Modèles et algorithmes des réseaux

Contrôle de congestion - allocation dynamique de ressources

Ana Busic

Inria Paris - DI ENS

`http://www.di.ens.fr/~busic/`
`ana.busic@inria.fr`

Paris, Décembre 2018

Plan

Stabilité d'un système dynamique

Allocation dynamique de ressources

Stabilité d'un système dynamique

Système dynamique : $\dot{x} = f(x), \quad f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

- $\dot{x}$ dérivée de x par rapport au temps t
- $x(0)$ donné
- f continue
- Hypothèse : unique solution $x(t),\ t \geq 0$.

Stabilité d'un système dynamique

Système dynamique : $\dot{x} = f(x), \quad f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

- $\dot{x}$ dérivée de x par rapport au temps t
- $x(0)$ donné
- f continue
- Hypothèse : unique solution $x(t), \ t \geq 0$.

Point d'équilibre : $x_e \in \mathbb{R}^n$ t.q. $f(x_e) = 0$.

Hypothèse : $x_e = 0$ unique point d'équilibre.

Point d'équilibre globalement asymptotiquement stable : $x_e = 0$ est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable si

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$$

pour tout $x(0) \in \mathbb{R}^n$.

Critère de Lyapunov

Thm. Soit $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable t.q.

$$V(x) \to \infty \text{ quand } ||x|| \to \infty.$$

Soit $\dot{V}(x)$ la dérivée de V par rapport à t, i.e.

$$\dot{V}(x) = \nabla V(x)\dot{x} = \nabla V(x) f(x).$$

Si $\dot{V}(x) \leq 0$ pour tout x, alors $\exists B > 0$ t.q.

$$||x(t)|| \leq B, \ \forall t.$$

Critère de Lyapunov

Thm. Soit $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable t.q.

$$V(x) \to \infty \text{ quand } ||x|| \to \infty.$$

Soit $\dot{V}(x)$ la dérivée de V par rapport à t, i.e.

$$\dot{V}(x) = \nabla V(x)\dot{x} = \nabla V(x) f(x).$$

Si $\dot{V}(x) \leq 0$ pour tout x, alors $\exists B > 0$ t.q.

$$||x(t)|| \leq B, \ \forall t.$$

Preuve. Pour $T \geq 0$,

$$V(x(T)) = V(x(0)) + \int_0^T \dot{V}(x(t))dt \leq V(x(0)).$$

Critère de Lyapunov

Thm. Soit $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable t.q.

$$V(x) \to \infty \text{ quand } ||x|| \to \infty.$$

Soit $\dot{V}(x)$ la dérivée de V par rapport à t, i.e.

$$\dot{V}(x) = \nabla V(x)\dot{x} = \nabla V(x) f(x).$$

Si $\dot{V}(x) \leq 0$ pour tout x, alors $\exists B > 0$ t.q.

$$||x(t)|| \leq B, \ \forall t.$$

Preuve. Pour $T \geq 0$,

$$V(x(T)) = V(x(0)) + \int_0^T \dot{V}(x(t))dt \leq V(x(0)).$$

Condition $V(x) \to \infty$ quand $||x|| \to \infty$, implique que $\{x \ : \ V(x) \leq c\}$ est un ensemble borné pour tout c. On prend $c = V(x(0))$.

Critère de Lyapunov

Thm (Stabilité asymptotique globale). Si en plus la fonction V est continuellement différentiable et vérifie

1. $V(x) \geq 0, \ \forall x$ et $V(x) = 0$ iff $x = 0$;
2. $\dot{V}(x) < 0$ pour tout $x \neq 0$ et $\dot{V}(0) = 0$;

alors $x_e = 0$ est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable.

Critère de Lyapunov

Thm (Stabilité asymptotique globale). Si en plus la fonction V est continuellement différentiable et vérifie

1. $V(x) \geq 0$, $\forall x$ et $V(x) = 0$ iff $x = 0$;
2. $\dot{V}(x) < 0$ pour tout $x \neq 0$ et $\dot{V}(0) = 0$;

alors $x_e = 0$ est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable.

Preuve. Par absurde. On suppose que $x(t)$ ne converge pas vers le point d'équilibre 0 quand $t \to \infty$.

Critère de Lyapunov

Thm (Stabilité asymptotique globale). Si en plus la fonction V est continuellement différentiable et vérifie

1. $V(x) \geq 0$, $\forall x$ et $V(x) = 0$ iff $x = 0$;
2. $\dot{V}(x) < 0$ pour tout $x \neq 0$ et $\dot{V}(0) = 0$;

alors $x_e = 0$ est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable.

Preuve. Par absurde. On suppose que $x(t)$ ne converge pas vers le point d'équilibre 0 quand $t \to \infty$.

- $V(x(t))$ est décroissante, car $\dot{V}(x) \leq 0$, $\forall x$.

Critère de Lyapunov

Thm (Stabilité asymptotique globale). Si en plus la fonction V est continuellement différentiable et vérifie

1. $V(x) \geq 0, \ \forall x$ et $V(x) = 0$ iff $x = 0$;
2. $\dot{V}(x) < 0$ pour tout $x \neq 0$ et $\dot{V}(0) = 0$;

alors $x_e = 0$ est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable.

Preuve. Par absurde. On suppose que $x(t)$ ne converge pas vers le point d'équilibre 0 quand $t \to \infty$.

- $V(x(t))$ est décroissante, car $\dot{V}(x) \leq 0, \ \forall x$.
- Décroissante + bornée inférieurement implique la convergence quand $t \to \infty$. Supposons que cette limite est $\epsilon > 0$.

Critère de Lyapunov

Thm (Stabilité asymptotique globale). Si en plus la fonction V est continuellement différentiable et vérifie

1. $V(x) \geq 0, \ \forall x$ et $V(x) = 0$ iff $x = 0$;
2. $\dot{V}(x) < 0$ pour tout $x \neq 0$ et $\dot{V}(0) = 0$;

alors $x_e = 0$ est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable.

Preuve. Par absurde. On suppose que $x(t)$ ne converge pas vers le point d'équilibre 0 quand $t \to \infty$.

- $V(x(t))$ est décroissante, car $\dot{V}(x) \leq 0, \ \forall x$.
- Décroissante + bornée inférieurement implique la convergence quand $t \to \infty$. Supposons que cette limite est $\epsilon > 0$.
- On pose
$$C = \{x \ : \ \epsilon \leq V(x) \leq V(x(0))\}.$$
C est borné car $V(x) \to \infty \text{ quand } ||x|| \to \infty$ C est fermé car V est une fonction continue. Donc C est compact.

Critère de Lyapunov

Soit $-a = \sup_{x \in C} \dot{V}(x)$ (fini car $\dot{V}$ est continue et C compact).
Alors

$$\begin{aligned} V(x(t)) &= V(x(0)) + \int_0^t \dot{V}(x(s))ds \\ &\leq V(x(0)) - at, \end{aligned}$$

Critère de Lyapunov

Soit $-a = \sup_{x \in C} \dot{V}(x)$ (fini car $\dot{V}$ est continue et C compact).
Alors

$$\begin{aligned} V(x(t)) &= V(x(0)) + \int_0^t \dot{V}(x(s))ds \\ &\leq V(x(0)) - at, \end{aligned}$$

donc

$$V(x(t)) = 0, \quad \forall t \geq \frac{V(x(0))}{a},$$

et

Critère de Lyapunov

Soit $-a = \sup_{x \in C} \dot{V}(x)$ (fini car $\dot{V}$ est continue et C compact). Alors

$$\begin{aligned} V(x(t)) &= V(x(0)) + \int_0^t \dot{V}(x(s))ds \\ &\leq V(x(0)) - at, \end{aligned}$$

donc

$$V(x(t)) = 0, \quad \forall t \geq \frac{V(x(0))}{a},$$

et

$$x(t) = 0, \quad \forall t \geq \frac{V(x(0))}{a}.$$

Critère de Lyapunov

Principe d'invariance de Lasalle : Si on remplace la condition (2) par

$$\dot{V}(x) \leq 0, \forall x,$$

et si l'unique trajectoire $x(t)$ qui vérifie

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad \text{et} \quad \dot{V}(x(t)) = 0, \forall t$$

est $x(t) = 0, \forall t$. Alors $x = 0$ est globalement asymptotiquement stable.

Modèles de partage de ressources

- Modèle fluide : chaque transfert de données représenté par un flot continu, "fluide" d'information

  L liens de capacités $C_1, \dots, C_L$ partagés par N flots

  Flot i donné par :

  - une route r_i - un sous-ensemble de liens
  - un débit $x_i \in \mathbb{R}_+$ supposé constant (dans un premier temps)

  Simplification permettant d'étudier le comportement macroscopique du réseaux.

- Questions : la manière de partager la bande passante (capacités des liens finies) et comment réaliser ce partage

Allocation dynamique de ressources

Problème de maximisation de l'utilité du réseau Soit U une fonction d'utilité croissante et strictement concave sur $\mathbb{R}$.

Allocation utilitaire : l'allocation admissible qui maximise

$$\sum_{i=1}^{N} U(x_i)$$

sous les contraintes de capacité $\sum_{i\,:\,\ell \in r_i} x_i \leq C_\ell$ et $x_i \geq 0, \forall i$.

Propriétés

- Solution unique.
- On peut prendre des U_i différentes pour chaque i.

Implementation distribuée

Relaxation des contraintes de capacité : on maximise

$$W(x) = \sum_{i=1}^{N} U_i(x_i) - \sum_{\ell=1}^{L} B_\ell \left(\sum_{i\,:\,\ell \in r_i} x_i \right)$$

- $B_\ell(y)$ coût du lien ℓ si la chargé globale sur ce lien est y
- Pour $B_\ell(y) = 0,\ y \leq c_\ell$ et $B_\ell(y) = \infty,\ y > c_\ell$ problème exact. Mais pas nécessaire en pratique.
- En pratique : B_ℓ choisi pour répresenter le délai moyen ou la probabilité de perte d'un paquet.
- Compromis : x_i grand augmente l'utilité, mais aussi augmente le délai/perte sur des liens traversés par le flot i.

Implementation distribuée

Relaxation des contraintes de capacité : on maximise

$$W(x) = \sum_{i=1}^{N} U_i(x_i) - \sum_{\ell=1}^{L} B_\ell \left(\sum_{i\,:\,\ell \in r_i} x_i \right)$$

Hypothèse : B_ℓ convexe (donc $W(x)$ strictement concave) et continuellement différentiable, i.e.

$$B_\ell \left(\sum_{i\,:\,\ell \in r_i} x_i \right) = \int_0^{\sum_{i\,:\,\ell \in r_i} x_i} f_\ell(y) dy,$$

avec f_ℓ une fonction croissante et continue - prix de congestion du lien ℓ.

Implementation distribuée

Relaxation des contraintes de capacité : on maximise

$$W(x) = \sum_{i=1}^{N} U_i(x_i) - \sum_{\ell=1}^{L} B_\ell \left(\sum_{i\,:\,\ell \in r_i} x_i \right)$$

Hypothèse : B_ℓ convexe (donc $W(x)$ strictement concave) et continuellement différentiable, i.e.

$$B_\ell \left(\sum_{i\,:\,\ell \in r_i} x_i \right) = \int_0^{\sum_{i\,:\,\ell \in r_i} x_i} f_\ell(y) dy,$$

avec f_ℓ une fonction croissante et continue - prix de congestion du lien ℓ.

Hypothèse. U_i et f_ℓ t.q. la solution vérifie $x_i > 0, \forall i$.
La solution vérifie

$$U_i'(x_i) - \sum_{\ell:\ell \in r_i} f_\ell \left(\sum_{j:\ell \in r_j} x_j \right) = 0, \ \forall i.$$

Implementation distribuée

Algorithme (montée de gradient)

$$\dot{x}_i = k_i(x_i)\left(U_i'(x_i) - \sum_{\ell:\ell\in r_i} f_\ell\left(\sum_{j:\ell\in r_j} x_j\right)\right). \forall i.$$

Propriétés

- Prix du flot i, $q_i = \sum_{\ell:\ell\in r_i} f_\ell\left(\sum_{j:\ell\in r_j} x_j\right)$. Quand il est grand, le controleur de congestion diminue le taux de transmission x_i.
- Si x_i est grand, $U_i'(x_i)$ est petit (fonction concave).

Implementation distribuée

Algorithme (montée de gradient)

$$\dot{x}_i = k_i(x_i) \left(U_i'(x_i) - \sum_{\ell:\ell\in r_i} f_\ell \left(\sum_{j:\ell\in r_j} x_j \right) \right) . \forall i.$$

Propriétés

- Prix du flot i, $q_i = \sum_{\ell:\ell\in r_i} f_\ell \left(\sum_{j:\ell\in r_j} x_j \right)$. Quand il est grand, le controleur de congestion diminue le taux de transmission x_i.
- Si x_i est grand, $U_i'(x_i)$ est petit (fonction concave).

Questions :

- Quelle information nécessaire au niveau de chaque source ?
- Convergence vers le point d'équilibre souhaité ?

Implementation distribuée

Information au niveau d'une source : q_r. Chaque paquet qui traverse un lien collecte son prix et la somme retourné dans le ACK.

Implementation distribuée

Information au niveau d'une source : q_r. Chaque paquet qui traverse un lien collecte son prix et la somme retourné dans le ACK.

Stabilité : en utilisant le critère de Lyapunov.

- $W(x)$ est strictement concave, avec l'unique maximum $\hat{x}$.
- Fonction de Lyapunov : $V(x) = W(\hat{x}) - W(x),\ x \geq 0$.
  On a $V(x) \geq 0,\ \forall x \geq 0$, et $V(x) = 0$ ssi $x = \hat{x}$.

Thm. Si $k_i(x_i) > 0,\ x_i \geq 0$ et $V(x) = W(\hat{x}) - W(x)$ vérifie : $V(x) \to \infty \text{ quand } ||x|| \to \infty$. Alors l'algorithme distribué est globalement asymptotiquement stable et la valeur de l'équilibre maximise W.

Implementation distribuée

Information au niveau d'une source : q_r. Chaque paquet qui traverse un lien collecte son prix et la somme retourné dans le ACK.

Stabilité : en utilisant le critère de Lyapunov.

- $W(x)$ est strictement concave, avec l'unique maximum $\hat{x}$.
- Fonction de Lyapunov : $V(x) = W(\hat{x}) - W(x),\ x \geq 0$.
  On a $V(x) \geq 0,\ \forall x \geq 0$, et $V(x) = 0$ ssi $x = \hat{x}$.

Thm. Si $k_i(x_i) > 0,\ x_i \geq 0$ et $V(x) = W(\hat{x}) - W(x)$ vérifie : $V(x) \to \infty \text{ quand } ||x|| \to \infty$. Alors l'algorithme distribué est globalement asymptotiquement stable et la valeur de l'équilibre maximise W.

Preuve.

$$\dot{V} = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i = -\sum_{i=1}^{N} (U_i'(x_i) - q_i)^2$$

donc $\dot{V}(x) < 0,\ x \neq \hat{x}$ et $\dot{V}(\hat{x}) = 0$. Critère de Lyapunov implique la cvg. vers $\hat{x}$ en partant de toute condition init.

Exemple

- $U_i(x_i) = w_i \log(x_i)$;
- $k_i(x_i) = x_i$;
- Alors,
$$\dot{x}_i = w_i - x_i \sum_{\ell:\ell \in r_i} f_\ell(y_\ell).$$
- Unique équilibre vérifie :
$$\frac{w_i}{x_i} = \sum_{\ell:\ell \in r_i} f_\ell(y_\ell).$$

Si f_ℓ polynomial, alors $W(x)$ tends vers ∞ pour $||x|| \to \infty$ et donc $V(x) \to \infty$ quand $||x|| \to \infty$.

Exemple

- $U_i(x_i) = w_i \log(x_i)$;
- $k_i(x_i) = x_i$;
- Alors,
$$\dot{x}_i = w_i - x_i \sum_{\ell:\ell \in r_i} f_\ell(y_\ell).$$
- Unique équilibre vérifie :
$$\frac{w_i}{x_i} = \sum_{\ell:\ell \in r_i} f_\ell(y_\ell).$$

Si f_ℓ polynomial, alors $W(x)$ tends vers ∞ pour $||x|| \to \infty$ et donc $V(x) \to \infty \text{ quand } ||x|| \to \infty.$

Question : Et si ACK d'un seul bit ?

Exemple

- $U_i(x_i) = w_i \log(x_i)$;
- $k_i(x_i) = x_i$;
- Alors,
$$\dot{x}_i = w_i - x_i \sum_{\ell : \ell \in r_i} f_\ell(y_\ell).$$
- Unique équilibre vérifie :
$$\frac{w_i}{x_i} = \sum_{\ell : \ell \in r_i} f_\ell(y_\ell).$$

Si f_ℓ polynomial, alors $W(x)$ tends vers ∞ pour $||x|| \to \infty$ et donc $V(x) \to \infty \text{ quand } ||x|| \to \infty$.

Question : Et si ACK d'un seul bit ?
Marquer le paquet avec probabilité $1 - e^{-p_\ell}$.
Paquet marqué sur sa route avec proba : $1 - e^{-\sum_{\ell \in r_i} p_\ell}$.
Hypothèse : x_i changent lentement.