

# Calcul du polynôme minimax complexe, implantation et applications

Bernhard Beckermann, Nicolas Brisebarre et Sylvain Chevillard

L3 informatique ENS Paris

Proposition de stage 2011

**Titre du stage :** Calcul du polynôme minimax complexe, implantation et applications.

**Durée :** deux à trois mois, à partir du 1er juin 2011.

**Encadrants :** Bernhard Beckermann (Professeur, Laboratoire P. Painlevé, Univ. Lille 1), Nicolas Brisebarre (Chargé de recherche au CNRS, LIP, ENS Lyon, encadrant principal) et Sylvain Chevillard (Chargé de recherche à l'INRIA Sophia Antipolis, E.P.I. APICS).

**Lieu du stage :** Projet Arénaire, LIP, École Normale Supérieure de Lyon, 46 allée d'Italie, 69364 Lyon, Cedex 07, ou

Équipe APICS, Centre de recherche INRIA Sophia-Antipolis Méditerranée, 2004 route des Lucioles - BP 93, 06902 Sophia Antipolis Cedex.

**Téléphone :** +33 (0)4 72 72 84 96

**Télécopie :** +33 (0)4 72 72 80 80.

**Méls :** Bernhard.Beckermann@math.univ-lille1.fr, Nicolas.Brisebarre@ens-lyon.fr et Sylvain.Chevillard@ens-lyon.org.

Lorsqu'on plante (en matériel ou en logiciel) des fonctions, on a le plus souvent recours à des approximations polynomiales. Dans la plupart des cas, le polynôme qui approche le mieux (pour une norme, un degré et sur un intervalle donnés) une fonction a des coefficients qui ne sont pas exactement représentables en machine. D'un autre côté, les approximations polynomiales que l'on plante ont nécessairement des coefficients qui se codent sur un nombre fini - qui peut être petit - de bits : cela provient, pour les implantations logicielles, de la représentation en virgule flottante et pour les implantations matérielles, du besoin d'avoir de petits (et donc rapides et/ou peu coûteux) multiplieurs. On souhaite donc être capable de produire de bons (quant à l'erreur) approximaux polynomiaux qui satisfassent à ce type de contraintes.

Dans le cas où les polynômes considérés sont à coefficients nombre-machine réels, les articles [BMT], [BC] et [BH] ont proposé des réponses à ce problème. Une première étape fondamentale dans ces calculs est la détermination du polynôme de degré au plus  $n$  (où  $n$  est un entier naturel donné) qui minimise la norme  $\|f - p\|$  où  $f$  est la fonction considérée. On se concentre ici sur le cas de la norme sup i.e.  $\|f - p\| = \sup\{|f(x) - p(x)|; x \in [a, b]\}$ . Dans le cas de polynômes à coefficients réels, la théorie est bien connue [Che] et des implantations satisfaisantes existent : le logiciel Sollya <http://sollya.gforge.inria.fr/> développé au sein de l'équipe Arénaire en propose une, et citons aussi la suite MATLAB nommée Chebfun, un travail d'ampleur réalisé autour de N. Trefethen <http://www2.maths.ox.ac.uk/chebfun/> qui, via un choix original de représentations des fonctions - à savoir des polynômes d'interpolation en certaines familles de points - propose de nombreuses routines efficaces de calcul numérique.

On s'intéresse dans ce stage à la détermination efficace et fiable du meilleur polynôme d'approximation à coefficients complexes. Outre la généralisation des travaux [BMT] et [BC] au cas complexe, ce calcul a de multiples applications : pour l'évaluation des fonctions spéciales, en traitement du signal, en algèbre linéaire. À notre connaissance, l'implantation d'une telle routine

n'est actuellement pas disponible dans les principaux logiciels de calcul symbolique (Maple et Mathematica) ou numérique (MATLAB et Chebfun).

La/le candidat(e) devra commencer par étudier les articles [T] et [FM], puis travailler sur une implantation en C (qui aura vocation à intégrer Sollya) ou en SAGE, par exemple, de ce calcul de minimax complexe. Ensuite, dans le temps restant, elle/il essaiera de développer les diverses applications envisagées.

Ce stage s'inscrit dans le cadre d'un projet plus général de développement d'outils d'approximation et notamment d'approximation efficace en machine. Ce sont des briques de base indispensables pour la synthèse de bibliothèques d'évaluation de fonctions ou de filtres numériques. Les notions qui devront être abordées relèvent de l'analyse complexe, de la théorie de l'approximation (et plus généralement de l'analyse numérique) et de la théorie algorithmique des nombres (via la réduction des réseaux euclidiens).

#### RÉFÉRENCES

- [BC] N. BRISEBARRE AND S. CHEVILLARD, *Efficient Polynomial  $L^\infty$ -Approximations*, 18th IEEE Symposium on Computer Arithmetic (ARITH-18), Montpellier (France), pages 169-176, June 2007.
- [BH] N. BRISEBARRE AND G. HANROT, *Floating-Point  $L^2$ -Approximations*, 18th IEEE Symposium on Computer Arithmetic (ARITH-18), Montpellier (France), pages 177-184, June 2007.
- [BMT] N. BRISEBARRE, J.-M. MULLER AND A. TISSERAND, *Computing Machine-Efficient Polynomial Approximations*, ACM Transactions on Mathematical Software, Vol. 32, n. 2, Jun. 2006, 236-256.
- [Che] E. W. CHENEY, *Introduction to Approximation Theory*, AMS/Chelsea Publication.
- [FM] B. FISCHER AND J. MODERSITZKI, *An algorithm for complex linear approximation based on semi-infinite programming*, Numerical Algorithms, Volume 5, Number 6 / June 1993, pages 287-297.
- [T] P. T. P. TANG, *A fast algorithm for linear complex Chebyshev approximations*, Mathematics of computation, 1988, vol. 51, n. 184, pp. 721-739.