Modèles et algorithmes des réseaux

Contrôle de congestion

Ana Busic

Inria Paris - DI ENS

http://www.di.ens.fr/~busic/
ana.busic@inria.fr

Paris, Novembre 2018

Plan

Modèle de partage de ressources

Equité max-min

Equité proportionnelle

Allocation utilitaire

Modèle de partage de ressources

- Modèle fluide : chaque transfert de données représenté par un flot continu, "fluide" d'information

  L liens de capacités $C_1, \ldots, C_L$ partagés par N flots

  Flot i donné par :

  - une route r_i - un sous-ensemble de liens
  - un débit $x_i \in \mathbb{R}_+$ supposé constant (dans un premier temps)

  Simplification permettant d'étudier le comportement macroscopique du réseaux.

Modèle de partage de ressources

- Modèle fluide : chaque transfert de données représenté par un flot continu, "fluide" d'information

  L liens de capacités $C_1, \ldots, C_L$ partagés par N flots

  Flot i donné par :

  - une route r_i - un sous-ensemble de liens
  - un débit $x_i \in \mathbb{R}_+$ supposé constant (dans un premier temps)

  Simplification permettant d'étudier le comportement macroscopique du réseaux.

- Questions : la manière de partager la bande passante (capacités des liens finies) et comment réaliser ce partage

Exemple : sans contrôle de congestion

$L = 5,\ C = (10, 100, 11, 10, 1),\ N = 2$

Flot 1 : $r_1 = \{1, 3, 4\}$, $x_1 = 10$
Flot 2 : $r_2 = \{2, 3, 5\}$, $x_2 = 100$

Exemple : sans contrôle de congestion

$L = 5,\ C = (10, 100, 11, 10, 1),\ N = 2$

Flot 1 : $r_1 = \{1, 3, 4\},\ x_1 = 10$
Flot 2 : $r_2 = \{2, 3, 5\},\ x_2 = 100$

Liens 1 et 2 ont le traffic qui n'excède pas la capacité.

Exemple : sans contrôle de congestion

$L = 5,\ C = (10, 100, 11, 10, 1),\ N = 2$

Flot 1 : $r_1 = \{1, 3, 4\}$, $x_1 = 10$
Flot 2 : $r_2 = \{2, 3, 5\}$, $x_2 = 100$

Liens 1 et 2 ont le traffic qui n'excède pas la capacité.

Traffic offert sur lien 3 : $x_1 + x_2 = 110 < C_3 = 11$.

Le traffic de chaque flot réduit proportionnellement à son débit (e.g. discipline FIFO) :
$x_1' = 1,\ x_2' = 10$

Exemple : sans contrôle de congestion

$L = 5,\ C = (10, 100, 11, 10, 1),\ N = 2$

Flot 1 : $r_1 = \{1, 3, 4\},\ x_1 = 10$
Flot 2 : $r_2 = \{2, 3, 5\},\ x_2 = 100$

Liens 1 et 2 ont le traffic qui n'excède pas la capacité.

Traffic offert sur lien 3 : $x_1 + x_2 = 110 < C_3 = 11$.

Le traffic de chaque flot réduit proportionnellement à son débit (e.g. discipline FIFO) :
$x_1' = 1,\ x_2' = 10$

Lien 5 : traffic offert est $x_2' = 10 < C_5 = 1$. Donc $x_2'' = 1$.

Exemple : sans contrôle de congestion

$L = 5,\ C = (10, 100, 11, 10, 1),\ N = 2$

Flot 1 : $r_1 = \{1, 3, 4\},\ x_1 = 10$
Flot 2 : $r_2 = \{2, 3, 5\},\ x_2 = 100$

Liens 1 et 2 ont le traffic qui n'excède pas la capacité.

Traffic offert sur lien 3 : $x_1 + x_2 = 110 < C_3 = 11$.

Le traffic de chaque flot réduit proportionnellement à son débit (e.g. discipline FIFO) :
$x_1' = 1,\ x_2' = 10$

Lien 5 : traffic offert est $x_2' = 10 < C_5 = 1$. Donc $x_2'' = 1$.

Débit total : 2

Exemple : sans contrôle de congestion

$L = 5,\ C = (10, 100, 11, 10, 1),\ N = 2$

Flot 1 : $r_1 = \{1, 3, 4\},\ x_1 = 10$
Flot 2 : $r_2 = \{2, 3, 5\},\ x_2 = 100$

Liens 1 et 2 ont le traffic qui n'excède pas la capacité.

Traffic offert sur lien 3 : $x_1 + x_2 = 110 < C_3 = 11$.

Le traffic de chaque flot réduit proportionnellement à son débit (e.g. discipline FIFO) :
$x_1' = 1,\ x_2' = 10$

Lien 5 : traffic offert est $x_2' = 10 < C_5 = 1$. Donc $x_2'' = 1$.

Débit total : 2

Débit maximal : 11 (et sans réduire x_2') !

Efficacité vs. équité

Efficacité : on cherche à maximiser le débit global

Les sources doivent limiter leurs taux en prenant compte l'état du réseaux.

Efficacité vs. équité

Efficacité : on cherche à maximiser le débit global

Les sources doivent limiter leurs taux en prenant compte l'état du réseaux.

Equité : si on considère uniquement le débit global maximal, certains flots peuvent avoir débit 0 (famine)

Efficacité vs. équité

Efficacité : on cherche à maximiser le débit global

Les sources doivent limiter leurs taux en prenant compte l'état du réseaux.

Equité : si on considère uniquement le débit global maximal, certains flots peuvent avoir débit 0 (famine)

Exemple : L liens, $C_i = C, \forall i$, $L + 1$ flots
Flot 0 : $r_i = \{0, \ldots, L\}$
Flot i, $i = 1 \ldots, N$: $r_i = \{i\}$

Efficacité vs. équité

Efficacité : on cherche à maximiser le débit global

Les sources doivent limiter leurs taux en prenant compte l'état du réseaux.

Equité : si on considère uniquement le débit global maximal, certains flots peuvent avoir débit 0 (famine)

Exemple : L liens, $C_i = C, \forall i$, $L+1$ flots
Flot 0 : $r_i = \{0, \ldots, L\}$
Flot i, $i = 1\ldots, N$: $r_i = \{i\}$

Lien i : $x_0 + x_i = C$, donc $x_i = C - x_0$.

Efficacité vs. équité

Efficacité : on cherche à maximiser le débit global

Les sources doivent limiter leurs taux en prenant compte l'état du réseaux.

Equité : si on considère uniquement le débit global maximal, certains flots peuvent avoir débit 0 (famine)

Exemple : L liens, $C_i = C, \forall i$, $L+1$ flots
Flot 0 : $r_i = \{0, \ldots, L\}$
Flot i, $i = 1 \ldots, N$: $r_i = \{i\}$

Lien i : $x_0 + x_i = C$, donc $x_i = C - x_0$.

On cherche à maximiser : $x_0 + L(C - x_0) = LC - (L-1)x_0$
Maximum quand $x_0 = 0$.

Pareto efficacité

- Contrôle de débit d'emission des sources :

$$\sum_{i\,:\,\ell \in r_i} x_i \leq C_\ell,\ \forall \ell$$

- Pour éviter une sous-utilisation des ressources on considère des allocations Pareto-efficaces - on ne peut augmenter le débit d'un flot sans diminuer le débit d'un autre,

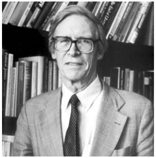
$$\forall i,\ \exists \ell \in r_i\ :\ \sum_{j:\ell \in r_j} x_j = C_\ell$$

chaque flot traverse un lien saturé.

- Un grand choix parmi les allocations Pareto-efficaces (pas d'unicité).

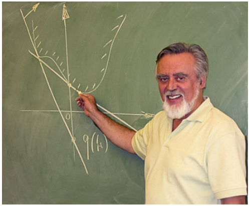
Equité max-min

- Notion connue depuis longtemps en sciences politiques et économiques



John Rawls. Theory of Justice, Harvard, HUP. 1971.

- En réseaux : introduite par Bertsekas & Gallager
Data networks. Prentice Hall. 1987.



Equité max-min

- Caractérisée par la propriété :

  On ne peut augmenter le débit d'un flot sans diminuer le débit d'un autre flot de débit inférieur ou égal.

  $$\forall i,\ \exists \ell \in r_i\ :\ \sum_{j\,:\,\ell \in r_j} x_j = C_\ell \ \text{ et } \ x_i = \max_{j\,:\,\ell \in r_j} x_j$$

  (chaque flot traverse un lien saturé au travers duquel tous les autres flots ont un débit inférieur ou égal)

- Construction : procedure de "remplissage"

Equité max-min

- Caractérisée par la propriété :

  On ne peut augmenter le débit d'un flot sans diminuer le débit d'un autre flot de débit inférieur ou égal.

$$\forall i,\ \exists \ell \in r_i \ :\ \sum_{j\,:\,\ell \in r_j} x_j = C_\ell \ \text{ et } \ x_i = \max_{j\,:\,\ell \in r_j} x_j$$

  (chaque flot traverse un lien saturé au travers duquel tous les autres flots ont un débit inférieur ou égal)

- Construction : procedure de "remplissage"
  1. on part d'un réseaux vide ;
  2. on augmente le débit de chaque flot à la même vitesse, jusqu'à ce qu'un lien soit saturé ; fixer les débits des flots correspondants ;
  3. on réitère l'étape 2 pour les flots non fixés tant qu'il y en a.

Unicité de l'équité max-min

Prop. L'allocation max-min est unique.

Unicité de l'équité max-min

Prop. L'allocation max-min est unique.

Preuve. Supposons x et y sont 2 allocations max-min équitables et $x \neq y$.

Unicité de l'équité max-min

Prop. L'allocation max-min est unique.

Preuve. Supposons x et y sont 2 allocations max-min équitables et $x \neq y$.

Supposons qu'il existe un i t.q. $x_i < y_i$ (inverser x et y sinon) et soit i_0 l'indice du plus petit élément x_i avec telle propriété, i.e.

$$x_{i_0} < y_{i_0} \text{ et } x_{i_0} = \min\{x_i \ : \ x_i < y_i\}.$$

Unicité de l'équité max-min

Prop. L'allocation max-min est unique.

Preuve. Supposons x et y sont 2 allocations max-min équitables et $x \neq y$.

Supposons qu'il existe un i t.q. $x_i < y_i$ (inverser x et y sinon) et soit i_0 l'indice du plus petit élément x_i avec telle propriété, i.e.

$$x_{i_0} < y_{i_0} \text{ et } x_{i_0} = \min\{x_i \ : \ x_i < y_i\}.$$

x est max-min équitable $\Rightarrow \exists j$ t.q.

$$y_j < x_j \leq x_{i_0}.$$

Unicité de l'équité max-min

Prop. L'allocation max-min est unique.

Preuve. Supposons x et y sont 2 allocations max-min équitables et $x \neq y$.

Supposons qu'il existe un i t.q. $x_i < y_i$ (inverser x et y sinon) et soit i_0 l'indice du plus petit élément x_i avec telle propriété, i.e.

$$x_{i_0} < y_{i_0} \text{ et } x_{i_0} = \min\{x_i \ : \ x_i < y_i\}.$$

x est max-min équitable $\Rightarrow \exists j$ t.q.

$$y_j < x_j \leq x_{i_0}.$$

y est max-min équitable $\Rightarrow \exists k$ t.q.

$$x_k < y_k \leq y_j < x_j \leq x_{i_0}.$$

Unicité de l'équité max-min

Prop. L'allocation max-min est unique.

Preuve. Supposons x et y sont 2 allocations max-min équitables et $x \neq y$.

Supposons qu'il existe un i t.q. $x_i < y_i$ (inverser x et y sinon) et soit i_0 l'indice du plus petit élément x_i avec telle propriété, i.e.

$$x_{i_0} < y_{i_0} \text{ et } x_{i_0} = \min\{x_i \ : \ x_i < y_i\}.$$

x est max-min équitable $\Rightarrow \exists j$ t.q.

$$y_j < x_j \leq x_{i_0}.$$

y est max-min équitable $\Rightarrow \exists k$ t.q.

$$x_k < y_k \leq y_j < x_j \leq x_{i_0}.$$

En contradiction avec le choix du i_0.

Equité proportionnelle

F. Kelly 1998.

Equité proportionnelle :
Une allocation admissible x t.q.

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{y_i - x_i}{x_i} \leq 0, \ \forall \text{ allocation admissible } y.$$

Equité proportionnelle

F. Kelly 1998.

Equité proportionnelle :
Une allocation admissible x t.q.

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{y_i - x_i}{x_i} \leq 0, \ \forall \text{ allocation admissible } y.$$

Question : Différent de l'allocation max-min ?

Equité proportionnelle

F. Kelly 1998.

Equité proportionnelle :
Une allocation admissible x t.q.

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{y_i - x_i}{x_i} \leq 0, \ \forall \text{ allocation admissible } y.$$

Question : Différent de l'allocation max-min ?

Exemple : réseau linéaire avec L liens, $C_\ell = C$, $\forall \ell$.
Max-min : $x_i = \frac{C}{2}$, $0 \leq i \leq L$.

Equité proportionnelle

F. Kelly 1998.

Equité proportionnelle :
Une allocation admissible x t.q.

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{y_i - x_i}{x_i} \leq 0, \ \forall \text{ allocation admissible } y.$$

Question : Différent de l'allocation max-min ?

Exemple : réseau linéaire avec L liens, $C_\ell = C, \ \forall \ell$.
Max-min : $x_i = \frac{C}{2}, \ 0 \leq i \leq L$.
Allocation admissible y : $y_0 = x_0 - \delta, \ y_i = x_i + \delta, \ 1 \leq i \leq L, \ \delta < \frac{C}{2}$.

$$\sum_{i=1}^{L} \frac{2\delta}{C} - \frac{2\delta}{C} = \frac{2(L-1)\delta}{C} > 0, \ L \geq 2.$$

Equité proportionnelle

Prop. L'équité proportionnelle est l'unique allocation qui minimise

$$\sum_{i=1}^{N} \ln x_i .$$

sous les contraintes de capacité $\sum_{i\,:\,\ell \in r_i} x_i \leq C_\ell$.

Equité proportionnelle

Prop. L'équité proportionnelle est l'unique allocation qui minimise

$$\sum_{i=1}^{N} \ln x_i.$$

sous les contraintes de capacité $\sum_{i\,:\,\ell \in r_i} x_i \leq C_\ell$.

La fonction $J(x) = \sum_{i=1}^{N} \ln x_i$ est strictement concave et la région des contraintes est convexe $\Rightarrow$ au plus un maximum.

Equité proportionnelle

Prop. L'équité proportionnelle est l'unique allocation qui minimise

$$\sum_{i=1}^{N} \ln x_i .$$

sous les contraintes de capacité $\sum_{i\,:\,\ell\in r_i} x_i \leq C_\ell$.

La fonction $J(x) = \sum_{i=1}^{N} \ln x_i$ est strictement concave et la région des contraintes est convexe $\Rightarrow$ au plus un maximum.

J est continue (avec $\ln(0) = -\infty$) sur une région compacte $\Rightarrow$ J a au moins un maximum.

Equité proportionnelle

Prop. L'équité proportionnelle est l'unique allocation qui minimise

$$\sum_{i=1}^{N} \ln x_i .$$

sous les contraintes de capacité $\sum_{i\,:\,\ell \in r_i} x_i \leq C_\ell$.

La fonction $J(x) = \sum_{i=1}^{N} \ln x_i$ est strictement concave et la région des contraintes est convexe $\Rightarrow$ au plus un maximum.

J est continue (avec $\ln(0) = -\infty$) sur une région compacte $\Rightarrow$ J a au moins un maximum.

$\Rightarrow$ exactement un maximum.

Caractérisé par l'inégalité d'Euler :

$$\nabla J(x)(y - x) \leq 0.$$

Inégalité d'Euler

$$J(x+\delta) - J(x) = \nabla J(x)\delta + \frac{1}{2}\delta^t \nabla^2 J(x)\delta + o(||\delta||^2)$$

- x est une allocation de l'équité proportionnelle

$$\nabla J(x)\delta \leq 0$$

  Donc $J(x+\delta) - J(x) \leq 0$ (car fonction J strictement concave, donc $\nabla^2 J(x)$ définie négative). J a un maximum local en x, maximum est unique $\Rightarrow$ maximum global en x.

Inégalité d'Euler

$$J(x+\delta) - J(x) = \nabla J(x)\delta + \frac{1}{2}\delta^t \nabla^2 J(x)\delta + o(||\delta||^2)$$

- x est une allocation de l'équité proportionnelle

  $$\nabla J(x)\delta \leq 0$$

  Donc $J(x+\delta) - J(x) \leq 0$ (car fonction J strictement concave, donc $\nabla^2 J(x)$ définie négative). J a un maximum local en x, maximum est unique $\Rightarrow$ maximum global en x.

- J a un maximum global en x et y une autre allocation admissible. Alors

  $$\nabla J(x)(y-x) = \lim_{t\to\infty} \frac{J(x+t(y-x)) - J(x)}{t} \leq 0.$$

  ($[x, y]$ est à l'intérieur du domaine, car convexe).

Allocation utilitaire

Soit U une fonction d'utilité croissante et strictement concave sur $\mathbb{R}$.

Allocation utilitaire : l'allocation admissible qui maximise

$$\sum_{i=1}^{N} U(x_i)$$

sous les contraintes de capacité $\sum_{i\,:\,\ell \in r_i} x_i \leq C_\ell$.

Allocation utilitaire

Soit U une fonction d'utilité croissante et strictement concave sur $\mathbb{R}$.

Allocation utilitaire : l'allocation admissible qui maximise

$$\sum_{i=1}^{N} U(x_i)$$

sous les contraintes de capacité $\sum_{i\,:\,\ell \in r_i} x_i \leq C_\ell$.

Allocation α-équitable

$$U(s) = \begin{cases} -s^\alpha, & \alpha < 0 \\ \ln(s), & \alpha = 0 \\ s^\alpha, & 0 < \alpha < 1. \end{cases}$$

Allocation utilitaire

Soit U une fonction d'utilité croissante et strictement concave sur $\mathbb{R}$.

Allocation utilitaire : l'allocation admissible qui maximise

$$\sum_{i=1}^{N} U(x_i)$$

sous les contraintes de capacité $\sum_{i\,:\,\ell \in r_i} x_i \leq C_\ell$.

Allocation α-équitable

$$U(s) = \begin{cases} -s^\alpha, & \alpha < 0 \\ \ln(s), & \alpha = 0 \\ s^\alpha, & 0 < \alpha < 1. \end{cases}$$

Prop. Allocation α-équitable tend vers l'équité max-min lorsque α tend vers $-\infty$.

Allocation α-équitable

Preuve. Soit x l'allocation qui n'est pas max-min équitable.

Notons par $s_i \subset r_i$ l'ensemble de liens saturés de la route du flot i, i.e. t.q.

$$\sum_{j \,:\, \ell \in r_j} x_j = C_\ell .$$

Alors $\exists$ un flot i t.q. $\forall \ell \in s_i$ un autre flot $j(\ell)$ a un débit strictement supérieur.

Allocation α-équitable

Preuve. Soit x l'allocation qui n'est pas max-min équitable.

Notons par $s_i \subset r_i$ l'ensemble de liens saturés de la route du flot i, i.e. t.q.

$$\sum_{j\,:\,\ell \in r_j} x_j = C_\ell.$$

Alors $\exists$ un flot i t.q. $\forall \ell \in s_i$ un autre flot $j(\ell)$ a un débit strictement supérieur.

Soit $\epsilon > 0$ t.q.

$$\forall \ell \in s_i,\ x_i(1+\epsilon) < x_{j(\ell)}$$

et

$$\forall \ell \in r_i \backslash s_i,\ x_i(1+\epsilon) + \sum_{j \neq i,\ \ell \in r_j} x_j \leq C_\ell$$

Allocation α-équitable

On défini une nouvelle allocation y : $y_i = x_i(1+\epsilon)$ et pour tout $j \neq i$,

$$y_j = \begin{cases} x_j - x_i\epsilon, & j \in \{j(\ell),\ \ell \in s_i\}, \\ x_j, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette allocation est admissible.

Allocation α-équitable

On défini une nouvelle allocation y : $y_i = x_i(1+\epsilon)$ et pour tout $j \neq i$,

$$y_j = \begin{cases} x_j - x_i\epsilon, & j \in \{j(\ell),\ \ell \in s_i\}, \\ x_j, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette allocation est admissible.

On a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N} U(x_i) - \sum_{i=1}^{N} U(y_i) &= \sum_{i=1}^{N} y_i^\alpha - \sum_{i=1}^{N} x_i^\alpha \\ &= x_i^\alpha \left((1+\epsilon)^\alpha - 1 + \sum_{j \in \{j(\ell),\ \ell \in s_i\}} \left(\frac{x_j - \epsilon x_i}{x_i}\right)^\alpha - \left(\frac{x_j}{x_i}\right)^\alpha \right), \end{aligned}$$

strictement négatif pour $\alpha \to -\infty$.

Donc x ne peut être la limite de l'allocation α-équitable pour $\alpha \to -\infty$.

Allocation α-équitable

On défini une nouvelle allocation y : $y_i = x_i(1+\epsilon)$ et pour tout $j \neq i$,

$$y_j = \left\{ \begin{array}{ll} x_j - x_i\epsilon, & j \in \{j(\ell),\ \ell \in s_i\}, \\ x_j, & \text{sinon.} \end{array} \right.$$

Cette allocation est admissible.

On a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N} U(x_i) - \sum_{i=1}^{N} U(y_i) &= \sum_{i=1}^{N} y_i^{\alpha} - \sum_{i=1}^{N} x_i^{\alpha} \\ &= x_i^{\alpha} \left((1+\epsilon)^{\alpha} - 1 + \sum_{j \in \{j(\ell),\ \ell \in s_i\}} \left(\frac{x_j - \epsilon x_i}{x_i} \right)^{\alpha} - \left(\frac{x_j}{x_i} \right)^{\alpha} \right), \end{aligned}$$

strictement négatif pour $\alpha \to -\infty$.

Donc x ne peut être la limite de l'allocation α-équitable pour $\alpha \to -\infty$.

Region compacte de $\mathbb{R}^N$, donc pour tout suite d'allocations α-équitables $\exists$ une sous-suite qui converge. Lorsque $\alpha \to -\infty$, la limite ne peut être que max-min.