Feuille d'Exercices 4

Suites de fonctions

Exercice 4.1.— Etudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions suivantes :

1. $f_n(x) = x^n$, pour $x \in [0,1]$, pour $x \in [0,a]$ avec $a < 1$, pour $x \in [0,1[$.

2. $f_n(x) = \frac{nx}{1+n|x|}$, pour $x \in \mathbb{R}$.

3. $f_n(x) = \frac{ne^{-x}+1}{n+x}$, pour $x \in \mathbb{R}_+$.

4. $f_n(x) = \frac{\cos(nx)}{\sqrt{n}}$, pour $x \in \mathbb{R}$.

5. $f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$, pour $x \in \mathbb{R}$.

6. $f_n(x) = \frac{ne^{x}+xe^{-x}}{n+x}$, pour $x \in [0,1]$.

7. $f_n(x) = x^n(1-x)$, pour $x \in [0,1]$.

8. $f_n(x) = e^{-nx}\sin(\alpha nx)$ pour $x \in \mathbb{R}_+$, pour $x \in [a,+\infty[$ (avec $a > 0$), $\alpha \in \mathbb{R}$.

9. $f_n(x) = x^2\sin(\frac{1}{nx})$, pour $x \neq 0$, $f_n(0) = 0$.

10. $f_n(x) = nx$, pour $x \in [0, \frac{1}{n}[$, $f_n(x) = \frac{n(x-1)}{1-n}$, pour $x \in [\frac{1}{n}, 1]$.

11. $f_n(x) = \sqrt{n}x$, pour $x \in [0, \frac{1}{n}[$, et $f_n(x) = \frac{n(x-1)}{(1-n)\sqrt{n}}$, pour $x \in [\frac{1}{n}, 1]$.

Exercice 4.2.— Soit (f_n) la suite de fonctions définies sur $I =]-\pi,\pi[$ par :

$$f_n(0) = 0, \qquad f_n(x) = \frac{\sin^2(nx)}{n\sin(x)}, \quad x \neq 0.$$

Etudier la convergence simple ou uniforme de la suite (f_n) sur tout ou partie de l'intervalle I.

Exercice 4.3.— On considère la suite de fonctions numériques définie par

$$f_n(x) = \frac{1}{n\sqrt{n}}\frac{1+nx}{1+n^2x^2}, \quad x \in [0,+\infty[, n \geq 1.$$

Montrer que la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 4.4.— Soit $f_n(x) = \lim_{m\to+\infty}\cos(n!\pi x)^{2m}$, pour $x \in \mathbb{R}$. Montrer que f_n converge simplement vers une fonction que l'on déterminera.

Exercice 4.5.— Soit (u_n) une suite réelle qui converge vers une limite u_0. Soit la suite de fonctions numériques définie par :

$$f_n(x) = 1, \;\; x \leq u_n, \;\; f_n(x) = 0, \;\; x > u_n.$$

La suite (f_n) converge-t-elle simplement ?

Exercice 4.6.— On définit sur $[0,1]$ la suite de fonctions f_n par :

$$f_n(x) = \frac{1 - x^n}{1 + x^{2n}}.$$

Les fonctions f_n sont elles continues ? Montrer que la suite (f_n) converge simplement mais pas uniformément.

Exercice 4.7.— On considère la suite de fonctions $f_n(x) = xe^{-nx^2}$. Montrer que f_n converge uniformément sur $\mathbb{R}$. A-t-on, pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \lim_{n\to+\infty} f'_n(x)$? Montrer que la suite (f'_n) ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4.8.— On considère la suite de fonctions (f_n) définie par :

$$\begin{cases} f_n(x) = n^2 x, \;\; 0 \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ f_n(x) = n^2(\frac{1}{n} - x), \;\; \frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ f_n(x) = 0, \;\; x \geq \frac{1}{n} \end{cases}$$

Montrer que la suite (f_n) converge simplement vers une fonction f. Comparer $\int_0^1 f(x)dx$ et $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$.

Exercice 4.9.— Etudier la continuité et la dérivabilité de la limite des suites de fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$:

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}, \qquad g_n(x) = \frac{1}{n}\sin(n^2 x).$$

Exercice 4.10.— Soit la suite de fonctions numériques définie par

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + (n + x)^2}, \;\; x \in \mathbb{R}.$$

Montrer que la suite de fonction (f_n) converge simplement vers 0 et que la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}^+$, mais pas sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4.11.— Pour $n \geq 1$, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(t) = e^{-nt^2}$.

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une limite que l'on déterminera.

2. Montrer que la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$, mais qu'il y a convergence uniforme sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty]$ ou $]-\infty, -a]$ pour $a > 0$.

Exercice 4.12.— Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f_n(x) = e^{-x}\left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!}\right)$$

converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers $f : x \mapsto e^{-2x}$.

Exercice 4.13.— Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(t) = \frac{nt^2}{1+nt} \text{ si } t \geq 0 \text{ et } f_n(t) = \frac{nt^3}{1+nt^2} \text{ si } t < 0.$$

Etudier la convergence simple, puis uniforme de cette suite.

Exercice 4.14.— Soit $n \geq 1$ et $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f_n(t) = e^t - \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \text{ si } t > -n,\ f_n(t) = e^t \text{ si } t \leq -n.$$

1. Montrer que la restriction de f_n à $[0, +\infty[$ est croissante. En déduire que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers 0 sur tout intervalle $[0, a]$ avec $a > 0$.

2. Montrer que la restriction de f_n à $]-\infty, 0[$ est positive, atteint son maximum en un point x_n et que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ admet -2 pour limite.

3. En déduire que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $]-\infty, 0[$.

Exercice 4.15.— **Théorèmes de Dini.**

1. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite croissante de fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ qui converge simplement vers une fonction continue sur $[0, 1]$. Montrer que la convergence est uniforme.

2. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions continues et croissantes de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, qui converge simplement vers une fonction f continue sur $[0, 1]$. Montrer que la convergence est uniforme.

Exercice 4.16.— Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit P_n par $P_0(t) = 0$ pour tout $t \in [0, 1]$ et $P_{n+1}(t) = P_n(t) + \frac{1}{2}\left(t - P_n(t)^2\right)$ pour $t \in [0, 1]$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est un polynôme et que pour tout $t \in [0, 1]$, on a $0 \leq P_n(t) \leq \sqrt{t}$.

2. Montrer que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante et qu'elle converge simplement vers une limite que l'on déterminera.

3. Montrer que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0, 1]$.
