Sujet de stage de Licence 3 Informatique

Énumération et génération des configurations locales des plans discrets

Damien Jamet
Damien.Jamet@loria.fr

Eric Domenjoud
Eric.Domenjoud@loria.fr

26 février 2011

1 Contexte

1.1 Introduction

Les études des propriétés géométriques sur ordinateur procèdent généralement suivant deux approches : le *tout-voxel* et la construction des théories discrètes.

Dans l'approche en *tout-voxel*, les données étudiées proviennent souvent d'appareils d'acquisition tels que les caméras cdd, les scanners ou tout autre appareil d'acquisition d'images médicales. Nous dirons que nous avons une définition en extension des objets étudiés : un sous-ensemble fini de $\mathbb{Z}^n$ est défini par l'enumération de l'ensemble de ses éléments. L'inconvénient évident d'une telle approche est bien-entendu la taille importante des ressources informatiques nécessaires au traitement des toutes ces données collectées. De plus, cette approche ne permet de traiter que des objets discrets finis, la limite étant imposée par le matériel utilisé.

Au milieu des années 60, J. Bresenham propose une première définition en compréhension d'**une droite discrète**, à savoir la discrétisation d'une droite sur une grille représentée par $\mathbb{Z}^2$. Une **droite discrète**, quelque soit sa taille (son nombre de pixels), est alors la donnée des paramètres de la droite euclidienne qu'elle *représente* et d'un algorithme incrémental, appelé aujourd'hui l'**algorithme de Bresenham** [Bre65]. Cette méthode permet de *coder* une droite discrète avec très peu d'information et de construire autant de points que nécessaire. De plus, alors que l'approche *tout-voxel* ne permet d'appréhender que des structures finies, l'algorithme de Brésenham permet de considérer, de manière implicite, des objets aussi grands que l'on veut, voire infinis.

Suivront alors de nombreux travaux dans cette direction sur les droites discrètes [DS84, DR95, BDJR10], les plans discrets [DR95, ABI02, BFJ05, Fer09] et aussi sur la topologie des objets discrets [AAS97, DJT09].

L'objet de ce stage est **l'étude des configurations locales des plans discrets**, l'**énumération** et la **génération** de celles-ci.

1.2 Généralités

Définition 1 (Hyperplan discret) Soient $n \geq 2$ un entier, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}$. L'**hyperplan discret $\mathbf{H}(\mathbf{v}, \mu)$** de vecteur normal $\mathbf{v}$ et de décalage μ est le sous-ensemble de $\mathbb{Z}^n$ défini par :

$$\mathbf{H}(\mathbf{v}, \mu) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^3,\, 0 \leq v_1 x_1 + \cdots + v_n x_n + \mu < \|\mathbf{v}\|_\infty\right\},$$

Si $n = 2$ (resp. $n = 3$), nous dirons que $\mathbf{H}(\mathbf{v}, \mu)$ est une **droite discrète** (resp. un **plan discret**).

Pour des raisons de *visibilité*, il est d'usage de représenter les points d'une droite discrète (resp. d'un plan discret) par des carrés (resp. cubes) unités centrés en ceux-ci et appelés **pixels** (resp. **voxels**) (voir Figure 1).

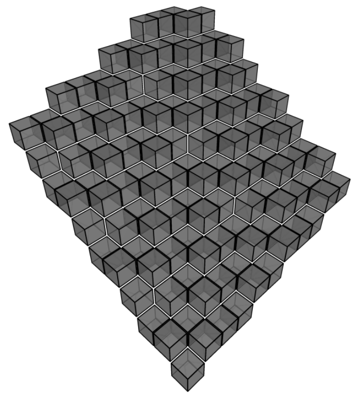

FIGURE 1 – Le plan discret de vecteur normal $v = (6, 10, 15)$.

L'objet de ce stage sera l'étude des configurations locales (voir Figure 2) des plans discrets et, en particulier, l'énumération de ceux-ci.

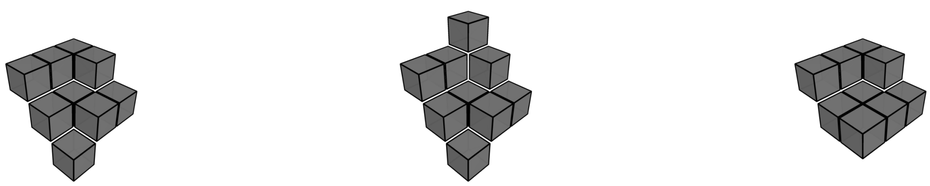

FIGURE 2 – Différentes configurations 3×3 de plans discrets.

2 Travail demandé

Comme dit précédemment de nombreux travaux sur les droites discrètes ont été effectués, aussi bien à partir d'une approche purement géométrique que d'une approche combinatoire. Nous avons ainsi une bonne compréhension de leurs propriétés. En particulier, il est dorénavant bien connu [BL88, Mig91, BP93] que le nombre $s(n)$ de *segments discrets* de longueur fixée n est :

$$s(n) = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)\varphi(i),$$

où ϕ désigne l'indicateur d'Euler. Une preuve simple de ce résultat est donnée par [BP93] et utilise la formule d'Euler liant le nombre de sommets, d'arêtes et de faces d'un graphe planaire défini à partir d'une représentation graphique des domaines de définitions de chaque segment.

À ce jour, aucune formule de ce type n'est connue pour calculer le nombre de configurations locales rectangulaires de taille $m \times n$ des plans discrets. Le travail demandé consistera :

1. Dans un premier temps, le stagiaire maîtrisera l'approche de [BP93] ayant permis de comptabiliser le nombre exact de *segments discrets* de longueur fixée.
2. Dans un second temps, en adaptant l'algorithme de Bentley et Ottmann [BO79], le stagiaire élaborera un programme de décompte des configurations locales planaires à partir des résultats de [Gér99, DTZ09].

3. Pour terminer, le stagiaire élaborera un algorithme d'engendrement de configurations locales de plans discrets à partir des représentations données dans [Gér99, DTZ09].

3 Outils

Ce sujet ne fait intervenir que des outils très élémentaires en mathématiques. Cependant, afin de mener ce sujet à son terme, le staigiare devra posséder de bonnes bases en algorithmique ainsi qu'en programmation.

Références

[AAS97] É. Andres, R. Acharya, and C. Sibata. Discrete analytical hyperplanes. *Graph. Models Image Process.*, 59(5) :302–309, 1997.

[ABI02] P. Arnoux, V. Berthé, and S. Ito. Discrete planes, $\mathbb{Z}^2$-actions, Jacobi-Perron algorithm and substitutions. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 52(2) :305–349, 2002.

[BDJR10] Nicolas Bedaride, Eric Domenjoud, Damien Jamet, and Jean-Luc Remy. On the number of balanced words of given length and height over a two letter alphabet. *Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science*, 12(3) :41–62, 2010.

[BFJ05] V. Berthé, C. Fiorio, and D. Jamet. Generalized functionality for arithmetic discrete planes. In É. Andres, G. Damiand, and P. Lienhardt, editors, *Discrete Geometry for Computer Imagery, 12th International Conference, DGCI 2005, Poitiers, France, April 13-15, 2005, Proceedings*, volume 3429 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 276–286. Springer, April 2005.

[BL88] C. A. Berenstein and D. Lavine. On the number of digital straight line segments. *P.A.M.I*, 10(6) :880–887, 1988.

[BO79] Jon Louis Bentley and Thomas Ottmann. Algorithms for reporting and counting geometric intersections. *IEEE Trans. Computers*, 28(9) :643–647, 1979.

[BP93] J. Berstel and M. Pocchiola. A geometric proof of the enumeration formula for Sturmian words. *Int. J. Algebra Comput.*, 3(3) :349–355, 1993.

[Bre65] J. E. Bresenham. Algorithm for computer control of a digital plotter. *IBM Systems Journal*, 4(1) :25–30, 1965.

[DJT09] Eric Domenjoud, Damien Jamet, and Jean-Luc Toutant. On the connecting thickness of arithmetical discrete planes. In Srecko Brlek, Christophe Reutenauer, and Xavier Provençal, editors, *DGCI*, volume 5810 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 362–372. Springer, 2009.

[DR95] I. Debled-Rennesson. *Étude et reconnaissance des droites et plans discrets.* Thèse de Doctorat, Université Louis Pasteur, Strasbourg., 1995.

[DS84] L. Dorst and A.W.M. Smeulders. Discrete representation of straight line. In *IEEE Trans. on Pattern Anal. Machine Intell.*, volume PAMI-6, pages 450–463, 1984.

[DTZ09] Alain Daurat, Mohamed Tajine, and Mahdi Zouaoui. About the frequencies of some patterns in digital planes. application to area estimators. *Computers & Graphics*, 33(1) :11–20, 2009.

[Fer09] Thomas Fernique. Generation and recognition of digital planes using multi-dimensional continued fractions. *Pattern Recognition*, 42(10) :2229–2238, 2009.

[Gér99] Y. Gérard. Local configurations of digital hyperplanes. In *Proceedings of the 8th International Conference on Discrete Geometry for Computer Imagery*, pages 65–75. Springer-Verlag, 1999.

[Mig91] F. Mignosi. On the number of factors of sturmian words. *Theoret. Comput. Sci.*, 82(1) :71–84, 1991.