Feuille d'Exercices 5

Séries de fonctions

Exercice 5.1.— Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $f_n(x) = \frac{xe^{-n^2x}}{1+n^2x}$. Montrer que la série de fonctions f_n est **normalement convergente sur** $\mathbb{R}_+$.

Exercice 5.2.— Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $f_n(x) = nxe^{-nx}$.

1. Montrer que la série de fonctions $(\sum f_n)$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}_+$.

2. On fixe $n \in \mathbb{N}$ et on pose $u_n = \text{Sup } \{|f_n(x)|, \quad x \in \mathbb{R}_+\}$. Calculer u_n.

3. Montrer que la série de fonctions $(\sum f_n)$ n'est pas normalement convergente sur $\mathbb{R}_+$.

4. Soit ε un réel strictement positif. Montrer que la série de fonctions $(\sum f_n)$ est normalement convergente sur $[\varepsilon, +\infty[$.

Exercice 5.3.— Pour tout $n \geq 1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $f_n(x) = \frac{1}{n(1+nx)}$.

1. Montrer que la série de fonctions $(\sum f_n)$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}_+^*$. Est-elle convergente en 0 ? Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

2. **a.** Montrer que la série de fonctions $(\sum f_n)$ est normalement convergente sur $[\varepsilon, +\infty[$.
b. Montrer que la fonction f est continue sur $[\varepsilon, +\infty[$.

3. Peut-on déduire de la question précédente les assertions suivantes ? Justifier votre réponse.
a. la série de fonction $(\sum f_n)$ est normalement convergente sur $]0, +\infty[$.
b. La fonction f est continue sur $]0, +\infty[$.

On dit que la propriété "être normalement convergente" est une propriété **globale**, tandis que la propriété "être continue" est **locale**. La propriété "être dérivable" est également locale.

Exercice 5.4.— Si $n \geq 1$, on considère la fonction U_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} \text{Si } x \neq n, \quad U_n(x) = 0 \\ U_n(n) = \frac{1}{n}. \end{cases}$$

a) Montrer que la série de fonctions $\sum U_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
b) Montrer que la série de fonctions $\sum U_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.
c) La série de fonctions $\sum U_n$ converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}$?

Exercice 5.5.— Pour tout $n \geq 1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \frac{1}{n} \arctan(\frac{x}{n})$.

1. Montrer que la série de fonctions $(\sum f_n)$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}$. Est-elle normalement convergente sur $\mathbb{R}$? On appelle f la fonction somme de la série $(\sum f_n)$.

2. Soit a un réel strictement positif. Montrer que la série de fonction $(\sum f_n)$ est normalement convergente sur l'intervalle $[-a, a]$.

3. En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}$.

4. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5.6.— On considère la série de fonctions $\sum \frac{1}{n^{1+x}}$.

1) Déterminer l'ensemble D sur lequel la série de fonctions converge simplement.

2) Si x est dans D, on pose $f = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+x}}$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.

Exercice 5.7.— Si n est un entier naturel, on considère la de fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{1}{n} sin \frac{x}{n}.$$

Montrer que la série de fonctions $\sum_n f_n$ converge vers une fonction s indéfiniment dérivable et lipschitzienne.

Exercice 5.8.— Si n est dans $\mathbb{N}^*$, on définit la fonction U_n sur $\mathbb{R}$ comme suit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, U_n(x) = \frac{1}{n^2} sin \frac{x}{n}.$$

a) Montrer que la série de terme général U_n converge uniformément.Soit f sa somme.

b) Exprimer $\int_0^1 f(t)dt$ comme la somme d'une série numérique.

Exercice 5.9.— Pour tout entier $n \geq 1$ et tout $x \in \mathbb{R}$, posons

$$f_n(x) = x^2 e^{-nx} \quad \text{et} \quad F_n(x) = \int_0^x f_n(t)dt.$$

1. Etude de la série de fonctions $(\sum f_n)$.

a. Montrer que la série de fonctions $(\sum f_n)$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$.

On pose $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

b. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

c. Calculer $f(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

2. Etude de la série de fonctions $(\sum F_n)$.

a. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. A l'aide de deux intégrations par parties, calculer $F_n(x)$.

b. Montrer que la série de fonctions $(\sum F_n)$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}_+$.

On pose $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

c. Exprimer $\lim_{x \to +\infty} F(x)$ sous forme d'une somme de série.

3. Montrer que $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

4. En déduire l'identité suivante :

$$\int_0^{\infty} \frac{t^2}{e^t - 1} dt = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}.$$

Exercice 5.10.— On reprend les fonctions $f_n(x)$ de l'exercice **6.3**, définies sur $\mathbb{R}_+$. On note f la fonction somme de la série $(\sum f_n)$, définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Rappelons que la série de fonctions $(\sum f_n)$ n'est pas normalement convergente sur $\mathbb{R}_+^*$. On souhaite néanmoins calculer la limite de f en 0. On pose

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(1+kx)} \quad \text{et} \quad H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^*,\ x \in \mathbb{R}_+.$$

1. Montrer que f est positive et décroissante.

2. Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a $S_n(x) \leq f(x)$.

3. Montrer qu'on a $S_n(\frac{1}{n}) \geq \frac{1}{2}\ H_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

4. Quelle est la limite de la suite (H_n) ? En déduire que $\lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{n}) = +\infty$.

5. Montrer que $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$, en utilisant les questions 1 et 4.

Exercice 5.11.— Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ la série de fonctions de terme général $f_n(x) = (-1)^n \frac{n+x}{n^\alpha}$ est elle

1. Simplement convergente sur $\mathbb{R}$.

2. Absolument convergente sur $\mathbb{R}$.

3. Normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

4. Normalement convergente sur $[-A, A]$ pour tout $A > 0$.

Exercice 5.12.— **1.** Montrer que la série de terme général $\frac{x^{2n+1}}{n(2n+1)}$ est normalement convergente sur $[-1, 1]$

2. Calculer sa somme pour $|x| < 1$ en justifiant soigneusement.

3. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)}$.

Exercice 5.13.— Pour tout $x \in \mathbb{R}$, posons $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{2^n}$.

1. Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \sum\limits_{n\geq 0} f_n(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$ et indéfiniment dérivable.

2. Calculer explicitement $f(x)$.

Exercice 5.14.— Soit $n \geq 1$ et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}+$ par $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}$.

1. La série de fonctions est-elle simplement convergente ? Normalement convergente sur $\mathbb{R}$? Sur un intervalle ?

2. La série de fonctions f_n' est elle convergente ? Normalement convergente sur $\mathbb{R}$? Sur $[0, A]$ avec $A > 0$?

3. Montrer que $f(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n+x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$.
