Feuille d'Exercices 7

Intégrales à paramètre - Convergence dominée

Exercice 7.1.— Déterminer les limites des suites suivantes :

$$\text{(i) } u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^n dt, \text{ (ii) } v_n = \int_0^{+\infty} e^{-nt^2} dt, \text{ (iii) } w_n = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^n)^{1+\frac{1}{n}}},$$

$$\text{(iv) } x_n = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t+n}}, \text{ (v) } y_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nt}}{1+n^2t^2} dt, \text{ (vi) } z_n = \int_0^{+\infty} \left(1+\frac{t}{n}\right)^n e^{-2t} dt.$$

Exercice 7.2.— Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ une application continue bornée avec $f(0) \neq 0$.

1. Justifier l'existence de

$$a_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nt} f(t)}{\sqrt{t}} dt.$$

2. En effectuant un changement de variable et en utilisant le théorème de convergence dominée, trouver un équivalent de a_n quand n tend vers l'infini. (On rappelle l'intégrale de Gauss $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.)

Exercice 7.3.— Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{C}$ une fonction continue telle que la fonction $g : t \to e^{-t} f(t)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} f(t) dt = \lim_{n \to +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n f(t) dt.$$

Exercice 7.4.— Soit $f \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. On suppose que f est bornée sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{n f(t)}{1+n^2t^2} dt \underset{n \to +\infty}{\to} \frac{\pi}{2} f(0).$$

Exercice 7.5.— Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x \sin t) dt$

1. Montrer que la fonction f est de classe C^1. Pour tout nombre réel x, exprimer $f'(x)$ comme intégrale à paramètre.

2. Montrer que la fonction f est de classe C^2.

3. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $xy'' + y' + xy = 0$.

Exercice 7.6.— Soit $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \int_0^{\pi/2} \ln(x^2 \cos^2 t + \sin^2 t) dt.$$

1. Montrer que la fonction f est de classe C^1.
2. Soit $x > 0$ tel que $x \neq 1$. Calculer $f'(x)$ à l'aide du changement de variable $u = \tan t$.
3. En déduire une expression explicite de $f(x)$ pour tout $x > 0$.

Exercice 7.7.— Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{1+t^2} dt$.
1. Montrer que la fonction f est de classe C^1.
2. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = a - \left(\displaystyle\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Montrer que l'on a $\displaystyle\lim_{x \mapsto +\infty} f(x) = 0$. En déduire l'égalité $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 7.8.— Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(tx) dt$.
1. Montrer que la fonction f est de classe C^1.
2. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $y' = -\dfrac{x}{2} y$.
3. En déduire une expression explicite de $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 7.9.— **1.** Montrer que pour tout réel x on a $\displaystyle\lim_{t \mapsto 0} \frac{\arctan(tx)}{t(1+t^2)} = x$. En déduire que l'application $\varphi : \mathbb{R} \times [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $\varphi(x,t) = \dfrac{\arctan(tx)}{t(1+t^2)}$ pour $t > 0$ et $\varphi(x, 0) = x$ est continue.
2. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{t(1+t^2)} dt$ est convergente pour tout x réel. On note $F(x)$ cette intégrale.
3. Montrer que la fonction F ainsi définie est impaire et continue.
4. Montrer que la fonction F est de classe C^1.
5. Calculer $F'(x)$ pour $x \neq 1$. On pourra utiliser la décomposition suivante :
$\dfrac{1}{(1+T)(1+aT)} = \dfrac{1}{1-a} \left(\dfrac{1}{1+T} - \dfrac{a}{1+aT} \right)$.
6. Calculer $F(0)$ et déduire de ce qui précède une expression explicite de la fonction F (on pourra faire le calcul d'abord pour $x > 0$).

Exercice 7.10.— **C**alcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2} dt$.

1. Montrer que f est continue.

2. Montrer que f est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$ et qu'elle est solution sur cet intervalle de l'équation $y + y'' = \dfrac{1}{x}$.

3. Montrer que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

4. Montrer que f est la seule solution de l'équation différentielle $y + y'' = \dfrac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$ ayant une limite finie en $+\infty$.

5. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout nombre réel $x > 0$, les intégrales impropres $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ et $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$ sont convergentes.

6. Montrer que pour tout $x > 0$, on a

$$f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t+x} dt.$$

7. En déduire l'égalité $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 7.11.— **L**a fonction Gamma.

1. Montrer que pour tout réel $x > 0$, l'intégrale impropre $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ est convergente.

2. Montrer que pour tout $x > 0$, on a $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$; en déduire la valeur $\Gamma(n)$ pour n entier strictement positif.

3. Montrer que la fonction Γ est de classe C^2 et convexe. En déduire que Γ atteint son minimum en un point de l'intervalle $]1, 2[$.

4. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0}(x\Gamma(x)) = 1$ et dessiner l'allure du graphe de Γ.

5. On définit, pour $x > 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$, les fonctions $u_n(x) :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par $[u_n(x)](t) = e^{-nt} t^{x-1}$.

a. Montrer que la série de fonctions $\sum u_n(x)$ converge normalement sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$, où $a > 0$.

b. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} [u_n(x)](t) dt$ est convergente et que l'on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} [u_n(x)](t) dt = \frac{1}{n^x}\Gamma(x)$.

c. En déduire l'égalité

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt = \zeta(x)\Gamma(x),$$

où ζ désigne la fonction de Riemann, définie comme somme de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$.

Exercice 7.12.— Montrer les égalités suivantes :

$$\text{(i)} \int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1}dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2},\ \text{(ii)} \int_0^1 \frac{t^2\ln(t)}{t^2-1}dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2},\ \text{(iii)} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^{\sqrt{t}}-1} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n^2}.$$

Exercice 7.13.— Soit $-1 < a < 1$. On considère la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par

$$\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}], u_n(t) = \cos(t)^n a^n.$$

1. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{\frac{\pi}{2}} |u_n(t)|dt \leq \frac{\pi}{2}|a|^n.$$

2. En déduire que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1-a\cos(t)} = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^n dt\Big)a^n.$$

Exercice 7.14.— Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ donnée par

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, u_n(t) = e^{-nt}\sin(at).$$

1. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^{+\infty} |u_n(t)|dt \leq \frac{|a|}{n^2}.$$

2. En déduire que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(at)}{e^t-1}dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a}{a^2+n^2}.$$

Exercice 7.15.—

1. Déterminer l'intervalle de définition et de continuité des fonctions suivantes :
(i) $\forall x \geq 0, f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t+x(1+t^4)}}$,
(ii) $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \int_0^1 t^{tx}dt$,
(iii) $\forall x \geq 0, h(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t}}dt$.

2. Déterminer l'intervalle de définition, de continuité et de dérivabilité des fonctions suivantes :
(iv) $\forall x > 0, \phi(x) = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{x+t}dt$,
(v) $\forall x \geq 0, \psi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}dt$,
(vi) $\forall x > 0, \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$.