i^2 + 1/T_i^2) \left(\frac{1}{\beta x_i^2 + \frac{1}{T_i^2}} \frac{1}{T_i^2} - q_i \right). \end{aligned}$$

On a $U_i'(x_i) = \frac{1}{\beta x_i^2 + \frac{1}{T_i^2}} \frac{1}{T_i^2}$ et $U_i(x_i) = \frac{1}{T_i \sqrt{\beta}} \tan^{-1}(\sqrt{\beta} T_i x_i)$.

Mécanisme des prix

Allocation utilitaire - l'outil pour analyser des architectures et des protocoles de réseaux

Mécanisme des prix

Allocation utilitaire - l'outil pour analyser des architectures et des protocoles de réseaux

Hypothèse : tous les utilisateurs acceptent le protocole et agissent en équipe pour maximiser l'utilité du réseau

Mécanisme des prix

Allocation utilitaire - l'outil pour analyser des architectures et des protocoles de réseaux

Hypothèse : tous les utilisateurs acceptent le protocole et agissent en équipe pour maximiser l'utilité du réseau

Problème : et si une fraction des utilisateurs ne joue pas le jeu ?

Mécanisme des prix

Allocation utilitaire - l'outil pour analyser des architectures et des protocoles de réseaux

Hypothèse : tous les utilisateurs acceptent le protocole et agissent en équipe pour maximiser l'utilité du réseau

Problème : et si une fraction des utilisateurs ne joue pas le jeu ?

Objectif : Un mécanisme des prix qui incite des utilisateurs à reveler leur utilité. Peut-on apprendre et maximiser à la fois les vrais utilités des utilisateurs ?

Allocation dynamique de ressources

Problème de maximisation de l'utilité du réseau.

Pour tout i, U_i une fonction d'utilité croissante et strictement concave sur $\mathbb{R}$.

Allocation utilitaire : l'allocation admissible qui maximise

$$\sum_{i=1}^{N} U_i(x_i)$$

sous les contraintes de capacité $\sum_{i\,:\,\ell \in r_i} x_i \leq C_\ell$ et $x_i \geq 0, \forall i$.

Propriété : Unique solution.

Mécanisme VCG (Vickrey-Clarke-Groves)

- Chaque utilisateur doit annoncer son utilité.
- Utilisateur i annonce $\tilde{U}_i$, peut être différente de U_i.

  Question : Comment éviter que les utilisateurs mentent pour augmenter leur débit autorisé ?
- Le réseaux résout

$$\max_{x \geq 0} \sum_{i=1}^{N} \tilde{U}_i(x_i)$$

  sous les contraintes de capacité $\sum_{i\,:\,\ell \in r_i} x_i \leq C_\ell$ et $x_i \geq 0, \forall i$.
- L'allocation optimale $\tilde{x}$ determine les débits des flots.
- Les utilisateurs payent le prix q_i calculé par le principe de dommage causé aux autres, i.e. la réduction de la valeur sociale (la somme des utilités des autres utilisateurs) par la présence de l'utilisateur i.
- Le mécanisme est connu par les utilisateurs.

Mécanisme VCG (Vickrey-Clarke-Groves)

Pour déterminer q_i :

- Trouver $\bar{x}$, la solution du problème sans i

$$\max_{x \geq 0} \sum_{j \neq i}^{N} \tilde{U}_j(x_j)$$

sous les contraintes de capacité $\sum_{j \neq i \,:\, \ell \in r_j} x_j \leq C_\ell$ et $x_j \geq 0, \forall j$.

- Le prix q_i est défini par :

$$q_i = \sum_{j \neq i}^{N} \tilde{U}_j(\bar{x}_j) - \sum_{j \neq i}^{N} \tilde{U}_j(\tilde{x}_j).$$

Mécanisme VCG (Vickrey-Clarke-Groves)

L'utilisateur i cherche à maximiser son revenu, i.e.

$$U_i(\tilde{x}_i) - q_i.$$

Propriété : Dire la vérité maximise le revenu de l'utilisateur.

Preuve. On suppose que l'utilisateur dit la vérité. Son revenu est alors

$$R_i^v = U_i(\tilde{x}_i^v) - \left(\sum_{j \neq i}^{N} \tilde{U}_j(\bar{x}_j^v) - \sum_{j \neq i}^{N} \tilde{U}_j(\tilde{x}_j^v) \right) .$$

On suppose maintenant que l'utilisateur mente et cela résulte par une allocation $\tilde{x}^m$. Alors le revenu de i est

$$R_i^m = U_i(\tilde{x}_i^m) - \left(\sum_{j \neq i}^{N} \tilde{U}_j(\bar{x}_j^m) - \sum_{j \neq i}^{N} \tilde{U}_j(\tilde{x}_j^m) \right) .$$

On a $\bar{x}^v = \bar{x}^m$ car c'est la solution du problème sans i.

Mécanisme VCG (Vickrey-Clarke-Groves)

Supposons que la vérité n'est pas optimale, i.e. $R_i^m > R_i^v$. On obtient

$$U_i(\tilde{x}_i^m) + \sum_{j \neq i}^{N} \tilde{U}_j(\tilde{x}_j^m) > U_i(\tilde{x}_i^v) + \sum_{j \neq i}^{N} \tilde{U}_j(\tilde{x}_j^v).$$

Cela est en contradiction avec le fait que $\tilde{x}^v$ est la solution optimale pour le problème :

$$\max_{x \geq 0} U_i(x_i) + \sum_{j \neq i}^{N} \tilde{U}_j(x_j),$$

sous les contraintes de capacité $\sum_{j \neq i \,:\, \ell \in r_j} x_j \leq C_\ell$ et $x_j \geq 0, \forall j$. $\square$

Mécanisme VCG (Vickrey-Clarke-Groves)

Supposons que la vérité n'est pas optimale, i.e. $R_i^m > R_i^v$. On obtient

$$U_i(\tilde{x}_i^m) + \sum_{j \neq i}^{N} \tilde{U}_j(\tilde{x}_j^m) > U_i(\tilde{x}_i^v) + \sum_{j \neq i}^{N} \tilde{U}_j(\tilde{x}_j^v).$$

Cela est en contradiction avec le fait que $\tilde{x}^v$ est la solution optimale pour le problème :

$$\max_{x \geq 0} U_i(x_i) + \sum_{j \neq i}^{N} \tilde{U}_j(x_j),$$

sous les contraintes de capacité $\sum_{j \neq i \,:\, \ell \in r_j} x_j \leq C_\ell$ et $x_j \geq 0, \forall j$. $\square$

Remarques :

- Dire la vérité est optimal indépendamment des strategies des autres utilisateurs - une stratégie dominante.
- $R_i^v - R_i^m$ ne dépend pas de $\bar{x}$.

Enchères de 2ème prix (Vickrey)

Enchère avec un bien et n joueurs.

- w_i est la vrai valeur du bien pour l'utilisateur i ;
- $\tilde{w}_i$ la valeur annoncée par i ;
- Le joueur avec la valeur annoncée la plus élevée emporte le bien, notons ce joueur i^*.
- i^* paye $\max_{i \neq i^*} \tilde{w}_i$.

Propriété : un cas particulier de mécanisme VCG.

Enchères de 2ème prix (Vickrey)

Preuve.

- Utilité de i : $w_i x_i$ avec $x_i \in \{0,1\}$, $x_i = 1$ ssi i gagne.
- VCG résout

$$\max_x \sum_{i=1}^n \tilde{w}_i x_i$$
$$\text{s.t} \ \sum_{i=1}^n x_i \leq 1 \quad \text{et} \quad x_i \in \{0,1\}, \forall i.$$

  On a bien $\max_i \tilde{w}_i = \tilde{w}_{i^*}$, donc l'allocation VCG optimale vérifie $x^*_{i^*} = 1$ et $x_i = 0$, $i \neq i^*$.
- L'utilisateur i^* paie

$$\left(\max \sum_{i \neq i^*} \tilde{w}_i x_i \right) - \sum_{i \neq i^*} \tilde{w}_i x_i^* = \max_{i \neq i^*} \tilde{w}_i .$$

$\square$

Remarques

- Mécanisme VCG n'est pas utilisé dans Internet (complexité trop élevée).
- Chaque utilisateur doit communiquer sa fonction d'utilité - surchargée importante de communication.
- Le gestionnaire du réseau doit résoudre plusieurs problèmes de maximisation : pour calculer l'allocation utilitaire et pour calculer les prix. Très onéreux à résoudre de manière centralisée.
- Sous hypothèse que les utilisateurs sont price taking, les objectifs des utilisateurs correspondent au problème global, i.e. $\max_i U_i(x_i)$.

Hypothèse "price taking"

On suppose que le réseau determine les prix q per débit unitaire. Chaque utilisateur maximise

$$\max_{x_i} U_i(x_i) - x_i q.$$

Sous hypothèse $\lim_{x_i \to \infty} U_i'(x_i) = \infty$, la valeur optimale est strictement positive et donnée par $x_i = {U'}_i^{-1}(q)$.

Mise à jour des prix :

$$\dot{q} = (\sum_i x_i - c)_q^+,$$

i.e. $\sum_i x_i - c$ si $q > 0$ et $(\sum_i x_i - c)^+$ si $q = 0$.

Alors on peut montrer la convergence vers le point optimal.

Enchères et liens sponsorisés

- À sa création, les fondateurs de Google n'avaient pas prévu de modèle économique.
  Quand ils ont publié leur algorithme PageRank, à la fin des années 90, ils ont tout d'abord cherché à le vendre à Yahoo !
- Au même moment, GoTo.com, Inc, propose un moteur de recherche basé sur des enchères : les sites enchérissent pour leur place dans le résultat d'une requête.

  Problème : les sites qui paient le plus ne sont pas forcément les sites les plus pertinents.
- Google reprend le principe en 2001, en le restreignant à un petit nombre de publicités affichées avec les résultats de la requête.

Caractéristiques des enchères pour les liens sponsorisés

- Un emplacement peut être sans cesse remis aux enchères.
- Les offres pour un mot-clé sont faites en ligne et peuvent changer à tout moment.
- L'entreprise qui fait sa publicité veut payer uniquement pour les clients que la publicité lui rapporte (modèle utilisé par Amazon).
- Le moteur de recherche, veut facturer chaque lien affiché, c'est-à-dire à chaque fois qu'un client potentiel a vu la publicité (modèle de la presse écrite).
- Modèle pay-per-click utilisé par les moteurs de recherche est un compromis entre ces deux objectifs : le publicitaire paie le moteur de recherche à chaque fois que l'utilisateur clique sur le lien sponsorisé.

Modèle pay-per-click

- CRT (clickthrough rate) : le rapport entre le nombre de clics sur une publicité et son nombre d'affichages
- Hypothèse : CTR est uniquement fonction de l'emplacement, et donc que sa valeur peut être connue avant l'attribution d'un emplacement à un publicitaire.

Modèle pay-per-click

- CRT (clickthrough rate) : le rapport entre le nombre de clics sur une publicité et son nombre d'affichages
- Hypothèse : CTR est uniquement fonction de l'emplacement, et donc que sa valeur peut être connue avant l'attribution d'un emplacement à un publicitaire.
- Simplification : en réalité CTR dépend aussi de la pub en elle même (notamment de son rapport avec la requête).

Generalized First Price Auction

Les publicitaires enchérissent pour un mot-clé, le gagnant étant celui qui fait la plus grande offre. Il paie le montant de la dernière enchère qu'il a fait pour l'emplacement.

Exemple : Deux emplacement avec des CTR de respectivement 200 clics/h et 100 clics/h, et trois publicitaires Ad1, Ad2 et Ad3 avec respectivement un budget de 10$, 4$ et 2$.

Pour être sûr d'avoir un emplacement, il suffit à Ad2 de mettre Ad3 hors course.

- première enchère : Ad2$\rightarrow$ 2,01$
- deuxième enchère : Ad1$\rightarrow$ 2,02$
- troisième enchère : Ad2$\rightarrow$ 2,03$
- ...
- i-ème enchère : Ad1$\rightarrow$ 4,01$, Ad2$\rightarrow$ 2,01$
  On arrive alors à une situation d'instabilité, sans équilibre possible avec des stratégies pures.

Cas d'un seul bien

L'enchère anglaise : l'enchère commence à un prix plancher et elle augmente d'un incrément à chaque enchère. Au fur et à mesure que le prix augmente, des enchérisseurs sortent de l'enchère. Quand il ne reste plus qu'un enchérisseur, il remporte l'objet au prix atteint.

Vickrey Auction : Tous les agents donnent une enveloppe contenant leur offre. La meilleure offre remporte l'objet au prix de la deuxième meilleure offre.

Cas d'un seul bien

L'enchère anglaise : l'enchère commence à un prix plancher et elle augmente d'un incrément à chaque enchère. Au fur et à mesure que le prix augmente, des enchérisseurs sortent de l'enchère. Quand il ne reste plus qu'un enchérisseur, il remporte l'objet au prix atteint.

Vickrey Auction : Tous les agents donnent une enveloppe contenant leur offre. La meilleure offre remporte l'objet au prix de la deuxième meilleure offre.

Proposition. Dans une VA, pour tout joueur i et tout ensemble d'enchères $\{b_j\}_{j \neq i}$ des autres joueurs, le joueur i maximise son utilité en enchérissant $b_i = v_i$.

On dit que VA est "strategyproof", ou "truthfull". Dans ce modèle d'enchères, enchérir de manière honnête est toujours la meilleure stratégie.

Le résultat d'une enchère anglaise est le même que celle d'une VA.

Generalized Second Price Auction

Modèle développé par Google en 2002

Vient de l'observation suivante : le publicitaire en position i ne voudra jamais payer plus que le montant de loffre de son concurrent en position $i + 1$.

Le gagnant paie donc le montant de la deuxième plus grande offre.

Dans l'exemple précedént, si tous le monde est honnête :

- Ad1 paie 4$ pour l'emplacement 1
- Ad2 paie 2$ pour l'emplacement 2.

Un modèle pour les enchères de liens sponsorisés

- Agents : $\mathcal{A} = \{1, ..., A\}$; emplacements : $\mathcal{S} = \{1, ..., S\}$
  Hypothèse : $A \geq S$.
- Pour chaque emplacement $s \in \mathcal{S}$, x_s est son CTR
  Hypothèse : $x_1 > x_2 > ... > x_S$.
- L'utilité de l'agent $a \in \mathcal{A}$ pour l'emplacement $s \in \mathcal{S}$ est $u_{as} = v_a x_s$, où v_a est la valeur de l'agent a par rapport au mot-clé considéré.
- Un modèle simple, composé d'un seul paramètre pour les agents (v_a) et un seul paramètre pour comparer les emplacements (x_s).

Enchères GSP

- Chaque agent $a \in \mathcal{A}$ propose une unique offre b_a, les enchères étant faites selon le modèle GSP.
- On classe les agents selon leur offre : on note v_s la valeur de l'agent obtenant la position s. On a donc $b_1 > b_2 > \cdots > b_A$.

  (sans perte de généralité, quitte à réordonner les agents)
- Le prix payé par l'agent en position s est le montant de l'offre de l'agent en position $s+1$:

$$p_s = b_{s+1}.$$

- Le gain de l'agent s :

$$(v_s - p_s)x_s = (v_s - b_{s+1})x_s,$$

  où on prend $x_s = 0$ pour $s > S$.

position	valeur	enchère	prix	CTR
1	v_1	b_1	$p_1 = b_2$	x_1
2	v_2	b_2	$p_2 = b_3$	x_2
3	v_3	b_3	$p_3 = b_4$	x_3
4	v_4	b_4	$p_4 = b_5$	x_4
5	v_5	b_5	0	0

Équilibre de Nash pour GSP

Un équilibre de Nash est un profil d'actions des joueurs tel qu'aucun joueur n'ait intérêt à dévier unilatéralement de sa stratégie.

On modélise l'enchère par un jeu simultané avec information complète (chaque agent choisit simultanément une offre b_a).

À l'équilibre, chaque agent préfère sa position actuelle à tout autre.

Définition. Un équilibre de Nash (EN) satisfait pour tout $s \in \{1, \ldots, A\}$:

$$\begin{aligned}(v_s - p_s)x_s &\geq (v_s - p_t)x_t, t > s \\ (v_s - p_s)x_s &\geq (v_s - p_{t-1})x_t, t < s\end{aligned}$$

avec $p_t = b_{t+1}$.

position	valeur	enchère	prix	CTR
1	v_1	b_1	$p_1 = b_2$	x_1
2	v_2	b_2	$p_2 = b_3$	x_2
3	v_3	b_3	$p_3 = b_4$	x_3
4	v_4	b_4	$p_4 = b_5$	x_4
5	v_5	b_5	0	0

Équilibre de Nash pour GSP

Pour l'analyse, nous allons nous restreindre à la classe suivante d'EN :
Définition. Un équilibre de Nash symétrique (ENS) satisfait :

$$(v_s - p_s)x_s \geq (v_s - p_t)x_t, \ \forall s, t$$

Équilibre de Nash pour GSP

Pour l'analyse, nous allons nous restreindre à la classe suivante d'EN :
Définition. Un équilibre de Nash symétrique (ENS) satisfait :

$$(v_s - p_s)x_s \geq (v_s - p_t)x_t, \ \forall s, t$$

Proposition. ENS $\subset$ NS, i.e. si un ensemble d'enchères est un équilibre de Nash symétrique, alors c'est un équilibre de Nash.

Équilibre de Nash pour GSP

Pour l'analyse, nous allons nous restreindre à la classe suivante d'EN :
Définition. Un équilibre de Nash symétrique (ENS) satisfait :

$$(v_s - p_s)x_s \geq (v_s - p_t)x_t, \ \forall s, t$$

Proposition. ENS $\subset$ NS, i.e. si un ensemble d'enchères est un équilibre de Nash symétrique, alors c'est un équilibre de Nash.

Démonstration. Comme $p_{t-1} \geq p_t$, on a

$$(v_s - p_s)x_s \geq (v_s - p_t)x_t \geq (v_s - p_{t-1})x_t.$$

Équilibre de Nash pour GSP

Pour l'analyse, nous allons nous restreindre à la classe suivante d'EN :
Définition. Un équilibre de Nash symétrique (ENS) satisfait :

$$(v_s - p_s)x_s \geq (v_s - p_t)x_t, \ \forall s, t$$

Proposition. ENS $\subset$ NS, i.e. si un ensemble d'enchères est un équilibre de Nash symétrique, alors c'est un équilibre de Nash.

Démonstration. Comme $p_{t-1} \geq p_t$, on a

$$(v_s - p_s)x_s \geq (v_s - p_t)x_t \geq (v_s - p_{t-1})x_t.$$

Proposition. Dans un ENS, $v_s \geq p_s, \forall s$.

Équilibre de Nash pour GSP

Pour l'analyse, nous allons nous restreindre à la classe suivante d'EN :
Définition. Un équilibre de Nash symétrique (ENS) satisfait :

$$(v_s - p_s)x_s \geq (v_s - p_t)x_t, \ \forall s, t$$

Proposition. ENS $\subset$ NS, i.e. si un ensemble d'enchères est un équilibre de Nash symétrique, alors c'est un équilibre de Nash.

Démonstration. Comme $p_{t-1} \geq p_t$, on a

$$(v_s - p_s)x_s \geq (v_s - p_t)x_t \geq (v_s - p_{t-1})x_t.$$

Proposition. Dans un ENS, $v_s \geq p_s, \forall s$.

Démonstration. $(v_s - p_s)x_s \geq (v_s - p_{S+1})x_{S+1} = 0$.

Équilibre de Nash pour GSP

Proposition. Dans un ENS, $v_{s-1} \geq v_s, \forall s$, (i.e. l'ENS est une allocation efficace).

Équilibre de Nash pour GSP

Proposition. Dans un ENS, $v_{s-1} \geq v_s, \forall s$, (i.e. l'ENS est une allocation efficace).

Proposition. Dans un ENS, $p_{s-1}x_{s-1} > p_s x_s$ et $p_{s-1} \geq p_s$, pour tout s. De plus si $v_s > p_s$, alors $p_{s-1} > p_s$.

Équilibre de Nash pour GSP

Proposition. Dans un ENS, $v_{s-1} \geq v_s, \forall s$, (i.e. l'ENS est une allocation efficace).

Proposition. Dans un ENS, $p_{s-1}x_{s-1} > p_s x_s$ et $p_{s-1} \geq p_s$, pour tout s. De plus si $v_s > p_s$, alors $p_{s-1} > p_s$.

Proposition. Si un ensemble d'offres satisfait les inégalités de l'ENS pour $t = s + 1$ et $t = s - 1$, alors il les satisfait toutes.

Une caractérisation des offres d'équilibre d'un ENS

Un agent en position s ne veut pas descendre

$$(v_s - p_s)x_s \geq (v_s - p_{s+1})x_{s+1},$$

et un agent en position $s+1$ ne veut pas monter

$$(v_{s+1} - p_{s+1})x_{s+1} \geq (v_{s+1} - p_s)x_s.$$

On a donc :

$$v_s(x_s - x_{s+1}) + p_{s+1}x_{s+1} \geq p_s x_s \geq v_{s+1}(x_s - x_{s+1}) + p_{s+1}x_{s+1}$$

Les cas limites :
$p_s^U x_s = v_s(x_s - x_{s+1}) + p_{s+1}x_{s+1}$ et
$p_s^L x_s = v_{s+1}(x_s - x_{s+1}) + p_{s+1}x_{s+1}$

Les solutions (car $x_s = 0, s > S$) :
$p_s^U x_s = \sum_{t \geq s} v_t(x_t - x_{t+1}) + p_{t+1}x_{t+1}$ et
$p_s^L x_s = \sum_{t \geq s} v_{t+1}(x_t - x_{t+1}) + p_{t+1}x_{t+1}$

Revenus générés par l'enchère

Le revenu d'une enchère est la somme des prix payés par les enchérisseurs.

Prop. Le revenu maximum sur tous les équilibres de Nash possible est le même que le revenu obtenu par l'équilibre de Nash symétrique avec enchères b_s^U.

Revenus générés par l'enchère

Le revenu d'une enchère est la somme des prix payés par les enchérisseurs.

Prop. Le revenu maximum sur tous les équilibres de Nash possible est le même que le revenu obtenu par l'équilibre de Nash symétrique avec enchères b_s^U.

Prop. Le revenu VCG honnête est le même que le revenu obtenu par l'équilibre de Nash symétrique avec enchères b_s^L.