1 Exercices suplémentaire sur l'intégration

Les exercices de cette feuille sont donnés en complement de la feuille 3. Le niveau de difficulté est sensiblement plus élevé.

1.1

Soit f une fonction $\mathcal{C}_1$ sur $[a,b]$, telle que $f(a) = f(b) = 0$.

a) Montrer que :

$$|\int_a^b f(t)dt| \;\leq\; \frac{(b-a)^2}{4} \sup_{t\in[a,b]} |f^{'}(t)|$$

b) Donner une CNS pour avoir une égalité à la place de l'inegalité ci-dessus.

1.2

Soit f une fonction $\mathcal{C}_1$ sur $[0,1]$, et telle que $f(0) = 0$ et $\forall t \in [0,1]\ 0 \leq f^{'}(t) \leq 1$. Montrer que :

$$\int_0^1 f^3(t)dt \leq \left(\int_0^1 f^2(t)dt\right)^2$$

1.3

Soit $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k^2}$.
a) Calculer la limite l de u_n quand $n \to +\infty$.
b) Donner un equivalent de $l - u_n$ en $+\infty$.

1.4 (Inegalité de Young)

Soit f une fonction *continue* et *croissante* sur l'intervalle $[0,a]$.

a)
Montrer, à l'aide de somme de Riemann, que pour tout $x \in [0,a]$:

$$\int_0^x f(t)dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt = x.f(x)$$

b) En déduire l'inegalité suivante :

$$\int_0^a f(t)dt + \int_0^b f^{-1}(t)dt \geq a.b$$

1.5 (Régle de Bioche)

Calculer les primitives suivantes :

a)	$\int \frac{cosxdx}{sin^2x+2tanx}$	**b)**	$\int \frac{sinxdx}{cos^3x+sin^3x}$
c)	$\int \frac{dx}{sinx+cosx+2}$	**d)**	$\int \frac{sin^3xdx}{1+cos^2x}$

1.6

Calculer $\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{dx}{3+sinx}$ (attention aux bornes lors du changement de variable !).